



实验目的

- 1、了解线性规划的基本内容。
- 2、掌握用数学软件包求解线性规划问题。

实验内容

- 1、两个引例。
- *2、线性规划的基本算法。
- 3、用数学软件包求解线性规划问题。
- 4、建模案例：投资的收益与风险
- 5、实验作业。

两个引例

问题一 任务分配问题：某车间有甲、乙两台机床，可用于加工三种工件。假定这两台车床的可用台时数分别为800和900，三种工件的数量分别为400、600和500，且已知用三种不同车床加工单位数量不同工件所需的台时数和加工费用如下表。问怎样分配车床的加工任务，才能既满足加工工件的要求，又使加工费用最低？

车床 类 型	单位工件所需加工台时数			单位工件的加工费用			可用台 时数
	工件 1	工件 2	工件 3	工件 1	工件 2	工件 3	
甲	0.4	1.1	1.0	13	9	10	800
乙	0.5	1.2	1.3	11	12	8	900

解 设在甲车床上加工工件1、2、3的数量分别为 x_1 、 x_2 、 x_3 ，在乙车床上加工工件1、2、3的数量分别为 x_4 、 x_5 、 x_6 。可建立以下线性规划模型：

解答

问题二： 某厂每日8小时的产量不低于1800件。为了进行质量控制，计划聘请两种不同水平的检验员。一级检验员的标准为：速度25件/小时，正确率98%，计时工资4元/小时；二级检验员的标准为：速度15小时/件，正确率95%，计时工资3元/小时。检验员每错检一次，工厂要损失2元。为使总检验费用最省，该工厂应聘一级、二级检验员各几名？

解 设需要一级和二级检验员的人数分别为 x_1 、 x_2 人，
则应付检验员的工资为：

$$8 \times 4 \times x_1 + 8 \times 3 \times x_2 = 32x_1 + 24x_2$$

因检验员错检而造成的损失为：

$$(8 \times 25 \times 2\% \times x_1 + 8 \times 15 \times 5\% \times x_2) \times 2 = 8x_1 + 12x_2$$

故目标函数为:

$$\min z = (32x_1 + 24x_2) + (8x_1 + 12x_2) = 40x_1 + 36x_2$$

约束条件为:

$$\begin{cases} 8 \times 25 \times x_1 + 8 \times 15 \times x_2 \geq 18 \\ 8 \times 25 \times x_1 \leq 1800 \\ 8 \times 15 \times x_2 \leq \\ | x \geq \end{cases}$$

线性规划模型: $\min z = 40x_1 + 36x_2$

$$s.t. \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 45 \\ x_1 \leq 9 \\ x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

[返回](#)

[解答](#)

线性规划的基本算法——单纯形法

1. 线性规划的标准形式:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & z = f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \leq 0 \quad (\end{aligned}$$

2. 线性规划的基本算法——单纯形法

用单纯法求解时，常将标准形式化为：

$$\begin{aligned} \min \quad & f = c x \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

这里 $A = (a_{ij})_{m,n}$, $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$
 $b = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)^T$, $c = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$

例 $\min z = 10x_1 + 9x_2 \text{ s. t.}$

$$6x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$10x_1 + 20x_2 \geq 150$$

$$x_1 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

引入松弛变量 x_3, x_4, x_5 , 将不等式化为等式, 即单纯形标准形:

系数矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4 \ P_5)$$

$$b = (60, 150, 8)^T$$

显然A的秩 $\text{ran}(A)=3$, 任取3个线性无关的列向量, 如 $P_3 \ P_4 \ P_5$ 称为一组**基**, 记为B. 其余列向量称为**非基**, 记为N.

将A的列向量重排次序成 $A = (B, N)$, 相应 $x = (x_B, x_N)^T$, $c = (c_B, c_N)$ 基对应的变量 x_B 称为**基变量**, 非基对应的变量 x_N 称为**非基变量**.

于是 $f = c_B x_B + c_N x_N$, $Ax = Bx_B + Nx_N = b$,

则 $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$, $f = c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N$

若可行基进一步满足: $c_N - c_B B^{-1}N \geq 0$, 即: $c_B B^{-1}N - c_N \leq 0$
则对一切可行解 x , 必有 $f(x) \geq c_B B^{-1}b$, 此时称基可行解 $x = (B^{-1}b, 0)^T$ 为**最优解**.

3. 最优解的存在性定理

定理1 如果线性规划(1)有可行解, 那么一定有基可行解.

定理2 如果线性规划(1)有最优解, 那么一定存在一个基可行解是最优解.

