# 第六章 狭义相对论

## （Special Relativity）

相对论由爱因斯坦（**Albert Einstein**）创建，

它涉及了两大部分：

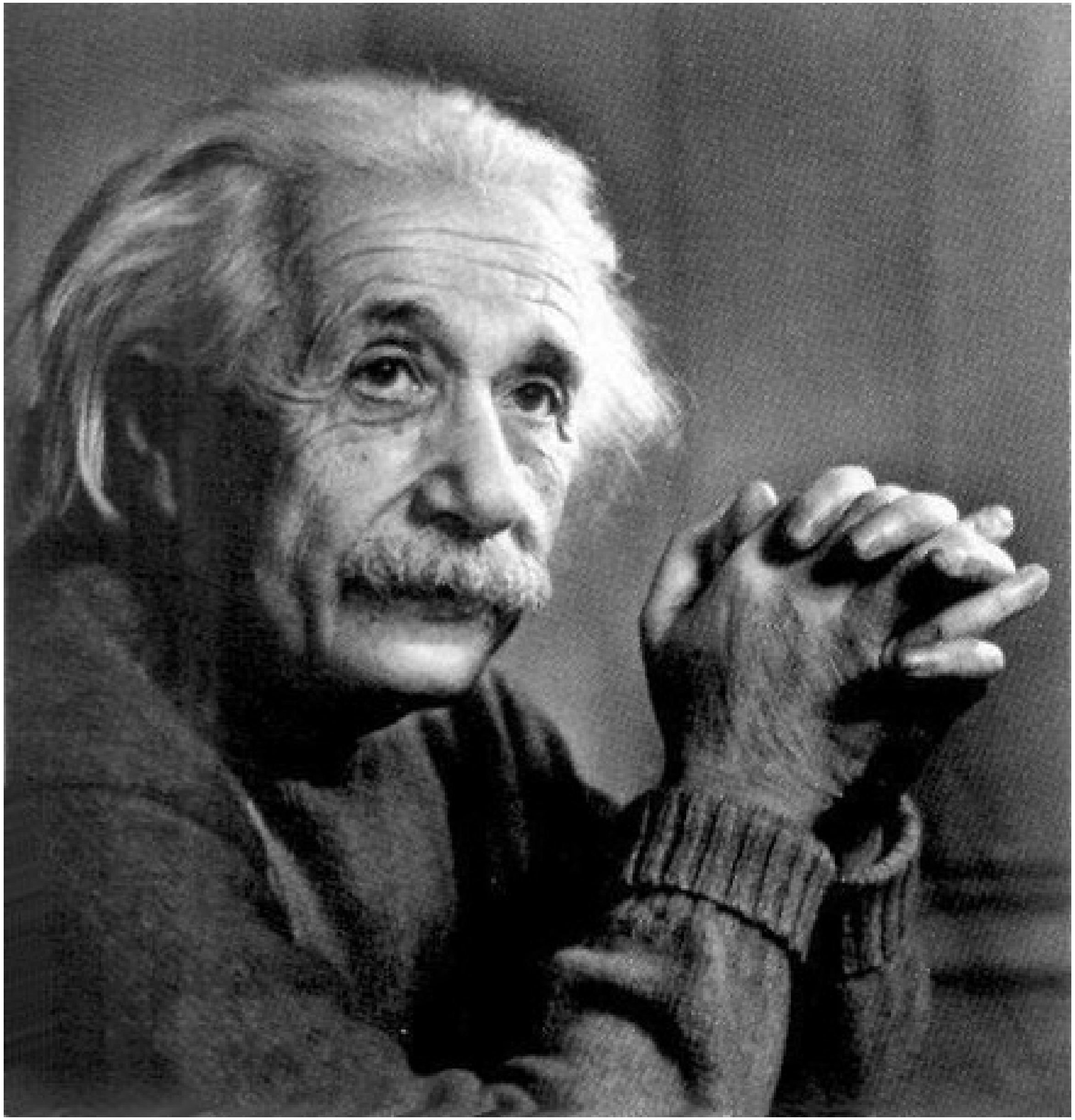
狭义相对论（**Special Relativity**）（**1905**）

揭示了时间、空间与运动的关系。

广义相对论（**general relativity**）**(1915-1916)**

揭示了时间、空间与引力的关系。

要点是狭义相对论的时空观。



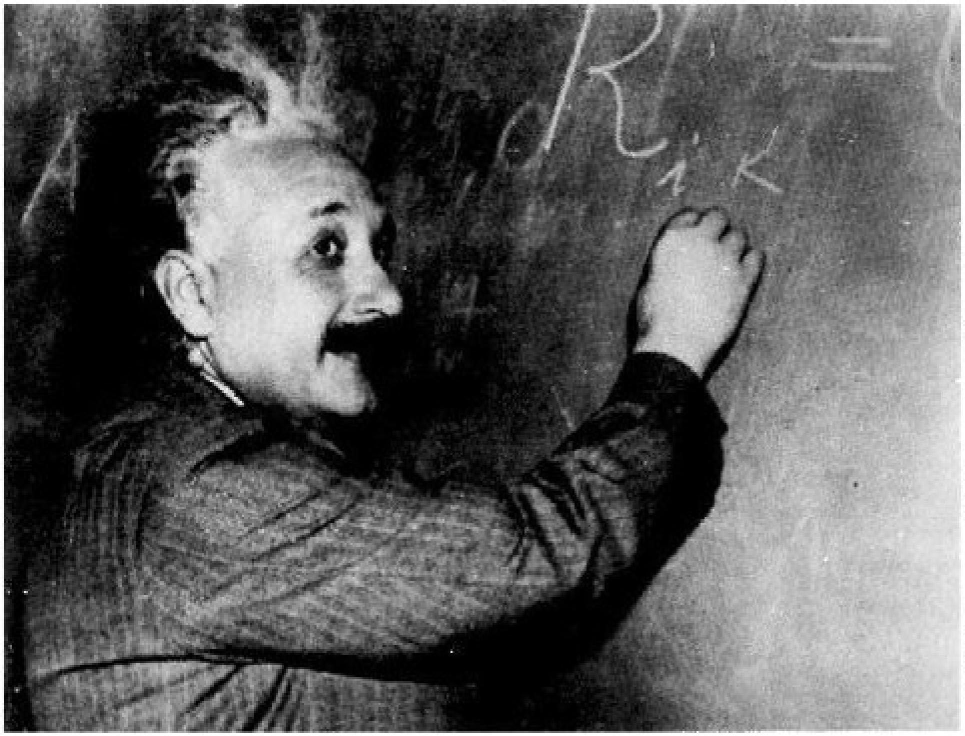
爱因斯坦

（Albert Einstein）

（1879——1955）

美籍 德国人

1923年获诺贝尔物理奖



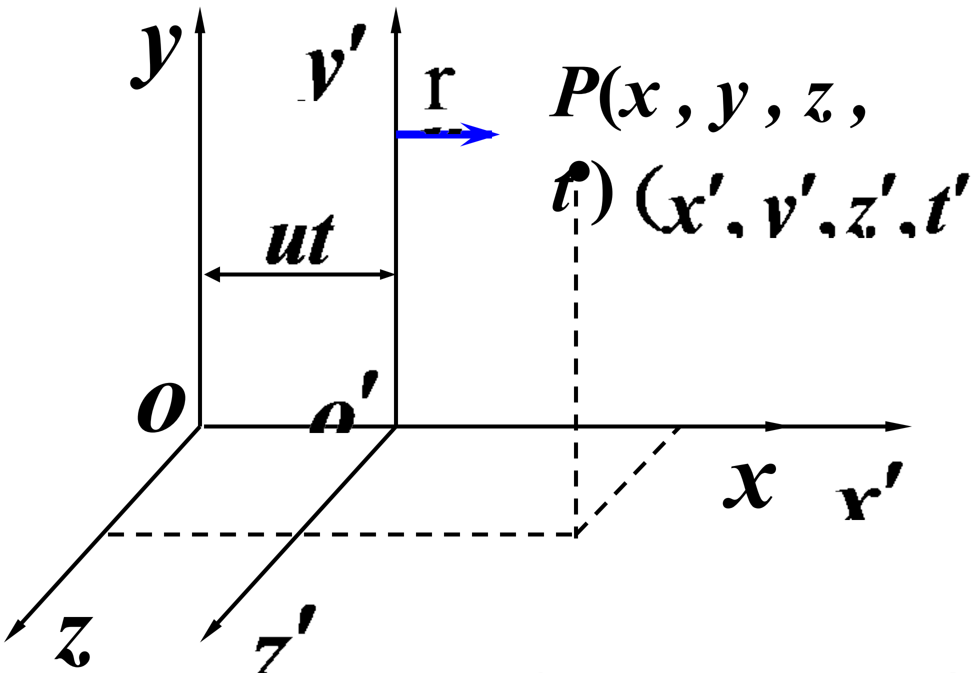
## △§6.1 牛顿相对性原理和伽里略变换（principle of relativity in mechanics and Galilean transformation）

牛顿相对性原理（力学相对性原理）：

一切力学规律在不同的惯性系中应有相同的形式。

牛顿相对性原理源于牛顿的时空观。

牛顿的时空观可经过下列坐标和时间变换来体现：




$x' // x$, $y' // y$, $z' // z$,

$\vec{u} = u\vec{i}_x = const$

且 $O'$ 与 $O$ 重叠时，

