关于非线性规划基本概念

引 言

- 在科学管理和其他领域中，很多实际问题可归结为线性规划问题。但也有很多问题，其目标函数和(或)约束条件很难用线性函数表达。如果目标函数或约束条件中含有非线性函数，就称这种问题为非线性规划问题。
- 解这类问题需要用非线性规划方法。目前，非线性规划已成为运筹学一个重要分支，在最优设计、管理科学、系统控制等许多领域得到越来越广泛的应用。
- 一般说来，由于非线性函数的复杂性，解非线性规划问题要比解线性规划问题困难得多。而且，也不像线性规划那样有单纯形法等通用方法。非线性规划目前还没有适于各种问题的一般性算法，各个方法都有自己特定的适用范围。

基本概念—问题的提出

例1 某公司经营两种产品，第一种产品每件售价30元，第二种产品每件售价450元。根据统计，售出一件第一种产品所需要的服务时间平均是0.5小时，第二种产品是$(2+0.25x_2)$小时，其中x_2是第二种产品的售出数量。已知该公司在这段时间内的总服务时间为800小时，试决定使其营业额最大的营业计划。

设该公司计划经营第一种产品x_1件，第二种产品x_2件。根据题，其营业额为 $f(X)=30x_1+450x_2$

由于服务时间的限制，该计划必须满足 $0.5x_1+\left(2+0.25x_2\right)x_2\le 800$

此外，这个问题还应满足 $x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$**，得到本问题数学模型为：**

$$
\begin{cases}
\max f\left(X\right)=30x_1+450x_2 \\
\quad 0.5x_1+2x_2+0.25x_2^2\le 800 \\
\quad x_1\ge 0,\ x_2\ge 0
\end{cases}
$$

非线性规划问题的数学模型

非线性规划的数学模型常表示成以下形式

$$
\begin{cases}
\min f(X) & (1) \\
h_i(X)=0,\ i=1,2,\cdots m & (2) \\
g_j(X)\geq 0,\quad j=1,2,\ldots,l & (3)
\end{cases}
$$

其中自变量 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是***n***维欧氏空间 E^n 中的向量(点)；$f(X)$ 为目标函数，

$h_i(X)=0$ 和 $g_j(X)\geq 0$ 为约束条件。

数学模型

由于

$$\max f(X) = -\min\left[-f(X)\right]$$

当需使目标函数极大化时，只需使其负值极小化即可。因而仅考虑目标函数极小化，这无损于一般性。

若某约束条件是“≤”不等式时，仅需用“-1”乘该约束的两端，即可将这个约束变为“≥”的形式。

由于等式约束 $h_i(X) = 0$ 等价于下述两个不等式约束：

$$\begin{cases} h_i(X) \geq 0 \\ -h_i(X) \geq 0 \end{cases}$$

因而，也可将非线性规划的数学模型写成以下形式

$$\begin{cases} \min f(X) & (4) \\ g_j(X) \geq 0,\ j=1,2,\ldots,l & (5) \end{cases}$$