4. 基可行解是最优解的判定准则

因为 $f = c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N$,

即 $f = 0 \cdot x_B + (c_B B^{-1}N - c_N)x_N = c_B B^{-1}b$

若基 $B = (P_1, P_2, \dots, P_m)$, 非基 $N = (P_{m+1}, P_{m+2}, \dots, P_n)$,

令 $\lambda_j = c_B B^{-1} P_j - c_j$, $j = m+1, m+2, \dots, n$, 则 (1) 可写成

$$\min f$$

$$\text{s. t. } x_B + B^{-1}N x_N = B^{-1}b$$

$$f + 0 \cdot x_B + \sum_{j=m+1}^n \lambda_j x_j = c_B B^{-1}b$$

$$x \geq 0$$

称为 (1) 式的典式.

定理 3 设 $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 是规划 (1) 的一个可行基, B 是对应的基阵, 如果典式中的 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 都不大于零, 即对应的 $\lambda_{m+1} \leq 0, \lambda_{m+2} \leq 0, \dots, \lambda_n \leq 0$, 则基 $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 对应的基可行解 $X^0 = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 是最优解.

5. 基可行解的改进

$$\text{令 } B^{-1} b = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad B^{-1} N = \begin{pmatrix} \beta_{1,m+1} & \beta_{1,m+2} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \beta_{2,m+1} & \beta_{2,m+2} & \cdots & \end{pmatrix}$$

线性规划 (1) 的典式变为:

$$\min \quad f$$

$$\text{s. t.} \quad x_i + \sum_{j=m+1}^n \beta_{ij} x_j = \alpha_i \quad i=1, 2, \dots$$

$$f + 0 \cdot x_n$$

改进方法:

$$\text{令 } \theta_0 = \min_{\beta_{i,m+k} > 0} \left\{ \left\| \frac{\alpha_i}{\beta_{i,m+k}} \right\| \right\} = \frac{\alpha_l}{\beta_{l,m+k}}, \text{ 则把 } x_l \text{ 从原有的基中取出来,}$$

把 x_{m+k} 加进后得到的 $(x_1, x_2, \dots, x_l, x_{m+k}, x_{l+1}, \dots, x_m)$ 仍是基,
即是所要找的新基.

返回

用MATLAB优化工具箱解线性规划

1、模型： $\min z=cX$
 $s.t. \quad AX \leq b$

命令： **$x=\text{linprog}(c, A, b)$**

2、模型： $\min z=cX$
 $s.t. \quad AX \leq b$
 $Aeq \cdot X = beq$

命令： **$x=\text{linprog}(c, A, b, Aeq, beq)$**

注意：若没有不等式： $AX \leq b$ 存在，则令 $A=[]$ ， $b=[]$ 。

3、模型： $\min z=cX$

$$s.t. \quad AX \leq b$$

$$Aeq \cdot X = beq$$

$$VLB \leq X \leq VUB$$

命令： [1] **$x = \text{linprog}(c, A, b, Aeq, beq, VLB, VUB)$**

[2] **$x = \text{linprog}(c, A, b, Aeq, beq, VLB, VUB, X_0)$**

注意： [1] 若没有等式约束： $Aeq \cdot X = beq$ ，则令 $Aeq = []$, $beq = []$.

[2] 其中 X_0 表示初始点

4、命令： **$[x, fval] = \text{linprog}(\dots)$**

返回最优解 x 及 x 处的目标函数值 $fval$.

例 1 $\max \quad z = 0.4x_1 + 0.28x_2 + 0.32x_3 + 0.72x_4 + 0.64x_5 + 0.6x_6$
 $s.t. \quad 0.01x_1 + 0.01x_2 + 0.01x_3 + 0.03x_4 + 0.03x_5 + 0.03x_6 \leq 850$
 $0.02x_1 + 0.05x_4 \leq 700$
 $0.02x_2 + 0.05x_5 \leq 100$
 $0.03x_3 + 0.08x_6 \leq 900$
 $x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6$

解 编写M文件xxgh1.m如下:

c=[-0.4 -0.28 -0.32 -0.72 -0.64 -0.6];

A=[0.01 0.01 0.01 0.03 0.03 0.03;0.02 0 0 0.05 0 0;0 0.02 0 0 0.05 0;0 0 0.03 0 0 0.08];

b=[850;700;100;900];

Aeq=[]; beq=[];

vlb=[0;0;0;0;0;0]; vub=[];

[x,fval]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,vlb,vub)

To Matlab (xxgh1)

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/528027016071006023>