$t = 0$，$t' = 0$。

由时空间隔的绝对性，有：

$$\left.\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}\right\}$$

— 伽里略变换 (Galilean transformation)

对时间求导，得：

$$\begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \rightarrow \boxed{\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}}$$

—— 伽里略速度变换

$$\because \ \vec{u} = \text{const.} \quad \therefore \ \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \vec{a}' = \vec{a}$$

牛顿力学中力和质量都与参照系的选择无关，所以在不同惯性系中 r r 的形式不变。这表白伽里略变换和力学相对性原理是一致的。用力学试验无法鉴定一种惯性系的运动状态。

# §6.2 爱因斯坦相对性原理和光速不变原理

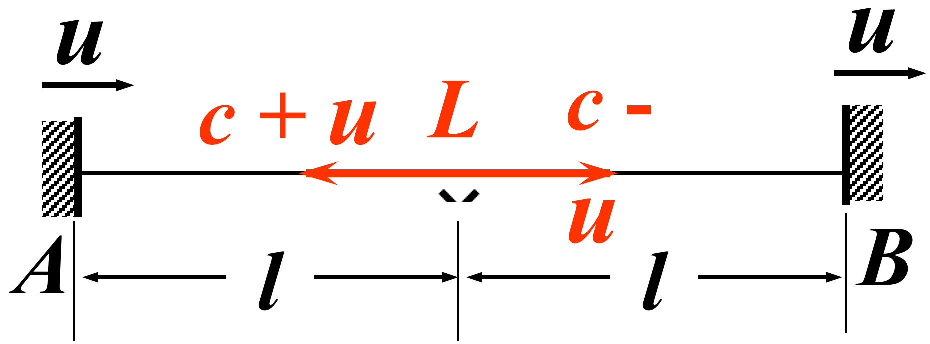
**（Einstein′s principle of relativity and principle of constant speed of light）**

