专题25 圆中的范围与最值问题

【考点预测】

涉及与圆有关的最值，可借助图形性质，利用数形结合求解．一般地：

（1）形如$\mu=\dfrac{y-b}{x-a}$的最值问题，可转化为动直线斜率的最值问题．

（2）形如$t=ax+by$的最值问题，可转化为动直线截距的最值问题．

（3）形如$m=(x-a)^2+(y-b)^2$的最值问题，可转化为曲线上的点到点（a，b）的距离平方的最值问题

【方法技巧与总结】

解决圆中的范围与最值问题常用的策略：

（1）数形结合

（2）多与圆心联系

（3）参数方程

（4）代数角度转化成函数值域问题

【题型归纳目录】

题型一：斜率型

题型二：直线型

题型三：距离型

题型四：周长面积型

题型五：数量积型

题型六：坐标与角度型

题型七：长度型

题型八：方程中的参数

【典例例题】

题型一：斜率型

例1．（2023·福建南平·三模）已知$P\left(m,n\right)$为圆C：$\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$上任意一点，则$\dfrac{n-1}{m+1}$的最大值为____________．

例2．（多选题）（2023·山东泰安·三模）已知实数x，y满足方程$x^2+y^2-4x-2y+4=0$，则下列说法正确的是（　　）

A．$\dfrac{y}{x}$的最大值为$\dfrac{4}{3}$　　　　B．$\dfrac{y}{x}$的最小值为0

C．x^2+y^2的最大值为$\sqrt{5}+1$　　　　D．$x+y$的最大值为$3+\sqrt{2}$

例 3．（2023·全国·高三专题练习（理））在正三角形ABC中，M为BC中点，P为三角形内一动点，且满足$PA=2PM$，则$\dfrac{PA}{PB}$最小值为（　　）

A．1　　*B*．$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　　*C*．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　*D*．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

例 4．（2023·河南·模拟预测（文））已知点$P\left(x,y\right)$在圆$\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=3$上运动，则$\dfrac{4-y}{x-3}$的最大值为（　　）

A．$-6-\sqrt{30}$　　*B*．$6+\sqrt{30}$　　*C*．$-6+\sqrt{30}$　　*D*．$6-\sqrt{30}$

题型二：直线型

例 5．（2023·全国·高三专题练习）已知点$P(x,y)$是圆$x^2+y^2-6x-4y+12=0$上的动点，则$x+y$的最大值为（　　）

A．$5+\sqrt{2}$　　*B*．$5-\sqrt{2}$　　*C*．6　　*D*．5

例 6．（2023·全国·高三开学考试（文））已知点$P\left(x,y\right)$是圆C：$\left(x-a\right)^2+y^2=3\left(a>0\right)$上的一动点，若圆$C$经过点$A\left(1,\sqrt{2}\right)$，则$y-x$的最大值与最小值之和为（　　）

A．4　　*B*．$2\sqrt{6}$　　*C*．-4　　*D*．$-2\sqrt{6}$

例 7．（2023·全国·高三专题练习）点$P(x,y)$是圆$x^2+y^2=12$上的动点，则$x+y$的最大值是________．

题型三：距离型

例 8．（2023·上海虹口·二模）设$a\in\mathrm{R}$，$k\in\mathrm{R}$，三条直线l_1：$ax-y-2a+5=0$，l_2：$x+ay-3a-4=0$，l_3：$y=kx$，则l_1与l_2的交点M到l_3的距离的最大值为________．

例 9．（2023·黑龙江·哈九中模拟预测（文））若平面内两定点A、B间的距离为 2，动点P满足$\dfrac{|PA|}{|PB|}=\sqrt{2}$，则$\dfrac{\left|PA\right|^2+\left|PB\right|^2}{2}$的最大值为______．

例 10．（2023·全国·高三专题练习）若A，B是$\odot O$：$x^2+y^2=4$上两个动点，且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2$，$A$，$B$到直线$l$：$\sqrt{3}x+y-4=0$的距离分别为$d_1$，$d_2$，则$d_1+d_2$的最大值是（　　）

A．3　　*B*．4　　*C*．5　　*D*．6

例 11．（2023 • 陕西安康 • 二模（文））已知直线l与圆$O:x^2+y^2=4$交于$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$两点，且$|AB|=2$，则$\left|x_1+y_1+4\right|+\left|x_2+y_2+4\right|$的最大值为__________.

例 12．（2023 • 全国 • 高三专题练习）已知实数x_1,x_2,y_1,y_2满足：$x_1^2+y_1^2=1$，$x_2^2+y_2^2=1$，$x_1x_2+y_1y_2=0$，则$\frac{\left|x_1+y_1-1\right|}{\sqrt{2}}+\frac{\left|x_2+y_2-1\right|}{\sqrt{2}}$的最大值为______.

例 13．（2023 • 河北石家庄 • 模拟预测）若点P在曲线$x^2+y^2=|x|+|y|$上运动，则点P到直线$x+y+2=0$的距离的最大值为（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　　　*B*．2　　　　*C*．$\sqrt{2}$　　　　*D*．4

例 14．（2023 • 浙江 • 模拟预测）在平面直角坐标系中，直线$y=kx+m(k\neq 0)$与x轴和y轴分别交于A，B两点，$|AB|=2\sqrt{2}$，若$CA\perp CB$，则当k，m变化时，点C到点$(1,1)$的距离的最大值为（　　）

A．$4\sqrt{2}$　　　　*B*．$3\sqrt{2}$　　　　*C*．$2\sqrt{2}$　　　　*D*．$\sqrt{2}$

例 15．（2023 • 浙江 • 高三专题练习）已知点$P(-1,0)$，圆$(x-1)^2+y^2=9$上的两个不同的点$A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$满足$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}(\lambda\in\mathrm{R})$，则$\left|4x_1+3y_1-25\right|+\left|4x_2+3y_2-25\right|$的最大值为（　　）

A．12　　　　*B*．18　　　　*C*．60　　　　*D*．$\frac{27}{2}$

例 16．（2023 • 江西 • 宁冈中学高三开学考试（理））已知点$P(x,y)$在圆$x^2+y^2=1$上，则$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$的最大值为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　　　*B*．$2\sqrt{2}$　　　　*C*．1　　　　*D*．$\sqrt{2}+1$

例 17．（2023 • 河北衡水 • 二模）在平面直角坐标系xOy中，点A在x轴上，点B在y轴上，$|AB|=2$，点C满足$AC\perp BC$，则点C到点$P\left(\sqrt{3},1\right)$的距离的最大值为（　　）

A．3　　　　*B*．$\frac{7}{2}$　　　　*C*．5　　　　*D*．4

例 18．（2023 • 全国 • 高三专题练习）若x、a、b为任意实数，若$(a+1)^2+(b-2)^2=1$，则$(x-a)^2+(\ln x-b)^2$最小值为（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．9　　C．$9-4\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{2}-1$

例 19．（2023·辽宁·东北育才学校二模）已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，满足$\forall x\in R,\left|\vec{a}-x\vec{b}\right|\geq\left|\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}\right|$，$\left|\vec{a}\right|=2,\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-2\vec{c}\right)=6$，则$\left|\vec{a}-\vec{c}\right|$的最小值为（　　）

A．1　　B．$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$　　C．3　　D．$\frac{\sqrt{6}-2}{2}$

例 20．（2023·河南河南·三模（理））已知M，N为圆C：$x^2+y^2-2x-4y=0$上两点，且$|MN|=4$，点P在直线l：$x-y+3=0$上，则$\left|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}\right|$的最小值为（　　）