图解法

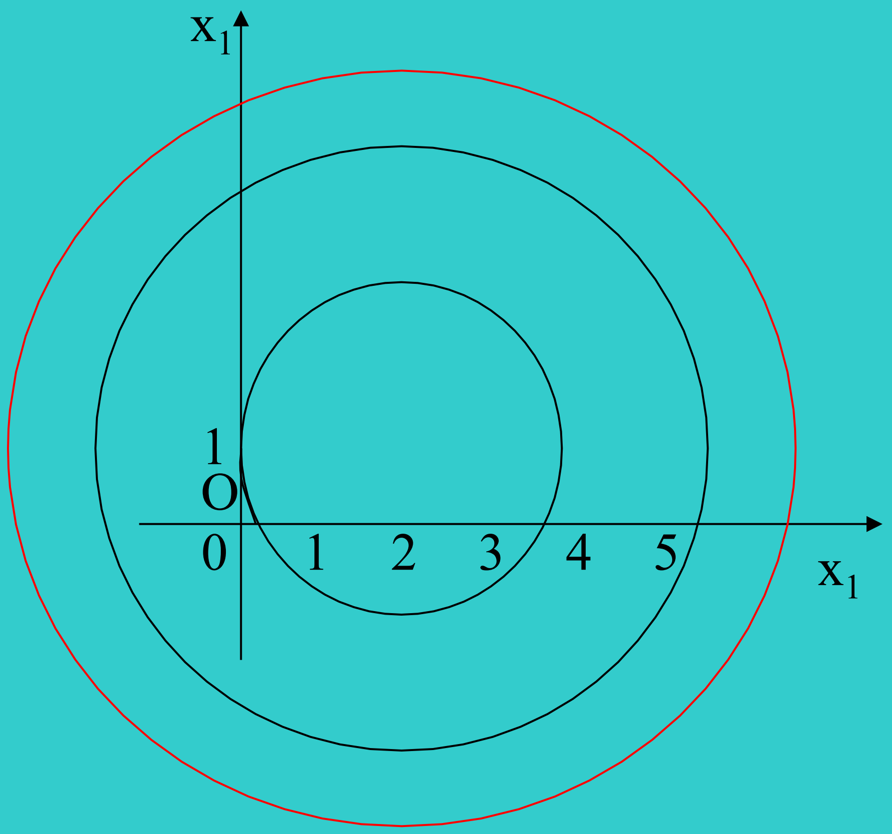
- **例1：用图解法求解非线性规划**

$$\min f(X)=(x_1-2)^2+(x_2-1)^2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1+x_2^2-5x_2=0 \\ x_1+x_2-5\geq 0 \\ x_1\geq 0 \\ x_2\geq 0 \end{cases}$$

解题步骤

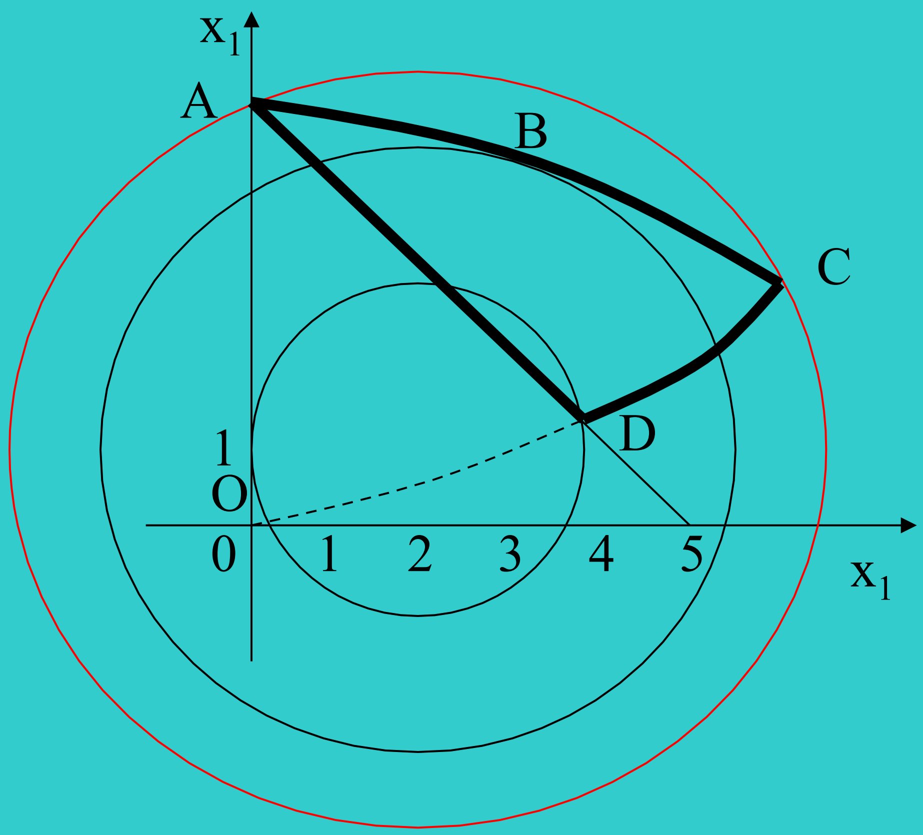
在x_1Ox_2坐标平面上画出目标函数的等值线，它是以点(2，1)为圆心的同心圆。



$$f(X)=(x_1-2)^2+(x_2-1)^2$$

二维问题的图解

根据约束条件画出可行域，
它是抛物线段ABCD



分析：

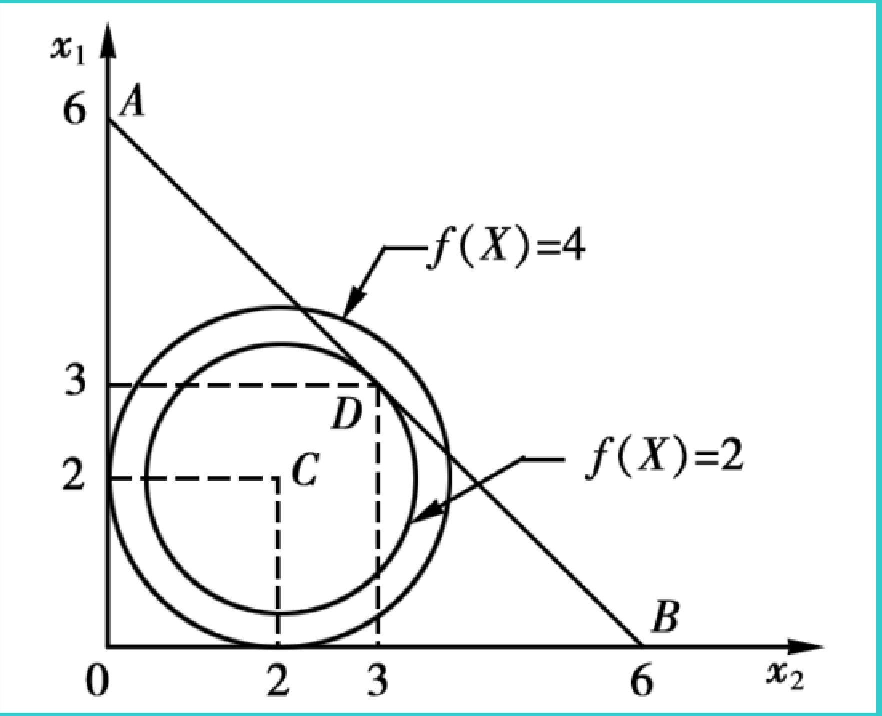
令动点从A出发沿抛物线ABCD移动，当动点从A移向B时，目标函数值下降；当动点由B移向C时，目标函数值上升。从而可知，在可行域AC这一范围内，B点的目标函数值f(B)最小，因而点B是一个极小点。