19世纪下半叶，由麦克斯韦电磁场方程组得知：

电磁波（涉及光）在真空中各方向速率都为 $c$ 。

当初人们以为这只对“绝对静止”参照系才成立

企图找到“绝对静止”参照系的思想试验：



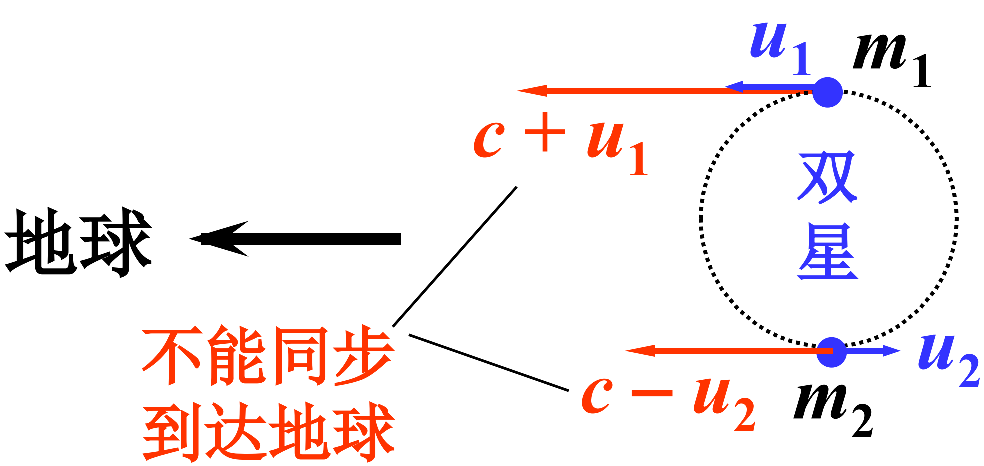

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{l}{c-u} - \frac{l}{c+u}$$

设 $u << c$，则 $\Delta t \approx 2l\dfrac{u}{c^2}$ 。

1887年，体现上面思想的迈克耳孙—莫雷（Michelson-Morlay）试验却得到了“零”成果！

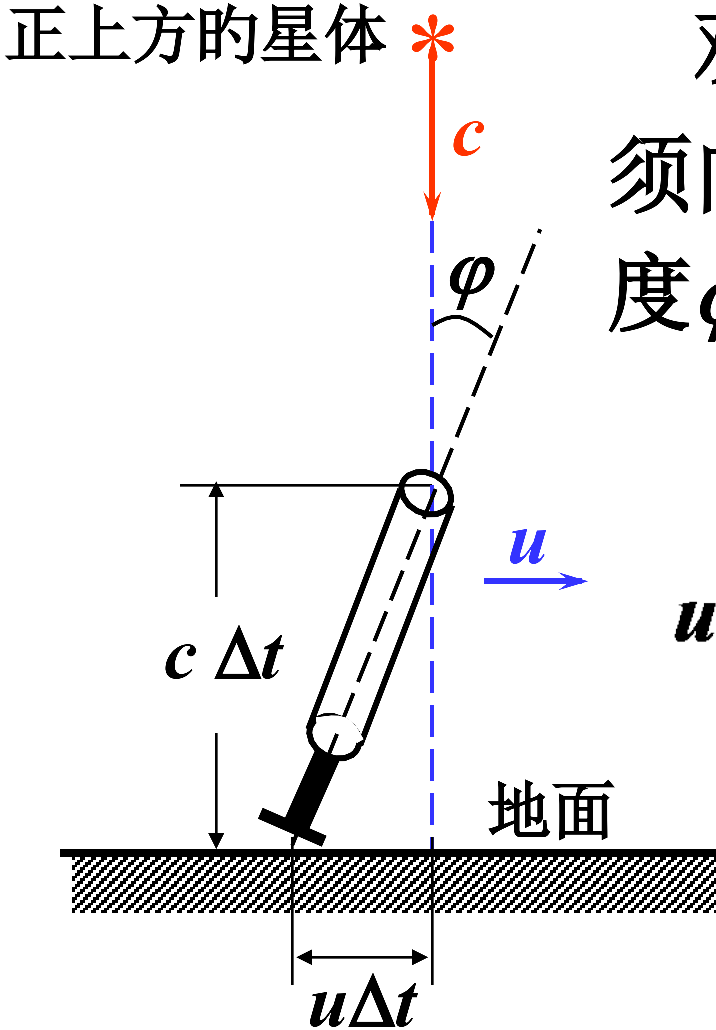
地球就是“绝对静止”的参照系？

用多种企图保持绝对参照系的假说来解释该试验成果，均遭到失败。经典的有：




实际上观察不到双星位置的扭曲，而是完全符合力学规律。

“以太”（aether, ether）拖曳说：光在以太中各向速度都是$c$，而以太又被地球拖着走。




观察正上方的星体，望远镜必须向地球公转方向倾斜一种小角度$\varphi$，这叫“光行差”现象。

$$\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = \frac{u\Delta t}{c\Delta t} = \frac{u}{c}$$

$$u \approx 30\text{km/s} \rightarrow \varphi \approx 10^{-4}\ \text{rad} \approx 20.5''$$

按以太拖曳说，光到地球附近要附加速度$u$，望远镜就不该倾斜了。

1923年，爱因斯坦访问日本时的即席演讲中有这么一段话：

“还在学生时代，我就在想这个问题了。当初，我懂得迈克耳孙试验的奇怪成果。我不久得出结论。假如我们认可迈克耳孙的零成果是事实，那么地球相对以太运动的想法就是错误的，这是引导我走向狭义相对论的最早的想法。”

