临沭一中 2023-2024 学年高二上学期第二次教学质量检测

数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，

1. 抛物线 $x=2y^2$ 的准线方程是（　　）

A. $x=-\frac{1}{2}$　　B. $x=-\frac{1}{4}$

C. $x=-\frac{1}{8}$　　D. $x=-\frac{1}{16}$

【答案】C

【解析】

【分析】化为标准形式求解即可.

【详解】解：$x=2y^2$ 可化为 $y^2=\frac{1}{2}x$，

所以抛物线 $x=2y^2$ 的准线方程为 $x=-\frac{1}{8}$.

故选：C

2. 已知公比为 2 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 a_1，a_2+1，a_3+1 成等差数列，则 $S_6=$（　　）

A. 64　　B. 63　　C. 126　　D. 128

【答案】B

【解析】

【分析】根据三项成等差数列，利用等比中项列出等量关系，再结合等比数列定义，即可求得首项和公比，代入求和公式即可.

【详解】由于 a_1，a_2+1，a_3+1 成等差数列，所以 $2(a_2+1)=a_1+a_3+1$，即 $2a_2+1=a_1+a_3$，

所以 $2a_1\times 2+1=a_1+a_1\times 2^2$，解得 $a_1=1$，所以 $S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{1-2^6}{1-2}=63$.

故选：B.

3. 若等轴双曲线 C 过点 $(1,\sqrt{3})$，则双曲线 C 的顶点到其渐近线的距离为（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】先求出双曲线 C 的标准方程，再求顶点到其渐近线的距离.

【详解】设等轴双曲线 C 的标准方程为 $x^2-y^2=k\left(k\neq 0\right)$,

因为点 $\left(1,\sqrt{3}\right)$ 在双曲线上，所以 $1^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=k$，解得 $k=-2$，

所以双曲线 C 的标准方程为 $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}=1$，

故上顶点 $\left(0,\sqrt{2}\right)$ 到其一条渐近线 $y=x$ 的距离为 $d=\frac{\left|\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$.

故选：A.

4. 已知向量 $\vec{a}=\left(1,0,\sqrt{3}\right)$，$\vec{b}=\left(1,2,0\right)$，则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量是（　　）

A. $\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},0\right)$　　B. $\left(\frac{1}{5},0,\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{4},0,\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},0\right)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据投影向量的概念结合空间向量的坐标运算求解.

【详解】由题意可得：$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+0\times2+\sqrt{3}\times0=1,\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1^2+0^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$，

故 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量为 $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|}\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{1}{4}\vec{a}=\left(\frac{1}{4},0,\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

故选：C.

5. 等差数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 中的前 n 项和分别为 S_n,T_n，$\frac{S_n}{T_n}=\frac{4n}{9n+3}$，则 $\frac{a_{10}}{b_{10}}=$（　　）

A. $\frac{40}{93}$　　B. $\frac{38}{87}$　　C. $\frac{17}{42}$　　D. $\frac{32}{81}$

【答案】B

【解析】

【分析】由题意直接根据等差数列前 n 项和公式得到 $\frac{a_{10}}{b_{10}}=\frac{S_{19}}{T_{19}}$，进一步代入数据即可得解.

【详解】$\because$ 等差数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 中的前 n 项和分别为 S_n,T_n，$\frac{S_n}{T_n}=\frac{4n}{9n+3}$，

$$\therefore \frac{a_{10}}{b_{10}}=\frac{2a_{10}}{2b_{10}}=\frac{\frac{19}{2}\left(a_1+a_{19}\right)}{\frac{19}{2}\left(b_1+b_{19}\right)}=\frac{S_{19}}{T_{19}}=\frac{4\times 19}{9\times 19+3}=\frac{38}{87}.$$

故选：B．

6. 已知直线 $l_1:3x-4y+7=0$ 与直线 $l_2:6x-\left(m+1\right)y+1-m=0$ 平行，则 l_1 与 l_2 之间的距离为（　　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】两直线斜率存在时，平行则斜率相等，求出 m 的值，再根据两平行线间的距离公式即可计算.

【详解】∵直线 l_1 与 l_2 平行，$\therefore \frac{3}{6}=\frac{4}{m+1}\neq\frac{7}{1-m}$，解得 $m=7$.