当动点由C向D移动时，目标函数值再次下降，在D点(其坐标为(4，1))目标函数值最小。

练习：图解法求解非线性规划

$$\min f(X)=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2$$

$$\begin{cases} h(X)=x_1+x_2-6=0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



最优解：$x_1^*=x_2^*=3$，
目标函数值：$f(X^*)=2$。

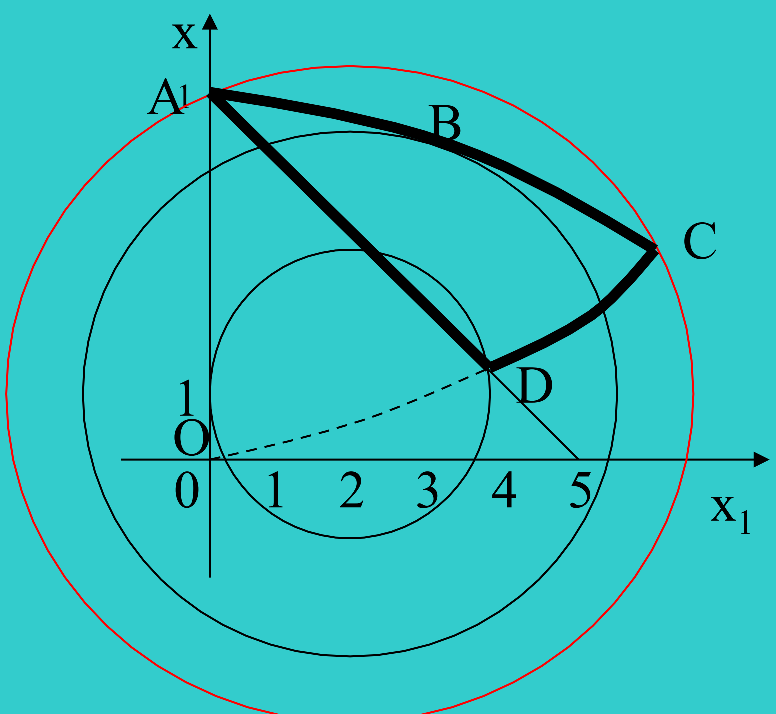
作业：用图解法求解

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$s.t.\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$\min f(X)=(x_1-2)^2+(x_2-1)^2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1+x_2^2-5x_2=0 \\ x_1+x_2-5\geq 0 \\ x_1\geq 0 \\ x_2\geq 0 \end{cases}$$



在例1中，目标函数值f(B)仅是目标函数f(X)在一部分可行域上的极小值，而不是在整个可行域上的极小值，这样的极小值称为局部极小值(或相对极小值)。像B这样的点称为局部极小点(或相对极小点)。f(D)是整个可行域上的极小值，称全局极小值(最小值)，或绝对极小值；像D这样的点称全局极小点(最小点)，或绝对极小点。全局极小点当然也是局部极小点，但局部极小点不一定是全局极小点。

局部极小：

设f(X)为定义在n维欧氏空间E_n的某一区域R上的n元实函数(可记为f(X):R$\subset E_n \to E_1$)，对于X*∈R，如果存在某个ε＞0，使所有与X*的距离小于ε的X∈R(即X∈R且‖X−X*‖＜ε)，都有f(X)≥f(X*)，则称X*为f(X)在R上的局部极小点，f(X*)为局部极小值。若对于所有X≠X*且与X*的距离小于ε的X∈R，都有f(X)＞f(X*)，则称X*为f(X)在R上的严格局部极小点，f(X*)为严格局部极小值。

全局极小：

设f(X)为定义在En的某一区域R上的n元实函数，若存在X*∈R，对所有X∈R都有f(X)≥f(X*)，则称X*为f(X)在R上的全局极小点，f(X*)为全局极小值。若对于所有X∈R且X≠X*，都有f(X)＞f(X*)，则称X*为f(X)在R上的严格全局极小点，f(X*)为严格全局极小值。