爱因斯坦以为：物质世界的规律应该是友好统一的，麦克斯韦方程组应对全部惯性系成立。

在任何惯性系中光速都是各向为$c$，这么就自然地解释了迈克耳孙—莫雷试验的零成果。

**1923年爱因斯坦在《论动体的电动力学》一书中提出如下两条基本原理：**

**1.物理规律对全部惯性系都是一样的。**

**这后来被称为爱因斯坦相对性原理。**

**2. 任何惯性系中，真空中光的速率都为 $c$ 。**

**这一规律称为光速不变原理。**

**光速不变原理与伽里略变换是彼此矛盾的，**

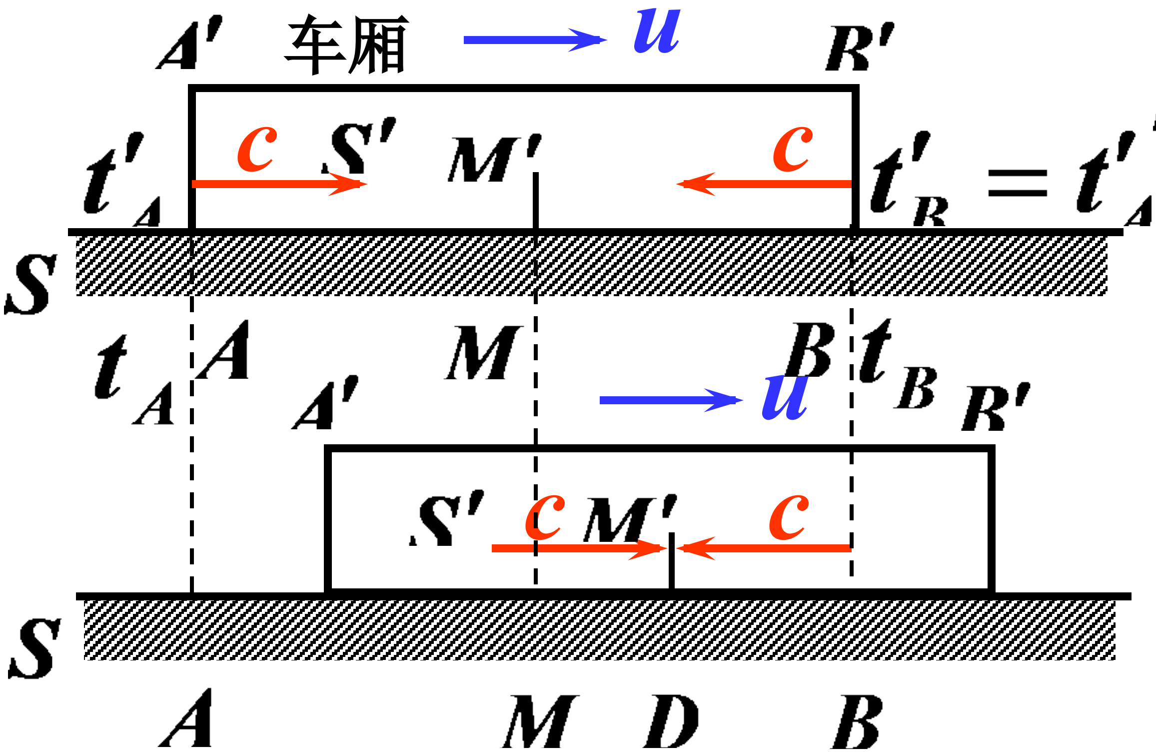
若保持光速不变原理就必须抛弃绝对的时空观。

# §6.3 同步性的相对性和时间延缓

# （relativity of simultaneity and time dilation）

## 一.同步性的相对性

光速不变原理将造成时间度量相对性。




$S'$： $t'_A = t'_B$，

光在 $M'$ 相遇；

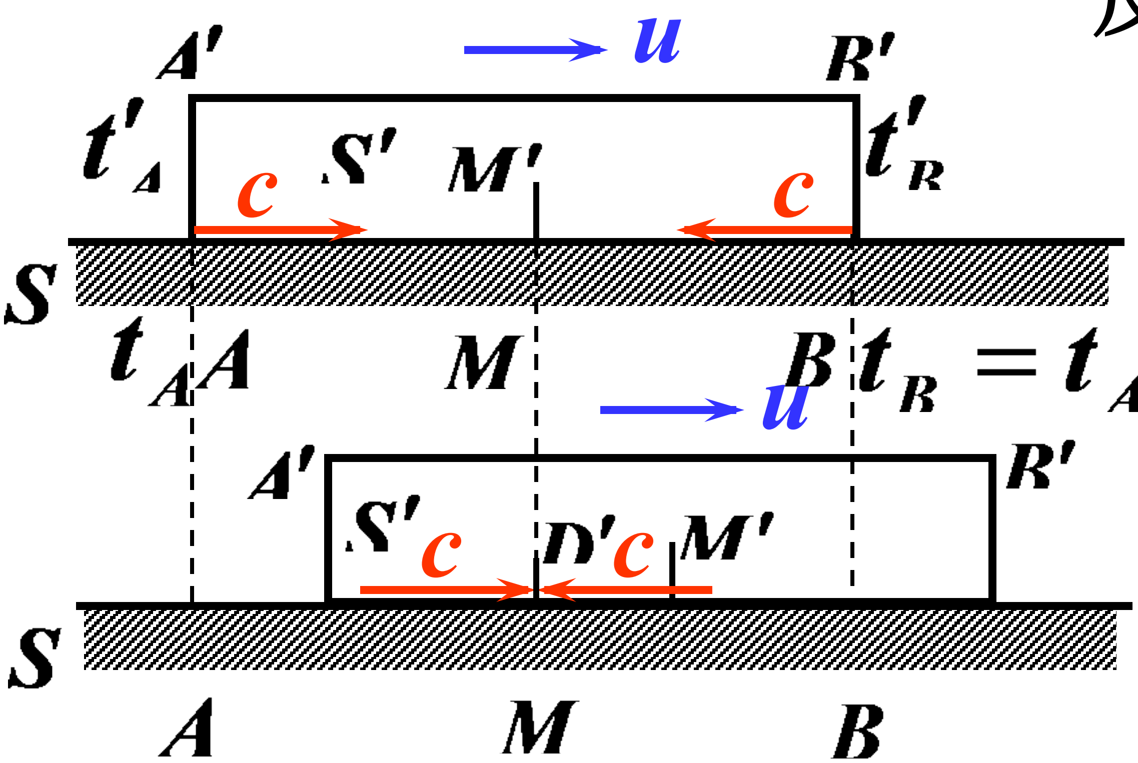
$S$： 光在 $D$ 相遇，

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AD} > \overline{BD} \\ \text{光速为} c \end{array}\right\} t_B > t_A$$

(早)

在站台上看，光先从车厢的尾部发出。

反过来看：




$S$：$t_A = t_B$ 光在$M$相遇；

$S'$：光在 $D'$相遇，

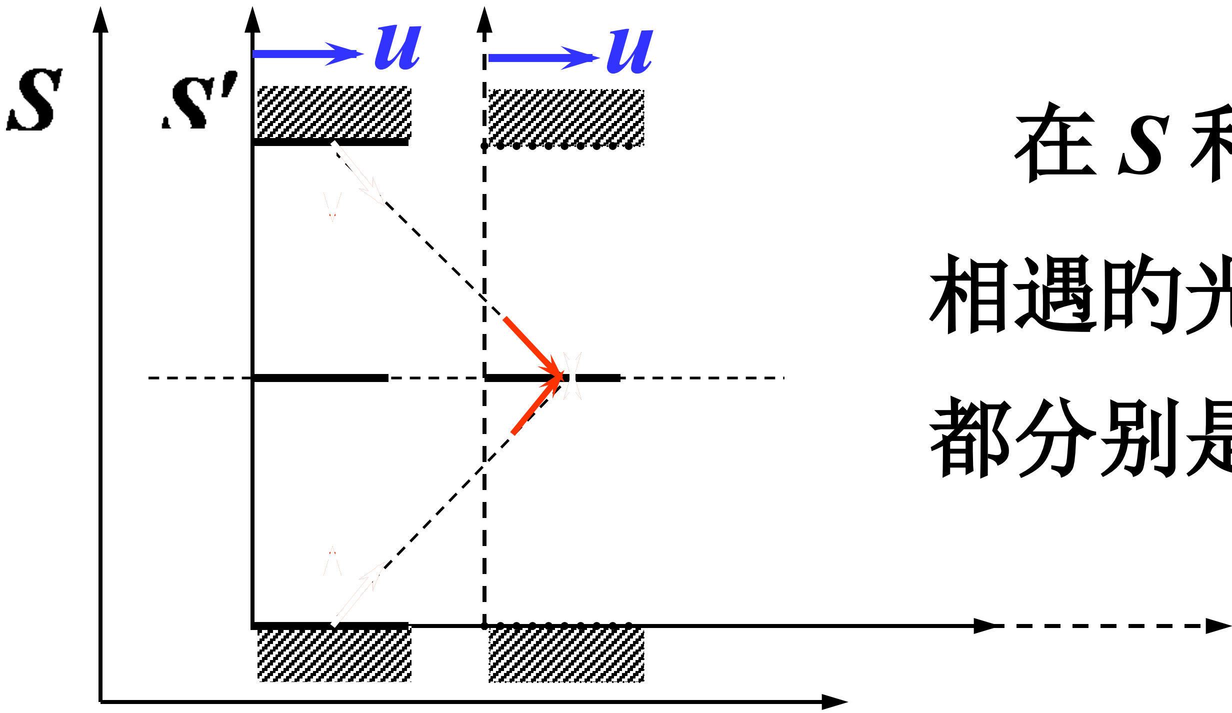
$\left.\begin{array}{l}\overline{A'D'} < \overline{B'D'} \\ \text{光速为}c\end{array}\right\} t'_A > t'_B$ (早)