∵ l_2 的方程为 $3x-4y-3=0$，∴它们之间的距离 $d=\frac{\left|7+3\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$.

故选：B.

7. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 CD 的中点，若 $AB=2$，则点 B 到平面 A_1AE 的距离是

A. $\sqrt{5}$　　　　B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　　　　C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】

由题意结合几何体的结构特征利用等体积法求解点面距离即可.

【详解】设点 B 到平面 A_1AE 的距离为 h，由等体积法可知：$V_{B-A_1AE}=V_{A_1-ABE}$，

即 $\frac{1}{3}\times S_{\triangle A_1AE}\cdot h=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABE}\cdot AA_1$，$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{5}\right)\cdot h=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times 2\right)\times 2$，

解得：$h=\frac{4}{5}\sqrt{5}$.

【点睛】本题主要考查点面距离的求解，等价转化的数学思想等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

8. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的右焦点 F 与抛物线 $y^2=16x$ 的焦点重合，过点 F 的直线交 E 于 A、B 两点，若 AB 的中点坐标为 $\left(1,-1\right)$，则椭圆 E 方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{8}=1$

B. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

C. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

D. $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

【答案】A

【解析】

【分析】结合中点坐标用点差法求得 $b^2=8,a^2=24$.

【详解】$\because y^2=16x$，故右焦点 $F\left(4,0\right)$，则 $a^2=b^2+16$，

设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1+x_2=2,y_1+y_2=-2$，

且 $\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}=1,\frac{{x_2}^2}{a^2}+\frac{{y_2}^2}{b^2}=1$，

两式相减得 $\frac{\left(x_1+x_2\right)\left(x_1-x_2\right)}{a^2}+\frac{\left(y_1+y_2\right)\left(y_1-y_2\right)}{b^2}=0$，

故 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2\left(x_1+x_2\right)}{a^2\left(y_1+y_2\right)}=-\frac{2b^2}{-2a^2}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{0+1}{4-1}=\frac{1}{3}$,

故 $a^2=3b^2=b^2+16$，故 $b^2=8,a^2=24$，

故椭圆 E 方程为 $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{8}=1$，

故选：A.

二、多选题：本共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 圆 $O_1:x^2+y^2-2x=0$ 和圆 $O_2:x^2+y^2+2x-8y=0$ 的交点为 A,B，则下列结论正确的是（　　）

A. 圆 O_2 的半径为 4

B. 直线 AB 的方程为 $x-2y=0$

C. $\left|AB\right|=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

D. 线段 AB 的垂直平分线方程为 $2x+y+2=0$

【答案】BC

【解析】

【分析】

根据圆的方程分别求解两圆圆心与半径，即可判断A；根据圆与圆相交的相交弦所在直线方程及相交弦长公式，即可判断B，C；利用圆与圆相交的对称关系即可求线段 AB 的垂直平分线方程，从而判断D.

【详解】解：圆 $O_1: x^2+y^2-2x=0$，即 $(x-1)^2+y^2=1$，则圆心 $O_1(1,0)$，半径为 $r_1=1$，圆 $O_2: x^2+y^2+2x-8y=0$，即 $(x+1)^2+(y-4)^2=17$，则圆心 $O_2(-1,4)$，半径为 $r_2=\sqrt{17}$，故A不正确；

由于圆 $O_1: x^2+y^2-2x=0$ 和圆 $O_2: x^2+y^2+2x-8y=0$ 的交点为 A,B，则直线 AB 的方程满足

$\left(x^2+y^2-2x\right)-\left(x^2+y^2+2x-8y\right)=0$，整理得：$x-2y=0$，

所以圆心 $O_1(1,0)$ 到直线 AB 的距离 $d_1=\dfrac{|1-0|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $|AB|=2\sqrt{r_1^2-d_1^2}=2\sqrt{1^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，

故B正确，C正确；

由圆与圆相交于 A,B 可知直线 O_1O_2 即线段 AB 的垂直平分线，所以 $k_{O_1O_2}=\dfrac{0-4}{1+1}=-2$，则直线 O_1O_2 的方程为：$y-0=-2(x-1)$，即 $2x+y-2=0$，故D不正确.