A．$2\sqrt{2}-2$　　B．$2\sqrt{2}$

C．$2\sqrt{2}+2$　　D．$2\sqrt{2}-\sqrt{5}$

例 21．（2023·全国·高三专题练习）若平面内两定点A，B间的距离为2，动点P满足$\frac{|PA|}{|PB|}=\sqrt{3}$，则$\frac{1}{2}$（$|PA|^2+|PB|^2$）的最大值为（　　）

A．$3+\sqrt{3}$　　B．$7+4\sqrt{3}$

C．$8+4\sqrt{3}$　　D．$16+8\sqrt{3}$

例 22．（2023·全国·高三专题练习）已知P是半圆C：$\sqrt{2y-y^2}=-x$上的点，Q是直线$x-y-1=0$上的一点，则$|PQ|$的最小值为（　　）

A．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B．$\sqrt{2}-1$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}-1$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

例 23．（2023·全国·高三专题练习）若M，N分别为圆C_1：$(x+6)^2+(y-5)^2=4$与圆C_2：$(x-2)^2+(y-1)^2=1$上的动点，P为直线$x+y+5=0$上的动点，则$|PM|+|PN|$的最小值为（　　）

A．$4\sqrt{5}-3$　　B．6　　C．9　　D．12

例 24．（2023·全国·模拟预测（理））过圆C：$(x-1)^2+y^2=1$外一点P作圆C的两条切线PA、PB，切点分别为A、B，若$PA\perp PB$，则点P到直线$l:x+y-5=0$的距离的最小值为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$3\sqrt{2}$

题型四：周长面积型

例 25．（2023•全国•高三专题练习）已知点 A（2，0），B（0，﹣1），点 P 是圆 $x^2+（y-1）^2=1$ 上任意一点，则△PAB 面积最大值为（　　）

A．2　　B．$4+\sqrt{5}$　　C．$1+\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D．$2+\frac{\sqrt{5}}{2}$

例 26．（2023•河南安阳•模拟预测（文））已知圆 $C:(x-2)^2+(y-6)^2=4$，点 M 为直线 $l:x-y+8=0$ 上一个动点，过点 M 作圆 C 的两条切线，切点分别为 A，B，则四边形 $CAMB$ 周长的最小值为（　　）

A．8　　B．$6\sqrt{2}$　　C．$5\sqrt{2}$　　D．$2+4\sqrt{2}$

例 27．（2023•全国•高三专题练习）已知圆 $C:(x-2)^2+(y-6)^2=4$，点 M 为直线 $l:x-y+8=0$ 上一个动点，过点 M 作圆 C 的两条切线，切点分别为 A，B，则当四边形 $CAMB$ 周长取最小值时，四边形 $CAMB$ 的外接圆方程为（　　）

A．$(x-7)^2+(y-1)^2=4$　　B．$(x-1)^2+(y-7)^2=4$

C．$(x-7)^2+(y-1)^2=2$　　D．$(x-1)^2+(y-7)^2=2$

例 28．（2023•全国•高三专题练习）在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 与圆 $O:x^2+y^2=1$ 外切，且与直线 $x-\sqrt{3}y+4=0$ 相切，则圆 C 的面积的最小值为（　　）

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．π　　C．$\frac{\pi}{9}$　　D．2π

例 29．（2023•北京昌平•二模）已知直线 $l:ax-y+1=0$ 与圆 $C:(x-1)^2+y^2=4$ 相交于两点 A,B，当 a 变化时，$\triangle ABC$ 的面积的最大值为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

例 30．（2023•河南•高三阶段练习(理)）已知直线 $l_1:mx-y=0(m\in R)$ 过定点A，直线 $l_2:x+my+4-2m=0$ 过定点 B，l_1 与 l_2 的交点为 C，则 $\vee ABC$ 面积的最大值为（　　）

A．$\sqrt{10}$　　B．$2\sqrt{5}$

C．5　　D．10

题型五：数量积型

例 31．（2023•全国•高三专题练习）已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，以 B 为圆心的圆与直线 AC 相切．若点 P 是圆 B 上的动点，则 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的最大值是________．

例 32．（2023•辽宁大连•二模）已知 $A(4,0)$，$B(0,-6)$，点 P 在曲线 $y=1-\sqrt{1-x^2}$ 上，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$

的最小值为____________.

例 33．（2023·全国·高三专题练习）已知半径为 1 的圆 O 上有三个动点 A,B,C，且 $|AB|=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的最小值为______.

例 34．（多选题）（2023·福建龙岩·模拟预测）已知圆 $P:(x-5)^2+(y-2)^2=4$，直线 $l:y=ax$，点 $M(5,4)$，则（　　）

A．当 $a=\frac{4}{5}$ 时，直线 l 与圆 P 相切

B．若直线 l 平分圆 P 的周长，则 $a=\frac{2}{5}$

C．若直线 l 上存在点 A，使得 $\angle PAM=90°$，则 a 的最大值为 $\frac{15+\sqrt{33}}{24}$

D．当 $a=2$ 时，N 为直线 l 上的一个动点，则 $\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{MN}$ 的最小值为 $\frac{44}{5}$

例 35．（多选题）（2023·湖北武汉·模拟预测）已知圆 M：$(x-4)^2+(y-5)^2=12$，直线 l：$mx-y-2m+3=0$，直线 l 与圆 M 交于 A，C 两点，则下列说法正确的是（　　）

A．直线 l 恒过定点 $(2,3)$

B．$|\overrightarrow{AC}|$ 的最小值为 4

C．$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}$ 的取值范围为 $[-12,4]$

D．当 $\angle AMC$ 最小时，其余弦值为 $\frac{1}{2}$

例 36．（多选题）（2023·湖北·模拟预测）若动直线 $l:mx-y+4-4m=0$ 与圆 $C:(x-4)^2+(y-5)^2=9$ 相交于 A,B 两点，则（　　）

A．$|AB|$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$

B．$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的最大值为 -7

C．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$（$O$ 为坐标原点）的最大值为 78

D．$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的最大值为 18

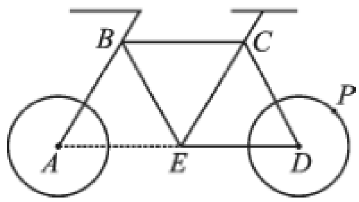
例 37．（2023·全国·高三专题练习）已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F，$M(4,3\sqrt{5})$，直线 MF 与 y 轴交于点 N，点 P 为双曲线上一动点，且 $|y_p|<3\sqrt{5}$，直线 MP 与以 MN 为直径的圆交于点 M、Q，则 $|PM|\cdot|PQ|$ 的最大值为（　　）

A．48　　　　*B*．49　　　　*C*．50　　　　*D*．42

例 38．（2023·全国·高三专题练习）已知点 M 为椭圆 $\dfrac{x^2}{27}+\dfrac{y^2}{26}=1$ 上任意一点，A，B 是圆 $(x-1)^2+y^2=8$ 上两点，且 $AB=4\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 的最大值与最小值的和是（　　）

A．20　　　　*B*．$12\sqrt{3}$　　　　*C*．40　　　　*D*．$48\sqrt{3}$

例 39．（2023·河南开封·二模（文））骑行是一种能有效改善心肺功能的耐力性有氧运动，深受大众喜爱．如图是某一自行车的平面结构示意图，已知图中的圆 A（前轮），圆 D（后轮）的半径均为 $\sqrt{3}$，$\triangle ABE$，$\triangle BEC$，$\triangle ECD$ 均是边长为 4 的等边三角形，设点 P 为后轮上一点，则在骑行该自行车的过程中，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CP}$ 达到最大值时点 P 到地面的距离为（　　）



A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　*B*．$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　　　*C*．$\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}$　　　　*D*．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{3}$

题型六：坐标与角度型

例 40．（2023·全国·高三专题练习）已知 x，y 满足 $x^2+y^2=4y-3$，则 $\dfrac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的最大值为（　　）

A．1　　　　*B*．2　　　　*C*．$\sqrt{3}$　　　　*D*．$\sqrt{5}$

例 41．（2023·福建泉州·模拟预测）若圆 $M:(x-\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=1$（$0\le\theta<2\pi$）与圆 $N:x^2+y^2-2x-4y=0$ 交于 A、B 两点，则 $tan\angle ANB$ 的最大值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　　　*B*．$\dfrac{3}{4}$　　　　*C*．$\dfrac{4}{5}$　　　　*D*．$\dfrac{4}{3}$

例 42．（2023·全国·高三专题练习）已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 是非零平面向量，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$，$(\sqrt{2}\vec{c}-\vec{b})\cdot\vec{b}=0$，$|\vec{b}|=|\vec{c}|$，则 $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|}$ 的最大值是_________.