在车厢中看，光是先从车厢的头部发出。

**结论：** 沿惯性系$S$和$S'$相对运动方向发生的两个事件，若 $S$ 中是同步发生的，则$S'$中就不是同时发生的了，而是在$S$系运动后方的事件先发生。

这就是同步性的相对性原理。

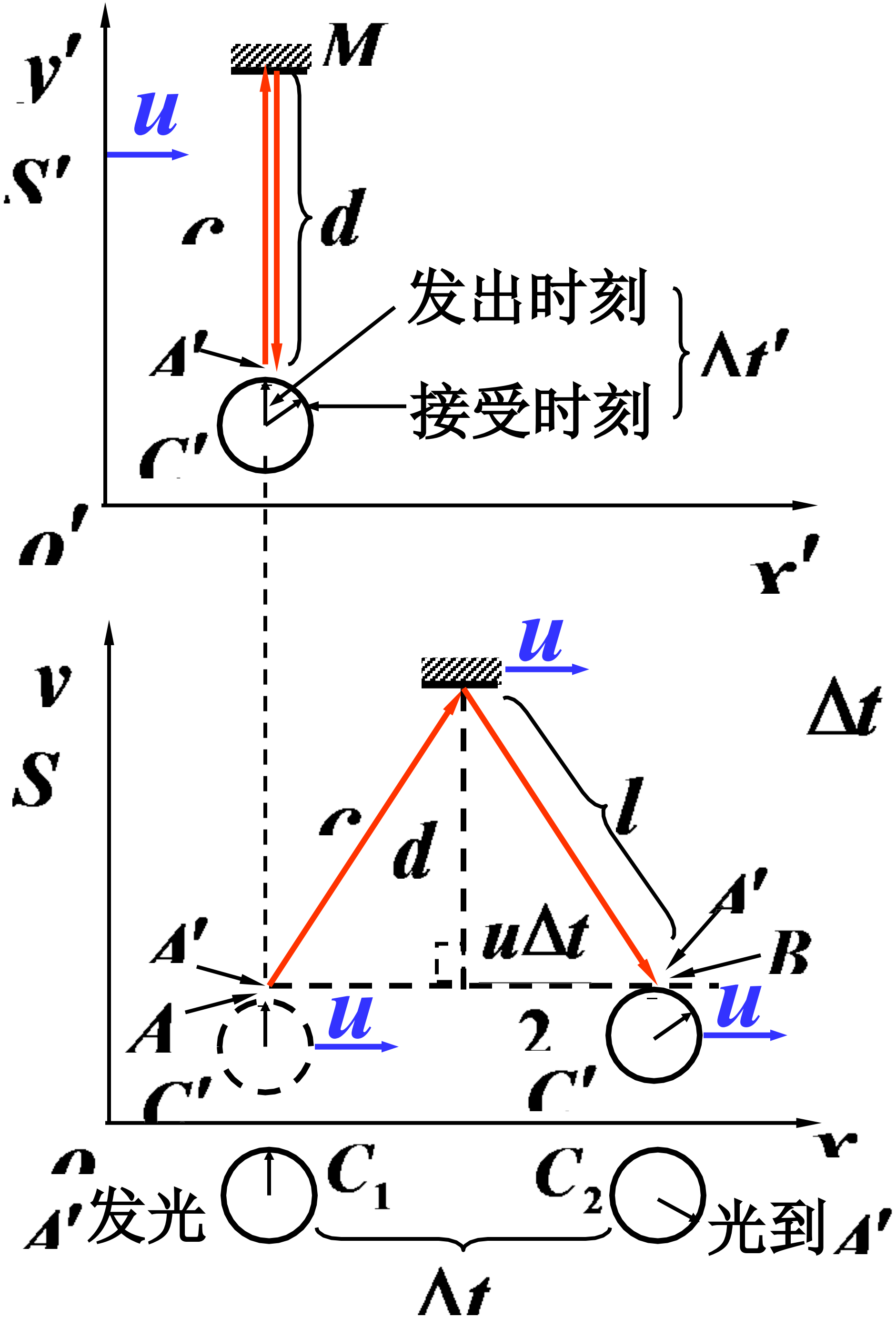
沿垂直于相对运动方向发生的两件事的同步性并不具有相对性。




在 $S$ 和 $S'$ 中两束相遇的光走的旅程都分别是相同的。

## 二.时间延缓（时间膨胀）

讨论一种匀速运动的钟和一系列“静止”的同步的钟的比较。




$$S':\quad \Delta t' = \frac{2d}{c} \qquad (1)$$

$$S:\ l = \sqrt{d^2 + \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2}$$

光速不变:

$$\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{d^2 + \left(\frac{u\Delta t}{2}\right)^2} \qquad (2)$$

由(1)、(2)解得:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$\Delta t'$ — 原时（proper time）

原时：同一地点两事件的时间间隔

$$\because \Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} < \Delta t,\qquad \therefore \text{原时最短。}$$

一种运动的钟 $C'$ 和一系列静止的钟 $C_1$、$C_2$…比较，运动的钟 $C'$ 变慢了。

一种运动时钟的“1秒”比一系列静止时钟的“1秒”长，这称为运动时钟的“时间延缓”。

时间延缓完全是一种相对效应。

S’系中的观察者会发觉静止于S系中而相对于自己运动的钟比自己参照系中的一系列同步的钟走得慢！

例1：一飞船以u=9000m/s的速率相对于地面匀速飞行。飞船上的钟走了5s的时间，用地面上的钟测量是经过了多少时间？

例2:时间延缓的实例:$\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu$

$\pi$ 静止寿命 $\tau' = 2.5\times10^{-8}\,\mathrm{s}$ ，

$u = 0.99\,c$ 时，测得径迹长为多少？

有人这么做，对吗？

$$u\tau' = 0.99\times3\times10^{8}\times2.5\times10^{-8} = 7.4\,\mathrm{m}$$

正确解法：

运动寿命：
$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = 1.8\times10^{-7}\,\mathrm{s}$$