故选：BC.

10. 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$3S_n=a_n+2$，则（　　）

A. $\{a_n\}$ 是等比数列　　B. $a_9+a_{10}>0$

C. $a_9a_{10}a_{11}>0$　　D. $S_n>0$

【答案】ABD

【解析】

【分析】利用递推关系求得 a_n，逐项验证即可.

【详解】因为 $3S_n=a_n+2$，①

当 $n=1$ 时，$3S_1=a_1+2$，则 $a_1=1$，

当 $n\geq 2$ 时，$3S_{n-1}=a_{n-1}+2$，②

①−②得

$3(S_n-S_{n-1})=a_n-a_{n-1}=3a_n$，

则 $a_n=-\dfrac{1}{2}a_{n-1}$，

故$\{a_n\}$是以 1 为首项，公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列，

且$a_n=(-\frac{1}{2})^{n-1}$，故 A 正确；

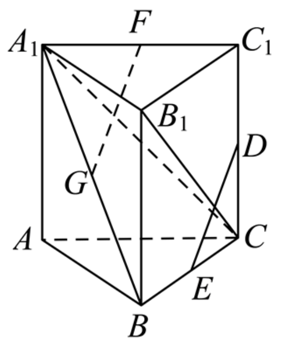
又$a_9+a_{10}=a_9(1+q)=(-\frac{1}{2})^8\times(1-\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^9>0$，故 B 正确；

$a_9a_{10}a_{11}=a_{10}^3=(-\frac{1}{2})^{27}<0$，故 C 错误；

由题中，$S_n=\dfrac{1\times[1-(-\frac{1}{2})^n]}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^n]>0$，故 D 正确，

故选：ABD

11. 如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$是各条棱长均等于 1 的正三棱柱，D,E,F,G分别为CC_1,CB,A_1C_1,A_1B的中点，下列结论正确的是（　　）



A. $GF//DE$

B. $GF\perp B_1C$

C. 异面直线GF与AA_1所成角为$\frac{\pi}{3}$

D. 直线DE与平面A_1BC所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{42}}{14}$

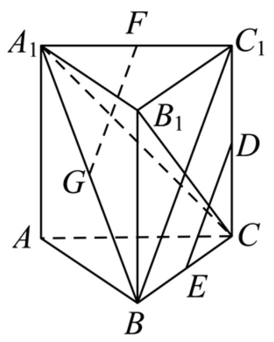
【答案】ABD

【解析】

【分析】连接BC_1,可得$FG//BC_1$，又$DE//BC_1$，从而可判断 A；由$BC_1\perp B_1C$，$FG//BC_1$可判断 B；由$GF//DE$，$AA_1//CC_1$，可得直线GF与AA_1所成角即为DE与CC_1所成角，根据棱柱的结构特征可判断 C；以 A 为原点，AC为y轴，AA_1为z轴，过 A 作平面ACC_1A_1的垂线为x轴，建立空间直角坐标系，求出平面A_1BC的一个法向量为$\vec{n}=(\sqrt{3},3,3)$，设直线DE与平面A_1BC所成角为θ，根据

$\sin\theta=\left|\cos\left\langle \vec{n},\overrightarrow{DE}\right\rangle\right|$即可判断 D.

【详解】连接BC_1,



因为F,G分别为A_1C_1,A_1B的中点，所以$FG//BC_1$.

因为D,E分别为CC_1,CB的中点，所以$DE//BC_1$.

所以$GF//DE$，故 A 正确；

因为$BC_1\perp B_1C$，$FG//BC_1$，所以$GF\perp B_1C$，故 B 正确；

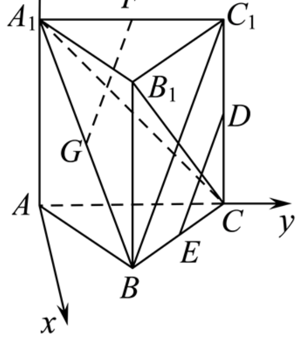
因为$GF//DE$，$AA_1//CC_1$，所以直线GF与AA_1所成角即为DE与CC_1所成角.

因为$CC_1\perp$平面ABC，$CE\subset$平面ABC，所以$CC_1\perp CE$，即$CD\perp CE$.