例 43．（2023·全国·高三专题练习（理））已知圆 $C:(x-1)^2+(y+2\sqrt{2})^2=16$ 和两点 $A(0,-m)$、$B(0,m)$

，若圆C上存在点P，使得$AP\perp BP$，则m的最大值为（　　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

例 44．（多选题）（2023·河北·高三阶段练习）已知圆$C:x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1$上两点$A$、$B$满足$|AB|\geq\sqrt{2}$，点$M\left(x_0,0\right)$满足：$|MA|=|MB|$，则下列结论中正确的是（　　）

A．当$|AB|=\sqrt{2}$时，$x_0=\frac{1}{2}$

B．当$x_0=0$时，过M点的圆C的最短弦长是$2\sqrt{3}$

C．线段AB的中点纵坐标最小值是$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

D．过M点作图C的切线且切点为A，B，则x_0的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{7}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{7}}{2},+\infty\right)$

例 45．（2023·全国·高三专题练习）已知直线$kx-y+2k=0$与直线$x+ky-2=0$相交于点P，点$A\left(4,0\right)$，O为坐标原点，则$\tan\angle OAP$的最大值为（　　）

A．$2-\sqrt{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．1　　D．$\sqrt{3}$

例 46．（2023·北京·北大附中高三开学考试）已知圆C：$\left(x-2\right)^2+\left(y-2\right)^2=r^2\left(r>0\right)$和两点$M\left(-1,0\right)$，$N\left(1,0\right)$，且圆$C$上有且只有一个点$P$满足$\angle MPN=90°$，则$r$的最大值为（　　）

A．$2\sqrt{2}-1$　　B．3　　C．$2\sqrt{2}+1$　　D．5

例 47．（2023·全国·二模（理））动圆M经过坐标原点，且半径为1，则圆心M的横纵坐标之和的最大值为（　　）

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

例 48．（2023·湖北·房县第一中学模拟预测）已知O为坐标原点，点$A\left(\cos\alpha,\sin\alpha\right)$，$B\left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right),\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right)$，以$OA,OB$为邻边作平行四边形$AOBP$，$Q\left(-2,0\right)$，则$\angle PQO$的最大值为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

例 49．（2023·江西·上饶市第一中学模拟预测（理））已知$P\left(3,4-2\sqrt{2}\right)$，过点$P$作圆$C:\left(x-a\right)^2+\left(y-a-1\right)^2=1$（$a$为参数，且$a\in\mathbf{R}$）的两条切线分别切圆$C$于点A、$B$，则$\sin\angle APB$的最大值为（　　）

A．1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

例 50．（2023·江苏苏州·高三阶段练习）已知x，y满足$x^2+y^2=6y-6$，则$\dfrac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$的最大值为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{3}$　　C．$1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

例 51．（2023·全国·高三专题练习）已知圆C：$x^2+y^2=4$，M、N是直线l：$y=x+4$上的两点，若对线段MN上任意一点P，圆C上均存在两点A、B，使得$\cos\angle APB=\frac{1}{2}$，则线段$MN$长度的最大值为（　　）

A．2　　B．4　　C．$4\sqrt{2}$　　D．$4\sqrt{3}$

题型七：长度型

例 52．（2023·上海·高三阶段练习）古希腊数学家阿波罗尼斯在他的巨著《圆锥曲线论》中有一个著名的几何问题：在平面上给定两点A、B，动点P满足$|PA|=\lambda|PB|$（其中λ是正常数，且$\lambda\neq1$），则P的轨迹是一个圆，这个圆称之为“阿波罗尼斯圆”．现已知两定点$M(-1,0)$、$N(2,1)$，P是圆$O:x^2+y^2=3$上的动点，则$\sqrt{3}|PM|+|PN|$的最小值为__________

例 53．（2023·全国·高三专题练习）已知圆C是以点$M\left(2,2\sqrt{3}\right)$和点$N\left(6,-2\sqrt{3}\right)$为直径的圆，点$P$为圆$C$上的动点，若点$A\left(2,0\right)$，点$B\left(1,1\right)$，则$2|PA|-|PB|$的最大值为（　　）

A．$\sqrt{26}$　　B．$4+\sqrt{2}$　　C．$8+5\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{2}$

例 54．（2023·浙江·高三专题练习）已知圆$C_1:\left(x-1\right)^2+\left(y+1\right)^2=1$，圆$C_2:\left(x-4\right)^2+\left(y-5\right)^2=9$，点$M$、$N$分别是圆$C_1$、圆$C_2$上的动点，点$P$为$x$轴上的动点，则$|PN|-|PM|$的最大值是（　　）

A．$2\sqrt{5}+4$　　B．9　　C．7　　D．$2\sqrt{5}+2$

例 55．（2023·广东·汕头市第一中学高三阶段练习）已知A，B是曲线$|x|-1=\sqrt{4-\left(y-1\right)^2}$上两个不同的点，$C\left(0,1\right)$，则$|CA|+|CB|$的最大值与最小值的比值是（　　）

A．$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　*B*．$\sqrt{2}$　　*C*．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　*D*．$\sqrt{3}$

例 56．（2023·安徽·合肥市第八中学模拟预测（理））已知曲线$E:x^2+y^2=1$，等边三角形ABC的两个顶点*A*，*B*在*E*上，顶点*C*在*E*外，*O*为坐标原点，则线段OC长的最大值为（　　）

A．3　　*B*．$2\sqrt{2}$　　*C*．$\sqrt{3}$　　*D*．2

例 57．（2023·河南新乡·三模（理））已知抛物线$y^2=16x$的焦点为*F*，*P*点在抛物线上，*Q*点在圆$C:(x-6)^2+(y-2)^2=4$上，则$|PQ|+|PF|$的最小值为（　　）

A．4　　*B*．6　　*C*．8　　*D*．10

例 58．（2023·北京西城·一模）已知点A为圆$C:(x-m)^2+(y-m-1)^2=2$上一点，点$B(3,0)$，当m变化时，线段AB长度的最小值为（　　）

A．1　　*B*．2　　*C*．$\sqrt{2}$　　*D*．$2\sqrt{2}$

例 59．（2023·河北·石家庄二中模拟预测）已知P为抛物线$C:y^2=8x$上的动点，Q为直线$l:x-y+4=0$上的动点，过点P作圆$E:(x-3)^2+y^2=8$的切线，切点为A，则$|PQ|+|PA|$的最小值为（　　）

A．$\sqrt{2}+1$　　*B*．$2\sqrt{2}-1$　　*C*．$3\sqrt{2}-1$　　*D*．$3\sqrt{2}-2$

例 60．（2023·全国·模拟预测）已知直线 l 过点$A\left(1,\sqrt{2}\right)$，则直线 l 被圆*O*：$x^2+y^2=12$截得的弦长的最小值为（　　）