$$u\tau = 0.99\times3\times10^{8}\times1.8\times10^{-7} = 53m$$

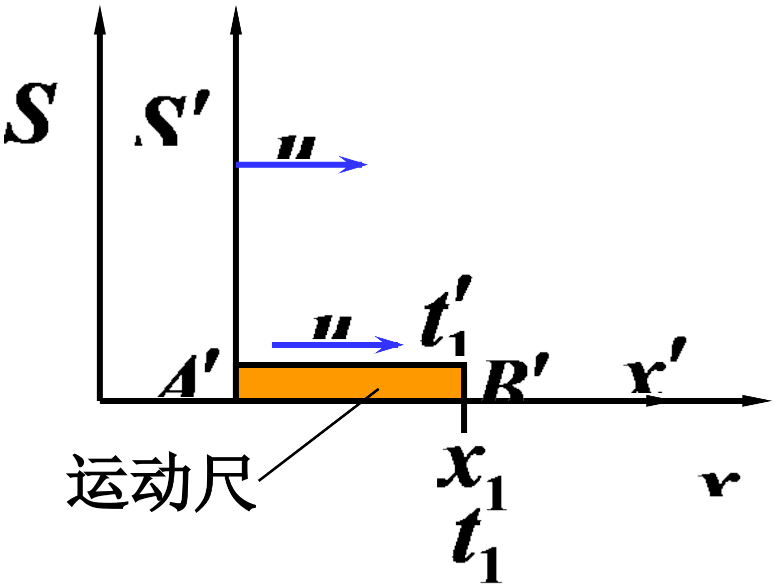
应该注意，与钟一起运动的观察者是感受不到钟变慢的效应的。

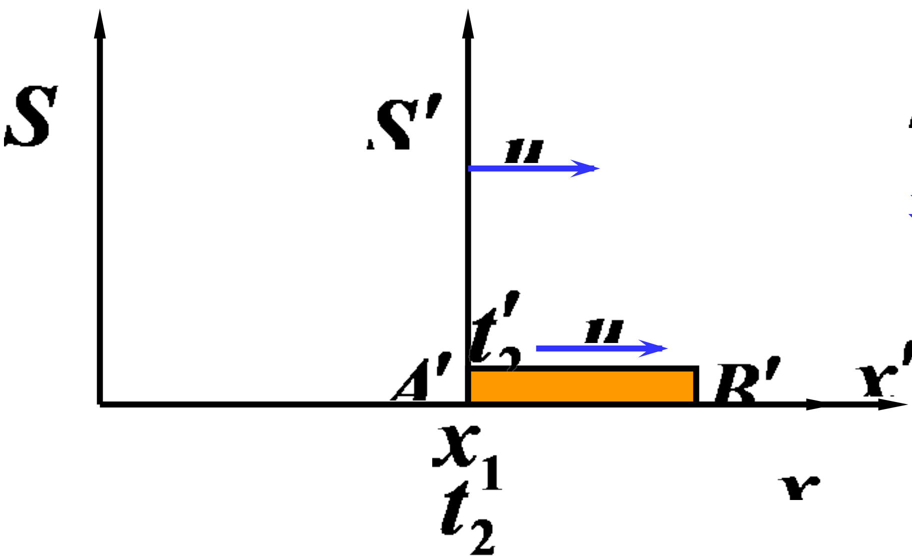
运动时钟变慢纯粹是一种相对论效应，并非运动使钟的构造发生什么变化。

1秒＝$^{135}Cs$发出的一种特征频率光波周期的9192631770倍（此前定为平均太阳日的1/86400）。在任何惯性系中的1秒都是这么定义的。

当初 $u << c$ 时，$\Delta t' = \Delta t$ ，这就回到了牛顿的绝对时间了。

# §6.4 长度缩短（length contraction）




运动尺长度的测量：

事件1：$B'$与$x_1$对齐；

事件2：$A'$与$x_1$对齐；

$S$：$\Delta t = t_2 - t_1$（原时）

动长 $l = u\Delta t$

$S'$：$\Delta t' = t_2' - t_1'$

静长（原长） $l' = u\Delta t'$

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$\frac{l}{l'}=\frac{\Delta t}{\Delta t'}=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\rightarrow l=l'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

动长 $=$ 原长 $\times\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ $\therefore$ 原长最长