A．3　　*B*．6　　*C*．$3\sqrt{3}$　　*D*．$6\sqrt{3}$

例 61．（2023·安徽马鞍山·三模（文））已知$P(m,n)$为抛物线*C*：$y^2=16x$上一动点，过*C*的焦点*F*作eP：$(x-m)^2+(y-n)^2=1$的切线，切点为*A*，则线段*FA*长度的最小值为（　　）

A．3　　*B*．$\sqrt{15}$　　*C*．$\sqrt{7}$　　*D*．$3\sqrt{7}$

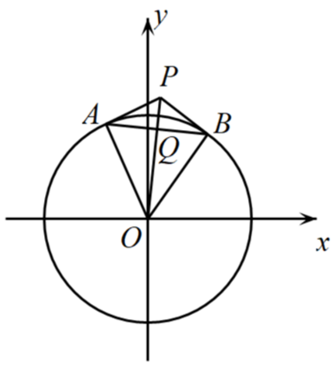
例 62．（2023·全国·高三专题练习（文））已知圆$C_1:(x-1)^2+(y-1)^2=1$，圆$C_2:(x-4)^2+(y-5)^2=9$，点M,N分别是圆C_1、圆C_2上的动点，点P为$y=-x$上的动点，则$|PM|+|PN|$的最小值是（　　）

A．4　　*B*．$\sqrt{61}-4$　　*C*．$\sqrt{61}+4$　　*D*．$\sqrt{61}-8$

例 63．（2023・全国・模拟预测（理））已知圆 C：$x^2+y^2-2x-3=0$，若直线 l：$ax-y+1-a=0$ 与圆 C 相交于 A，B 两点，则$|AB|$的最小值为（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　　　B．$2\sqrt{3}$　　　　C．3　　　　D．$\frac{5}{2}$

例 64．（2023・全国・高三专题练习）如图，P 为圆 O：$x^2+y^2=4$ 外一动点，过点 P 作圆 O 的切线 PA，PB，切点分别为 A，B，$\angle APB=120°$，直线 OP 与 AB 相交于点 Q，点 M（3，$\sqrt{3}$），则$|MQ|$的最小值为（　　）



A．$\sqrt{3}$　　　　B．2　　　　C．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　　　D．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

例 65．（2023・全国・高三专题练习）已知直线l：$mx-y-3m+1=0$恒过点P，过点P作直线与圆 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=25$相交于 A，B 两点，则$|AB|$的最小值为（　　）

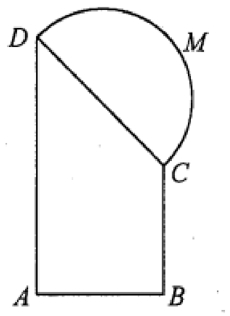
A．$4\sqrt{5}$　　　　B．2　　　　C．4　　　　D．$2\sqrt{5}$

题型八：方程中的参数

例 66．（2023・山东・烟台二中模拟预测）已知过点$\left(1,\sqrt{3}\right)$的动直线 l 与圆 C：$x^2+y^2=16$交于 A，B 两点，过 A，B 分别作 C 的切线，两切线交于点 N．若动点$M\left(\cos\theta,\sin\theta\right)\left(0\le\theta<2\pi\right)$，则$|MN|$的最小值为（　　）

A．6　　　　B．7　　　　C．8　　　　D．9

例 67．（2023・河北・模拟预测）如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$A=B=90°,AD=4,AB=BC=2$，点 M 在以CD为直径的半圆上，且满足$\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}$，则$m+n$的最大值为（　　）



A．2　　　B．3　　　C．$-\frac{5}{2}$　　　D．$\frac{\sqrt{10}+5}{4}$

例 68．（2023·全国·高三专题练习（理））已知$O(0,0)$，$P(\sqrt{3},1)$，$Q(1+4\cos\theta,\sqrt{3}-4\sin\theta)$，$\theta\in[0,2\pi]$，则$\triangle OPQ$面积的最大值为（　　）

A．4　　　B．5　　　C．$5\sqrt{3}$　　　D．$\frac{8}{3}\sqrt{3}$

例 69．（2023·全国·模拟预测（文））在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，$AB=AC=2$，点M在$\triangle ABC$内部，$\cos\angle AMC=-\frac{3}{5}$，则$MB^2-MA^2$的最小值为______．

专题 25 圆中的范围与最值问题

【考点预测】

涉及与圆有关的最值，可借助图形性质，利用数形结合求解．一般地：

（1）形如 $\mu=\dfrac{y-b}{x-a}$ 的最值问题，可转化为动直线斜率的最值问题．

（2）形如 $t=ax+by$ 的最值问题，可转化为动直线截距的最值问题．

（3）形如 $m=(x-a)^2+(y-b)^2$ 的最值问题，可转化为曲线上的点到点（a，b）的距离平方的最值问题

【方法技巧与总结】

解决圆中的范围与最值问题常用的策略：

（1）数形结合

（2）多与圆心联系

（3）参数方程

（4）代数角度转化成函数值域问题

【题型归纳目录】

题型一：斜率型

题型二：直线型

题型三：距离型

题型四：周长面积型

题型五：数量积型

题型六：坐标与角度型

题型七：长度型

题型八：方程中的参数

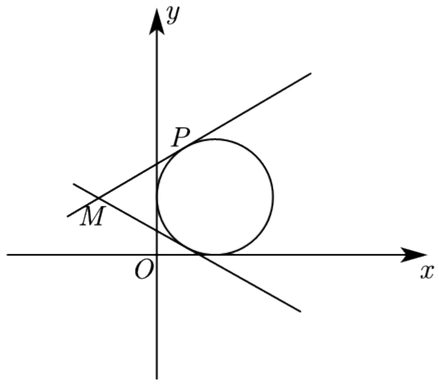
【典例例题】

题型一：斜率型

例 1．（2023・福建南平・三模）已知 $P(m,n)$ 为圆 C：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上任意一点，则 $\dfrac{n-1}{m+1}$ 的最大值为___________．

答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】



由于$\dfrac{n-1}{m+1}=\dfrac{n-1}{m-(-1)}$，故$\dfrac{n-1}{m+1}$表示$P(m,n)$和$(-1,1)$连线的斜率，设$M(-1,1)$，如图所示，

当MP与圆相切时，$\dfrac{n-1}{m+1}$取得最大值，

设此时$MP: y-1=k(x+1)$，即$kx-y+k+1=0$，又圆心$(1,1)$，半径为1，故$\dfrac{|k-1+k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，

解得$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故$\dfrac{n-1}{m+1}$的最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

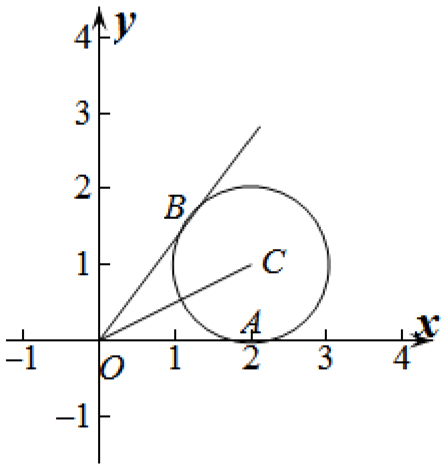
例 2．（多选题）（2023·山东泰安·三模）已知实数x，y满足方程$x^2+y^2-4x-2y+4=0$，则下列说法正确的是（　　）

A．$\dfrac{y}{x}$的最大值为$\dfrac{4}{3}$　　　　B．$\dfrac{y}{x}$的最小值为0

C．x^2+y^2的最大值为$\sqrt{5}+1$　　　　D．$x+y$的最大值为$3+\sqrt{2}$

答案：*ABD*

【解析】由实数x，y满足方程$x^2+y^2-4x-2y+4=0$可得点(x,y)在圆$(x-2)^2+(y-1)^2=1$上，作其图象如下，



因为 $\frac{y}{x}$ 表示点 (x,y) 与坐标原点连线的斜率，

设过坐标原点的圆的切线方程为 $y=kx$，则 $\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得：$k=0$ 或 $k=\frac{4}{3}$，

$\therefore \frac{y}{x}\in\left[0,\frac{4}{3}\right]$，$\therefore \left(\frac{y}{x}\right)_{\max}=\frac{4}{3}$，$\left(\frac{y}{x}\right)_{\min}=0$，$A$，$B$ 正确；

x^2+y^2 表示圆上的点 (x,y) 到坐标原点的距离的平方，圆上的点 (x,y) 到坐标原点的距离的最大值为 $|OC|+1$，

所以 x^2+y^2 最大值为 $(|OC|+1)^2$，又 $|OC|=\sqrt{2^2+1^2}$，

所以 x^2+y^2 的最大值为 $6+2\sqrt{5}$，C 错，

因为 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 可化为 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$，

故可设 $x=2+\cos\theta$，$y=1+\sin\theta$，

所以 $x+y=2+\cos\theta+1+\sin\theta=3+\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，

所以当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，即 $x=2+\frac{\sqrt{2}}{2},y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 $x+y$ 取最大值，最大值为 $3+\sqrt{2}$，D 对，

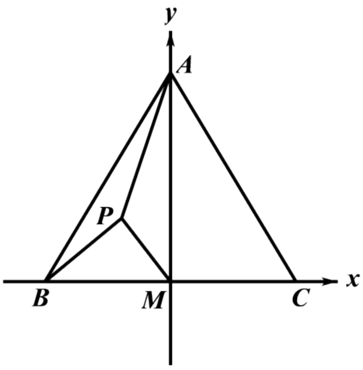
故选：ABD.

例 3．（2023·全国·高三专题练习（理））在正三角形 ABC 中，M 为 BC 中点，P 为三角形内一动点，且满足 $PA=2PM$，则 $\frac{PA}{PB}$ 最小值为（　　）

A．1　　B．$\frac{\sqrt{6}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案：D

【解析】以 M 为坐标原点，$\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}$ 正方向为 x,y 轴，可建立如图所示平面直角坐标系，



不妨设正三角形 ABC 的边长为 2，则 $A\left(0,\sqrt{3}\right)$， $M\left(0,0\right)$， $B\left(-1,0\right)$，

设 $P\left(x,y\right)$，则 $PA^2=x^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2$， $PM^2=x^2+y^2$，

$\because PA=2PM$， $\therefore PA^2=4PM^2$，

$\therefore x^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=4x^2+4y^2$，即 $x^2+y^2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}y-1=0$；

$\therefore P$ 点轨迹为： $x^2+\left(y+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{4}{3}\left(y>0\right)$，

$$\frac{PA^2}{PB^2}=\frac{4PM^2}{PB^2}=\frac{4\left(x^2+y^2\right)}{\left(x+1\right)^2+y^2}=\frac{4\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2+2x+1}=\frac{4}{1+\dfrac{2x+1}{x^2+y^2}}=\frac{4}{1+\dfrac{2x+1}{1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}y}}=\frac{4}{1-\dfrac{\sqrt{3}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}{\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}};$$

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时， $\dfrac{PA^2}{PB^2}=4$， $\therefore \dfrac{PA}{PB}=2$；

当 $x\neq-\dfrac{1}{2}$ 时，令 $t=\dfrac{y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{x+\dfrac{1}{2}}$，则 t 表示 $P\left(x,y\right)$ 与 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 连线的斜率，

设直线 $y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=k\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ 与圆 $x^2+\left(y+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{4}{3}$ 相切，

则圆心到直线距离 $d=\dfrac{\left|k+\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{4k^2+4}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，解得： $k=-\dfrac{3\sqrt{3}}{13}$ 或 $k=\sqrt{3}$，

$\therefore t\in\left(-\infty,-\dfrac{3\sqrt{3}}{13}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right)$，

则当 $t=-\dfrac{3\sqrt{3}}{13}$ 时， $\dfrac{PA^2}{PB^2}$ 取得最小值 $\dfrac{3}{4}$， $\therefore \left(\dfrac{PA}{PB}\right)_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

综上所述：$\frac{PA}{PB}$最小值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$．

故选：D．

例4．（2023·河南·模拟预测（文））已知点$P\left(x,y\right)$在圆$\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=3$上运动，则$\frac{4-y}{x-3}$的最大值为（　　）

A．$-6-\sqrt{30}$　　B．$6+\sqrt{30}$　　C．$-6+\sqrt{30}$　　D．$6-\sqrt{30}$

答案：C

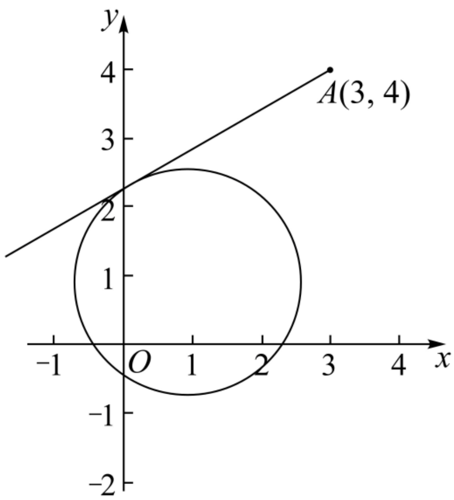
【解析】$\frac{4-y}{x-3}$看作圆上的点$P\left(x,y\right)$到点$A\left(3,4\right)$的直线的斜率的相反数．

当经过点$A\left(3,4\right)$的直线与上半圆相切时，切线斜率最小，

设切线方程为$y=k\left(x-3\right)+4$，所以圆心到切线的距离等于半径，故$\frac{\left|-2k+3\right|}{1+k^2}=\sqrt{3}$，解得

$k=6\pm\sqrt{30}$，故当$k=6-\sqrt{30}$时，切线斜率最小，此时$\frac{4-y}{x-3}$最大，最大值为$-6+\sqrt{30}$，

故选：C



题型二：直线型

例5．（2023·全国·高三专题练习）已知点$P(x,y)$是圆$x^2+y^2-6x-4y+12=0$上的动点，则$x+y$的最大值为（　　）

A．$5+\sqrt{2}$　　B．$5-\sqrt{2}$　　C．6　　D．5

答案：A

【解析】由$(x-3)^2+(y-2)^2=1$，令$\begin{cases}x=3+\cos\theta\\y=2+\sin\theta\end{cases}$，则$x+y=5+\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$，

所以当$\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=1$时，$x+y$的最大值为$5+\sqrt{2}$．

故选：A

例 6．（2023·全国·高三开学考试（文））已知点$P(x,y)$是圆C：$(x-a)^2+y^2=3(a>0)$上的一动点，若圆C经过点$A(1,\sqrt{2})$，则$y-x$的最大值与最小值之和为（　　）

A．4　　　　*B*．$2\sqrt{6}$　　　　*C*．-4　　　　*D*．$-2\sqrt{6}$

答案：*C*

【解析】因为圆C：$(x-a)^2+y^2=3(a>0)$经过点$A(1,\sqrt{2})$，

$(1-a)^2+2=3$．又$a>0$，所以$a=2$，

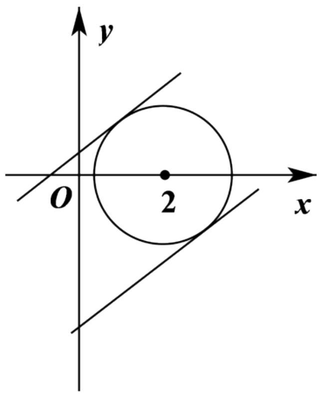
$y-x$可看成是直线$y=x+b$在y轴上的截距．如图所示，

当直线$y=x+b$与圆相切时，纵截距b取得最大值或最小值，此时$\dfrac{|2-0+b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，解得