运动尺的缩短是相对论的效应，并不是运动尺的构造发生了变化。

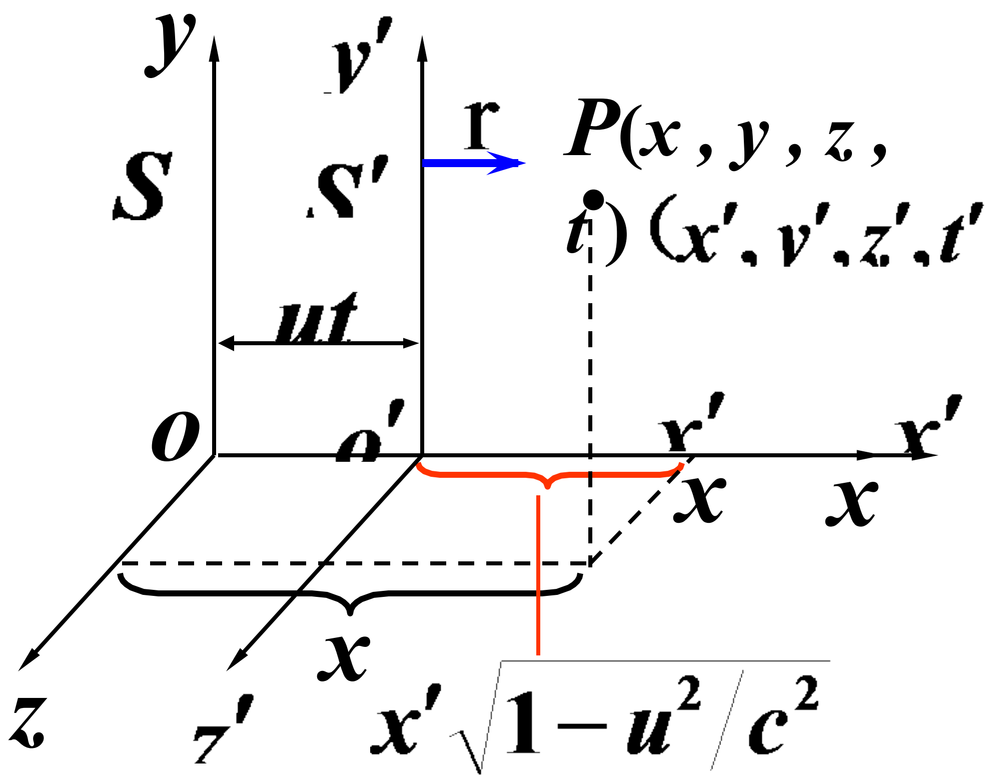
与尺一起运动的观察者感受不到尺的变短。

因为时间膨胀，所以运动尺要缩短。

$u \ll c$ 时，$l=l'$ $\longrightarrow$ 牛顿的绝对空间

# §6.5 洛仑兹变换 （Lorentz transformation）

要寻找适合光速不变原理的新的时空变换关系。




设 $S$, $S'$ 皆为惯性系，

$x' // x$, $y' // y$, $z' // z$,

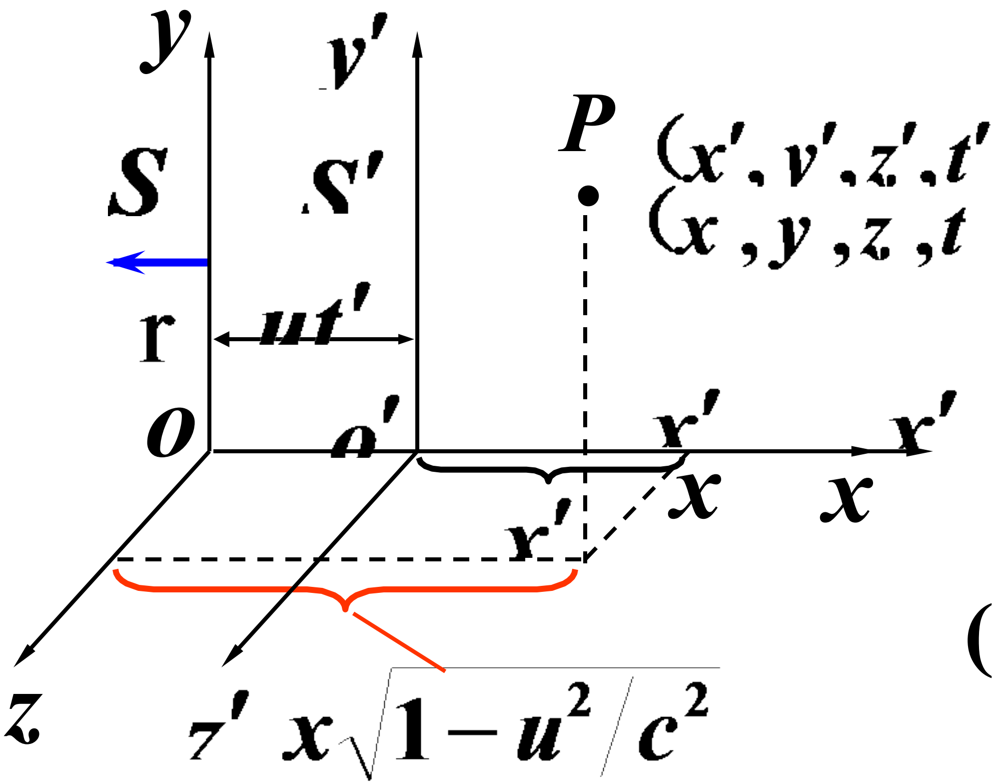
$\vec{u} = u\vec{i} = \text{const}$

且 $o'$ 与 $o$ 重叠时，

$t = 0$， $t' = 0$。

$S$ 系中测量：

$$x = ut + x'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \qquad (1)$$




$S'$ 系中测量：

$$x'=x\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}-ut' \quad (2)$$

(1)、(2)联立，得：

$$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}，\qquad t'=\frac{t-\frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}。$$

垂直运动方向上长度测量与参照系无关，

于是有：

洛仑兹变换

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

令 $\beta = \dfrac{u}{c}$ ， $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$ ， 则有：

正变换
$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \dfrac{\beta}{c}x) \end{cases}$$

逆变换
$$\begin{cases} x = \gamma(x' + ut') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \dfrac{\beta}{c}x) \end{cases}$$

**例3：用洛伦兹变换阐明固有长度最长。**

**例4：用洛伦兹变换阐明固有时最短。**

**几点讨论与阐明：**

**1. $u \ll c$时，洛仑兹变换过渡到伽里略变换。**

**2. $c$ 为一切可作为参照系的物体的极限速率，**

**即两个物体之间的相对速度只能不大于$c$ 。**

**3.时序变换与因果律：**

时空测量的相对性是否会变化因果律呢？

设两事件$P_1$、$P_2$在 $S$ 和 $S'$系中的时空坐标为

$$S\text{：}\quad P_1(x_1,\ t_1),\ P_2(x_2,\ t_2)$$

$$S'\text{：}\quad P_1(x_1',\ t_1'),\ P_2(x_2',\ t_2')$$

由洛仑兹变换有：

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma\left[\left(t_2 - \frac{u}{c^2}x_2\right) - \left(t_1 - \frac{u}{c^2}x_1\right)\right]$$

$$= \gamma(t_2 - t_1)\left[1 - \frac{u}{c^2}\cdot\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right]$$

$$= \gamma\,\Delta t\left(1 - \frac{u}{c^2}\cdot v_s\right),\quad v_s = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

若$P_1$为因，$P_2$是果，则 $v_s \le c$ ，又 $u < c$ ，

$\therefore\quad 1 - \frac{u}{c^2}v_s > 0 \longrightarrow \Delta t'$ 和 $\Delta t$ 同号。

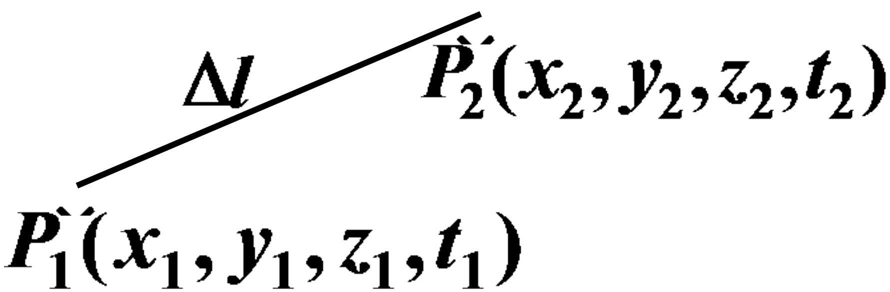
有因果的事件在不同参照系中因果关系不变。

若$P_1$、$P_2$为相互独立事件， 则可能 $v_s > c$，

时序可能颠倒，但这并不违反因果律。

4. 由洛仑兹变换能够证明：

时空间隔 $\Delta S$ 为洛仑兹变换下的不变量。

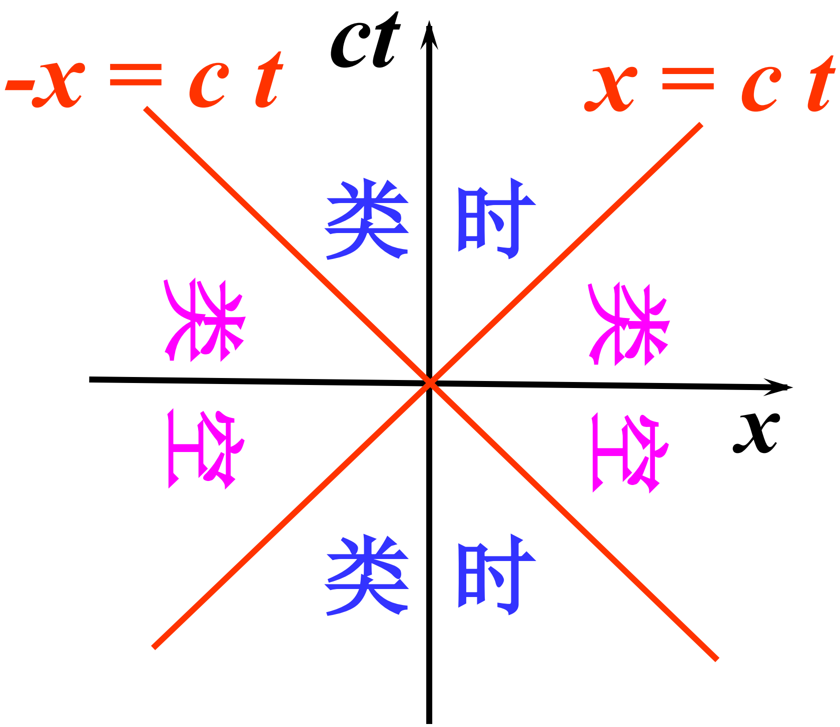



$$\Delta S = \sqrt{(c\Delta t)^2 - (\Delta l)^2} \overset{(洛)}{=} \sqrt{(c\Delta t')^2 - (\Delta l')^2} = \Delta S'$$