$b=-2\pm\sqrt{6}$，

所以$y-x$的最大值为$-2+\sqrt{6}$，最小值为$-2-\sqrt{6}$，故$y-x$的最大值与最小值之和为-4．

故选：*C*．



例 7．（2023·全国·高三专题练习）点$P(x,y)$是圆$x^2+y^2=12$上的动点，则$x+y$的最大值是________．

答案：$2\sqrt{6}$

【解析】由$(x+y)^2\le 2(x^2+y^2)=24$，则$-2\sqrt{6}\le x+y\le 2\sqrt{6}$，当且仅当$x=y=\pm\sqrt{6}$时等号成立，

$\therefore x+y$的最大值是$2\sqrt{6}$．

故答案为：$2\sqrt{6}$．

题型三：距离型

例 8．（2023·上海虹口·二模）设$a\in\mathrm{R}$，$k\in\mathrm{R}$，三条直线l_1：$ax-y-2a+5=0$，l_2：$x+ay-3a-4=0$，l_3：$y=kx$，则l_1与l_2的交点M到l_3的距离的最大值为_________．

答案：$5+\sqrt{2}$【解析】因为$a\times 1+(-1)\times a=0$，所以$l_1\perp l_2$，

而直线l_1：$ax-y-2a+5=0$即$a(x-2)-y+5=0$过定点$A(2,5)$，

l_2：$x+ay-3a-4=0$即$x-4+a(y-3)=0$过定点$B(4,3)$，

所以l_1与l_2的交点M在以AB为直径的圆上，

圆方程为$(x-2)(x-4)+(y-5)(y-3)=0$，即$(x-3)^2+(y-4)^2=2$，

所以M到l_3的距离的最大值为$\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}+\sqrt{2}=5+\sqrt{2}$.

故答案为：$5+\sqrt{2}$.

例9．（2023·黑龙江·哈九中模拟预测（文））若平面内两定点A、B间的距离为2，动点P满足$\frac{|PA|}{|PB|}=\sqrt{2}$，则$\frac{|PA|^2+|PB|^2}{2}$的最大值为______.

答案：$18+12\sqrt{2}$【解析】以经过A,B的直线为x轴，线段AB的垂直平分线为y轴建立直角坐标系，

则$A(-1,0),B(1,0)$，设$P(x,y)$，由$\frac{|PA|}{|PB|}=\sqrt{2}$，

所以$\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\sqrt{2}$，两边平方并整理得$(x-3)^2+y^2=8$，

所以点P的轨迹为以$(3,0)$为圆心，$2\sqrt{2}$为半径的圆，

所以$y^2=8-(x-3)^2\left(3-2\sqrt{2}\le x\le 3+2\sqrt{2}\right)$，

则有$\frac{|PA|^2+|PB|^2}{2}=x^2+y^2+1=x^2+8-(x-3)^2+1=6x\le 18+12\sqrt{2}$，

所以$\frac{|PA|^2+|PB|^2}{2}$的最大值为$18+12\sqrt{2}$.

故答案为：$18+12\sqrt{2}$.

例10．（2023·全国·高三专题练习）若A,B是eO：$x^2+y^2=4$上两个动点，且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2$，$A$，$B$到直线$l$：$\sqrt{3}x+y-4=0$的距离分别为$d_1$，$d_2$，则$d_1+d_2$的最大值是（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

答案：D

【解析】圆O的圆心为$O(0,0)$，半径为2.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos\angle AOB=4\cos\angle AOB=-2$，

$\cos\angle AOB=-\frac{1}{2}$，

由于 $\angle AOB \in [0,\pi]$，所以 $\cos\angle AOB = \dfrac{2\pi}{3}$．

设 C 是 AB 的中点，则 $|OC| = |OB| \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} = 1$，

设 $C(x,y)$，则 $x^2+y^2=1$，即 C 的轨迹为单位圆．

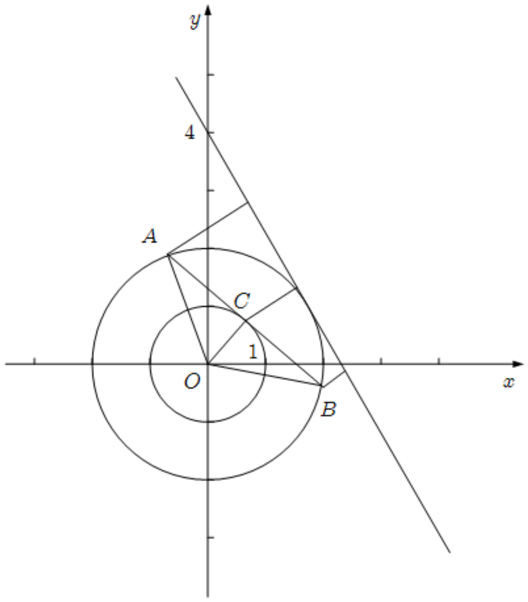
原点到直线 l 的距离为 $\dfrac{|0+0-4|}{2}=2$，

所以圆 $x^2+y^2=1$ 上的点到直线 l 的距离 $2-1 \le d \le 2+1, 1 \le d \le 3$．

所以 $d_1+d_2=2d\in[2,6]$，

所以 d_1+d_2 的最大值是 6．

故选：D



例 11．（2023•陕西安康•二模（文））已知直线 l 与圆 $O: x^2+y^2=4$ 交于 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ 两点，且 $|AB|=2$，则 $|x_1+y_1+4|+|x_2+y_2+4|$ 的最大值为____________．

答案：$8+2\sqrt{6}$【解析】$\dfrac{|x_1+y_1+4|}{\sqrt{2}}+\dfrac{|x_2+y_2+4|}{\sqrt{2}}$ 的几何意义为点 A,B 到直线 $x+y+4=0$ 的距离之和，其最大值是 AB 的中点 M 到直线 $x+y+4=0$ 的距离的 2 倍．

由题可知，VOAB 为等边三角形，则 $|OM|=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{2}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore AB$ 中点 M 的轨迹是以原点 O 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆，

故点 M 到直线 $x+y+4=0$ 的最大距离为 $\dfrac{4}{\sqrt{1^2+1^2}}+\sqrt{3}=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$，

$\therefore \dfrac{|x_1+y_1+4|}{\sqrt{2}}+\dfrac{|x_2+y_2+4|}{\sqrt{2}}$ 的最大值为 $2(2\sqrt{2}+\sqrt{3})$，

$\therefore\left|x_1+y_1+4\right|+\left|x_2+y_2+4\right|$的最大值为$2\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\times\sqrt{2}=8+2\sqrt{6}$．

故答案为：$8+2\sqrt{6}$．

例 12．（2023·全国·高三专题练习）已知实数x_1,x_2,y_1,y_2满足：$x_1^2+y_1^2=1$，$x_2^2+y_2^2=1$，$x_1x_2+y_1y_2=0$，则$\dfrac{\left|x_1+y_1-1\right|}{\sqrt{2}}+\dfrac{\left|x_2+y_2-1\right|}{\sqrt{2}}$的最大值为______.

答案：$2\sqrt{2}$

【解析】$\dfrac{\left|x_1+y_1-1\right|}{\sqrt{2}}+\dfrac{\left|x_2+y_2-1\right|}{\sqrt{2}}$的值转化为单位圆上的$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$两点到直线$x+y-1=0$的距离之和，

由$x_1x_2+y_1y_2=0$得：$\angle AOB=90^\circ$，

所以三角形AOB是等腰直角三角形，设M是AB的中点，

则$OM\perp AB$，且$\left|OM\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left|OA\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

则M在以O点为圆心，半径为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$的圆上，

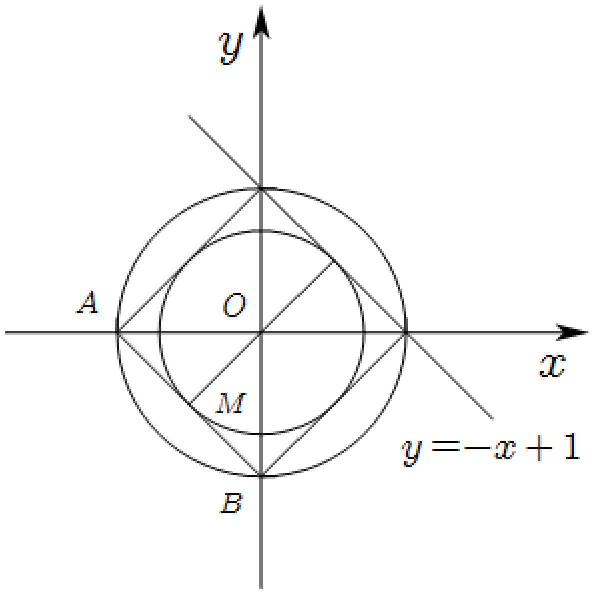
A，B两点到直线$x+y-1=0$的距离之和为AB的中点M到直线$x+y-1=0$的距离的两倍．

$\left(0,0\right)$到直线$x+y-1=0$的距离为$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以M到直线$x+y-1=0$的距离的最大值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，

所以$\dfrac{\left|x_1+y_1-1\right|}{\sqrt{2}}+\dfrac{\left|x_2+y_2-1\right|}{\sqrt{2}}$的最大值为$2\sqrt{2}$．

故答案为：$2\sqrt{2}$．



例 13．（2023•河北石家庄•模拟预测）若点 P 在曲线 $x^2+y^2=|x|+|y|$ 上运动，则点 P 到直线 $x+y+2=0$ 的距离的最大值为（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　　　*B*．2　　　　*C*．$\sqrt{2}$　　　　*D*．4

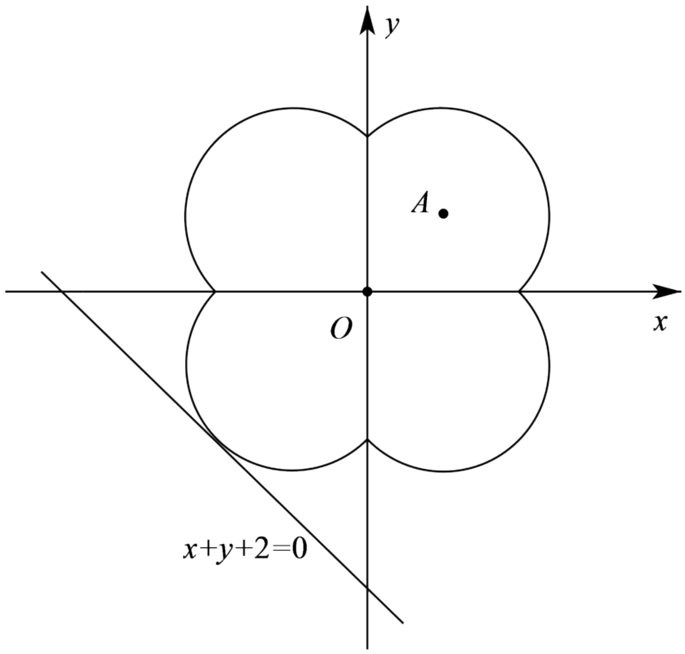
答案：*A*

【解析】由曲线方程为 $x^2+y^2=|x|+|y|$ 知曲线关于 x,y 轴成轴对称，关于原点成中心对称图形，在第一象限内，方程化为 $x^2+y^2=x+y$，即 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$，在第一象限内，曲线是 $A(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 为圆心，$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的圆在第一象限的圆弧（含坐标轴上的点），实际上整个曲线就是这段圆弧及其关于坐标轴．原点对称的图形加上原点，

点 A 到直线 $x+y+2=0$ 的距离为 $d=\frac{\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2\right|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以所求最大值为 $d+\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$．

故选：*A*．



例 14．（2023•浙江•模拟预测）在平面直角坐标系中，直线 $y=kx+m\left(k\neq 0\right)$ 与 x 轴和 y 轴分别交于 A， B 两点， $\left|AB\right|=2\sqrt{2}$，若 $CA\perp CB$，则当 k， m 变化时，点 C 到点 $\left(1,1\right)$ 的距离的最大值为（　　）

A． $4\sqrt{2}$　　B． $3\sqrt{2}$　　C． $2\sqrt{2}$　　D． $\sqrt{2}$

答案：B

【解析】由 $y=kx+m\left(k\neq 0\right)$ 得 $A(-\frac{m}{k},0),B(0,m)$ ，

故 由 $\left|AB\right|=2\sqrt{2}$ 得 $(-\frac{m}{k})^2+m^2=8$，

由 $CA\perp CB$ 得 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$， 设 $C(x,y)$ ， 则 $(x+\frac{m}{k},y)\cdot(x,y-m)=0$ ，

即 $(x+\frac{m}{2k})^2+(y-\frac{m}{2})^2=\frac{m^2}{4k^2}+\frac{m^2}{4}$， 即点 C 轨迹为一动圆，

设该动圆圆心为 (x',y') ， 则 $x'=-\frac{m}{2k},y'=\frac{m}{2}$，

整理得 $k=-\frac{y'}{x'},m=2y'$ ， 代入到 $(-\frac{m}{k})^2+m^2=8$ 中，

得： $x'^2+y'^2=2$ ， 即 C 轨迹的圆心在圆 $x'^2+y'^2=2$ 上，

故点（1，1）与该圆上的点 $(-1,-1)$ 的连线的距离加上圆的半径即为点 C 到点 $\left(1,1\right)$ 的距离的最大值，最大值为 $\sqrt{[1-(-1)]^2+[1-(-1)]^2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ ，

故选：B

例 15．（2023·浙江·高三专题练习）已知点 $P(-1,0)$，圆 $(x-1)^2+y^2=9$ 上的两个不同的点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}(\lambda\in\mathrm{R})$，则 $|4x_1+3y_1-25|+|4x_2+3y_2-25|$ 的最大值为（　　）

A．12　　*B*．18　　*C*．60　　*D*．$\dfrac{27}{2}$

答案：*C*

【解析】因 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}(\lambda\in\mathrm{R})$，则点 *A*，*P*，*B* 共线，即过点 *P* 的直线 *AB* 与圆 $(x-1)^2+y^2=9$ 交于不同的两点 *A*，*B*，

$|4x_1+3y_1-25|+|4x_2+3y_2-25|=5(\dfrac{|4x_1+3y_1-25|}{\sqrt{4^2+3^2}}+\dfrac{|4x_2+3y_2-25|}{\sqrt{4^2+3^2}})$ 表示点 A 、*B* 到直线 $3x+4y-25=0$ 的距离和的 5 倍，

设弦 *AB* 中点 $M(x_0,y_0)$，则有 $\dfrac{|4x_1+3y_1-25|}{\sqrt{4^2+3^2}}+\dfrac{|4x_2+3y_2-25|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2\cdot\dfrac{|4x_0+3y_0-25|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

于是得：$|4x_1+3y_1-25|+|4x_2+3y_2-25|=10\cdot\dfrac{|4x_0+3y_0-25|}{\sqrt{4^2+3^2}}$，