空间间隔： $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$

$$\Delta l' = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2}$$

▲用光信号联络的两个事件$\Delta S = 0 \; (\because \; \Delta l = c\Delta t)$




▲对有因果关系的事件：

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} < c, \quad c\Delta t > \Delta l,$$

$$(\Delta S)^2 > 0 \quad ,$$

该时空域称类时区；

▲对无因果关系的事件：

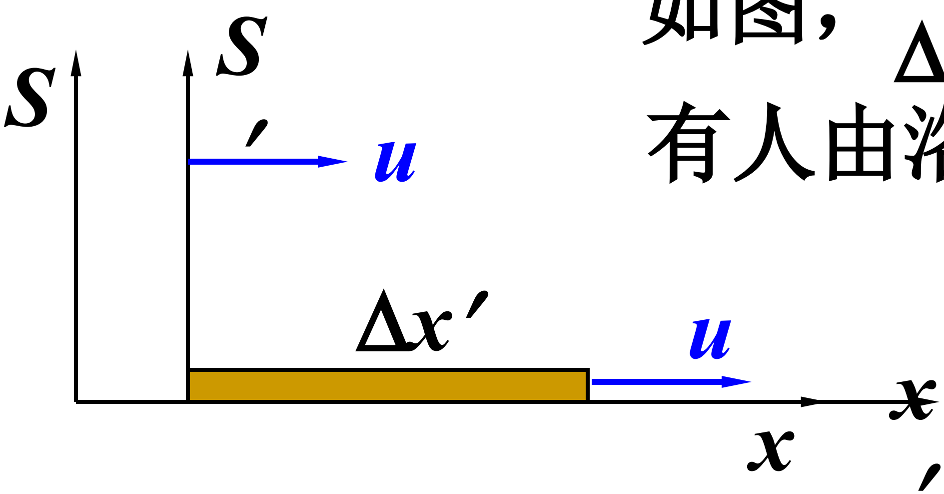
若 $\dfrac{\Delta l}{\Delta t} > c$，则 $(\Delta S)^2 < 0$，该时空域称类空区。

同一地点：$\Delta l = 0$，$\Delta t$ 为原时，$\Delta S = c\,\Delta t$

$\therefore$ 原时 $\Delta t = \Delta S / c$ 为不变量。

例5:

如图，已知 $S'$ 中棒长为 $\Delta x'$，有人由洛仑兹变换得$S$中棒长：



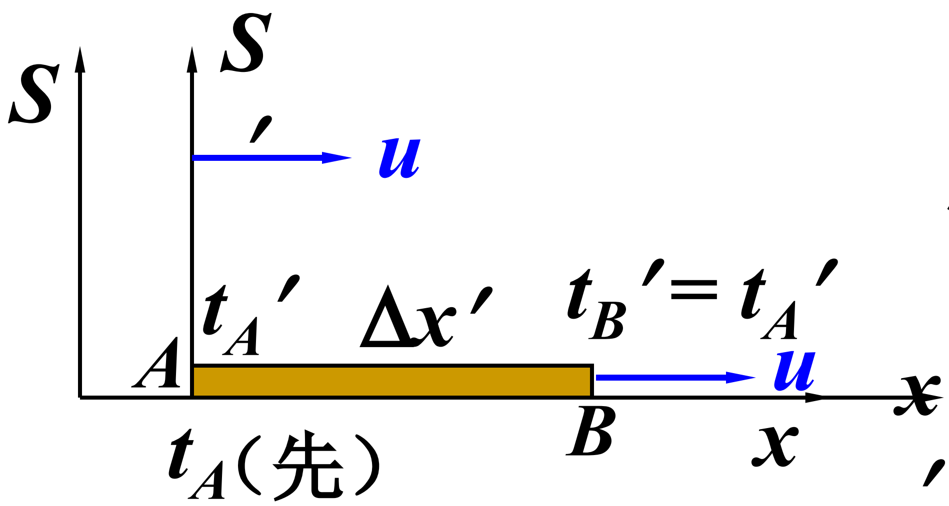

$$\Delta x=\frac{\Delta x'+u\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

令$\Delta t'=0$，得棒的动长为 $\Delta x=\dfrac{\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$，对吗？

此时的 $\Delta x$ 的意义怎样？

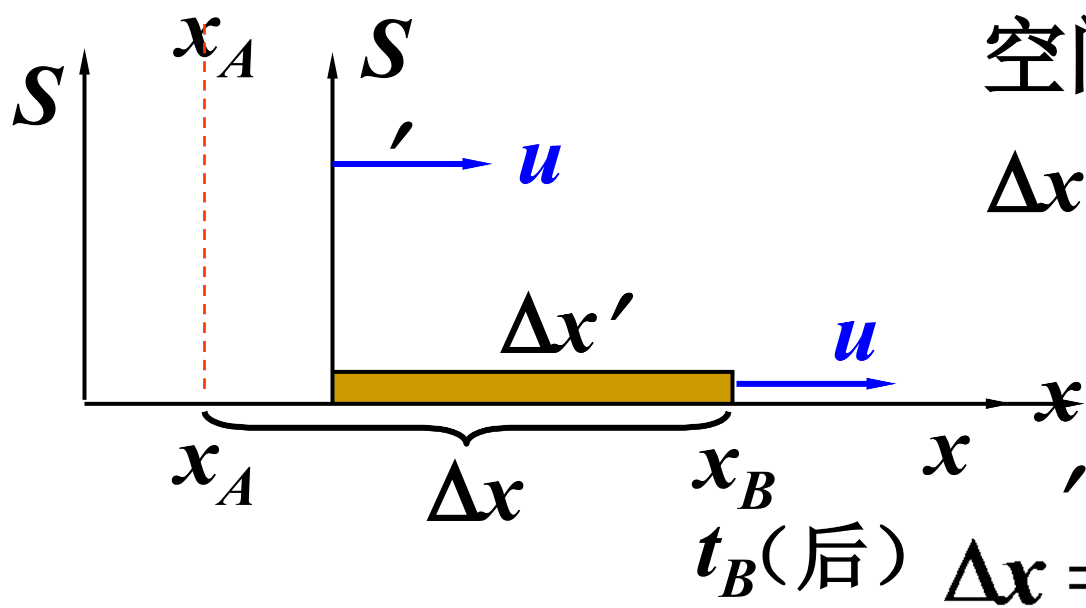
**分析：** $\Delta t' = t'_B - t'_A = 0$，必然 $\Delta t = t_B - t_A \neq 0$。

（后）（先）




所以 $\Delta x$ 不是棒的动长。

$\Delta x = x_B - x_A$ 是两个不同步刻发生的事件的空间间隔。令 $\Delta t = 0$，$\Delta x$ 才是棒的动长。




$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$$
$$= \gamma\,\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} = \Delta x'\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

动长　　　　静长