圆 $(x-1)^2+y^2=9$ 的圆心 $Q(1,0)$，显然点 *P* 在此圆内，即过点 *P* 的任意直线与圆都相交，

当点 *M* 与点 *P*，*Q* 都不重合时，由圆的性质知，$PM\perp QM$，有 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{QM}=0$，

当点 *M* 与点 *P*，*Q* 之一重合时，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{QM}=0$ 也成立，于是得 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{QM}=0$，

又 $\overrightarrow{PM}=(x_0+1,y_0),\overrightarrow{QM}=(x_0-1,y_0)$，从而得 $x_0^2+y_0^2=1$，即点 *M* 的轨迹是以原点为圆心的单位圆，

圆 $x_0^2+y_0^2=1$ 的圆心到直线 $3x+4y-25=0$ 的距离 $d=\dfrac{|-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5$，

则圆 $x_0^2+y_0^2=1$ 上的点到直线 $3x+4y-25=0$ 的距离的最大值为 $d+1=6$，

所以 $|4x_1+3y_1-25|+|4x_2+3y_2-25|$ 的最大值为 60．

故选：*C*

例 16．（2023·江西·宁冈中学高三开学考试（理））已知点 $P(x,y)$ 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，则 $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ 的最大值为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　*B*．$2\sqrt{2}$　　*C*．1　　*D*．$\sqrt{2}+1$

答案：*D*

【解析】$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ 可看作圆上的点 (x,y) 到定点 $(1,1)$ 的距离，根据圆的几何性质，其最大值为 $(1,1)$ 到圆心 $(0,0)$ 的距离与圆的半径之和，即 $\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}+1=\sqrt{2}+1$．

故选：D.

例 17.（2023·河北衡水·二模）在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 在 x 轴上，点 B 在 y 轴上，$|AB|=2$，点 C 满足 $AC\perp BC$，则点 C 到点 $P\left(\sqrt{3},1\right)$ 的距离的最大值为（　　）

A．3　　B．$\frac{7}{2}$　　C．5　　D．4

答案：D

【解析】由题意可知点 C 在以线段 AB 为直径的圆上，

设 AB 的中点坐标为 $M\left(a,b\right)$，有 $|OM|=|AM|=|BM|=1$，可得 $a^2+b^2=1$，

由 $|MP|\leqslant|OP|+1$，$|OP|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$，

有 $|CP|\leqslant|MP|+1\leqslant|OP|+1+1=2+1+1=4$.

当且仅当 O，M，P 三点共线时取等号.

故选：D

例 18.（2023·全国·高三专题练习）若 x、a、b 为任意实数，若 $(a+1)^2+(b-2)^2=1$，则 $(x-a)^2+(\ln x-b)^2$ 最小值为（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．9　　C．$9-4\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{2}-1$

答案：C

【解析】由 $(a+1)^2+(b-2)^2=1$ 可得 $\left(a,b\right)$ 在以 $\left(-1,2\right)$ 为圆心，1 为半径的圆上，

$(x-a)^2+(\ln x-b)^2$ 表示点 $\left(a,b\right)$ 与点 $\left(x,\ln x\right)$ 的距离的平方，

即表示圆 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ 上动点到函数 $y=lnx$ 图像上动点距离的平方.

设 $\left(m,\ln m\right)$ 为 $y=lnx$ 上一点，且在 $\left(m,\ln m\right)$ 处的 $y=lnx$ 的切线与 $\left(m,\ln m\right)$ 和 $\left(-1,2\right)$ 连线垂直，

可得 $\frac{\ln m-2}{m+1}\cdot\frac{1}{m}=-1$，

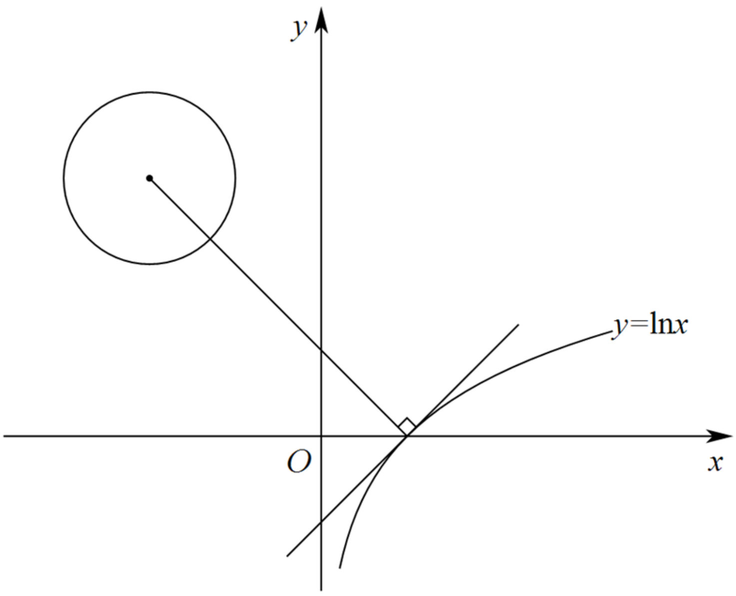
即有 $\ln m+m^2+m=2$，

由 $f\left(m\right)=\ln m+m^2+m$ 在 $m>0$ 时递增，且 $f\left(1\right)=2$，可得 $m=1$，即切点为 $\left(1,0\right)$，

圆心与切点的距离为 $d=\sqrt{(1+1)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$，

由此可得 $(x-a)^2+(\ln x-b)^2$ 的最小值为 $(2\sqrt{2}-1)^2=9-4\sqrt{2}$.

故选：C.



例 19.（2023·辽宁·东北育才学校二模）已知平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，满足 $\forall x\in \mathrm{R}$，

$\left|\vec{a}-x\vec{b}\right|\ge\left|\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}\right|$，$\left|\vec{a}\right|=2,\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-2\vec{c}\right)=6$，则 $\left|\vec{a}-\vec{c}\right|$ 的最小值为（　　）

A．1　　　　*B*．$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$　　　　*C*．3　　　　*D*．$\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$

答案：*A*

【解析】因为 $\forall x\in \mathrm{R},\left|\vec{a}-x\vec{b}\right|\ge\left|\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}\right|$，$\left|\vec{a}\right|=2,\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，

所以 $4+x^2\vec{b}^2-8x\ge 4+\frac{1}{16}\vec{b}^2-2,\vec{b}\ne\vec{0},\therefore\left(x^2-\frac{1}{16}\right)\vec{b}^2-8x+2\ge 0$，

所以 $\vec{b}^2x^2-8x+2-\frac{1}{16}\vec{b}^2\ge 0$ 对任意 x 都恒成立，

所以 $\Delta=64+\frac{1}{4}|\vec{b}|^4-8|\vec{b}|^2\le 0,\therefore(\frac{1}{2}|\vec{b}|^2-8)^2\le 0,\therefore\frac{1}{2}|\vec{b}|^2=8,\therefore|\vec{b}|=4$．

不妨设 $\vec{a}=(2,0),\vec{b}=(m,n),\therefore 2m=4,\therefore m=2,$ 又 $|\vec{b}|=4,\therefore 4+n^2=16,\therefore n=\pm 2\sqrt{3}$．

当 $\vec{b}=(2,2\sqrt{3})$，设 $\vec{c}=(x,y)$，

所以 $\left(\vec{a}-\vec{c}\right)=(2-x,-y),\left(\vec{b}-2\vec{c}\right)=(2-2x,2\sqrt{3}-2y)$，

所以 $(2-x)(2-2x)+(-y)(2\sqrt{3}-2y)=6$，

所以 $(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2=4$，

所以 $\vec{c}$ 对应的点的轨迹是以 $(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 为圆心，以 2 为半径的圆，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
https://d.book118.com/528032073044006073