因为三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$是各条棱长均等于 1 的正三棱柱，

所以$CE=CD$，所以$\angle CDE=\frac{\pi}{4}$，即异面直线GF与AA_1所成角为$\frac{\pi}{4}$，故 C 错误；

以 A 为原点，AC为y轴，AA_1为z轴，过 A 作平面ACC_1A_1的垂线为x轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则$A_1(0,0,1),B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right),C(0,1,0),D\left(0,1,\frac{1}{2}\right),E\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4},0\right)$,

所以 $\overrightarrow{A_1B}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-1\right),\overrightarrow{A_1C}=(0,1,-1),\overrightarrow{DE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$.

设平面 A_1BC 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=y-z=0\end{cases}$，

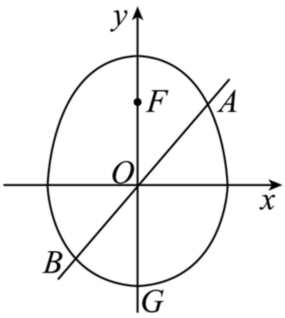
令 $y=3$，可得 $x=\sqrt{3},z=3$，故 $\vec{n}=(\sqrt{3},3,3)$.

设直线 DE 与平面 A_1BC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{DE}\right\rangle\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}\right|}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{DE}\right|}=\frac{\left|\frac{3}{4}-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{3+9+9}\times\sqrt{\frac{3}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{42}}{14}$，故 D 正确.

故选:ABD.

12. 2022 年 4 月 16 日 9 时 56 分，神舟十三号返回舱成功着陆，返回舱是宇航员返回地球的座舱，返回舱的轴截面可近似看作是由半圆和半椭圆组成的“曲圆”，如图在平面直角坐标系中半圆的圆心在坐标原点，半圆所在的圆过椭圆的焦点 F（0，2），椭圆的短轴与半圆的直径重合，下半圆与 y 轴交于点 G．若过原点 O 的直线与上半椭圆交于点 A，与下半圆交于点 B，则（　　）



A. 椭圆的长轴长为 $2\sqrt{2}$

B. $\triangle AFG$ 的周长为 $4+4\sqrt{2}$

C. 线段 AB 长度的取值范围是 $\left[4,2+2\sqrt{2}\right]$

D. $\triangle ABF$ 面积的最大值是 $4\sqrt{2}$

【答案】BC

【解析】

【分析】由题意可得 b、c，然后可得 a，可判断 A；由椭圆定义可判断 B；由椭圆性质可判断 C；设 AB

所在直线方程为$y=kx$，分别联立椭圆、圆的方程，求出A，B两点的横坐标，得出$S_{\triangle ABF}$根据单调性可得最大值判断D.

【详解】对于A，由题知，椭圆中$b=c=2$，得$a=\sqrt{b^2+c^2}=2\sqrt{2}$，则$2a=4\sqrt{2}$，故A错误；

对于B，由椭圆定义知，$AF+AG=2a=4\sqrt{2}$，所以$\triangle AFG$的周长$L=FG+4\sqrt{2}=4+4\sqrt{2}$，故B正确；

对于C，$AB=OB+OA=2+OA$，由椭圆性质可知$2\le OA\le 2\sqrt{2}$，所以$4\le AB\le 2+2\sqrt{2}$，故C正确；

对于D, 设AB所在直线方程为$y=kx$，联立$\begin{cases}y=kx\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{8}=1\end{cases}$可得$x_A=\pm\sqrt{\dfrac{8}{2+k^2}}$，

联立$\begin{cases}y=kx\\ x^2+y^2=4\end{cases}$可得$x_B=\pm\sqrt{\dfrac{4}{1+k^2}}$，

则$S_{\triangle ABF}=S_{\triangle AOF}+S_{\triangle OBF}=\dfrac{1}{2}|OF||x_A|+\dfrac{1}{2}|OF||x_B|=\sqrt{\dfrac{8}{2+k^2}}+\sqrt{\dfrac{4}{1+k^2}}$，

显然当$k^2\ge 0$时，函数$y=\sqrt{\dfrac{8}{2+k^2}}+\sqrt{\dfrac{4}{1+k^2}}$是减函数，

所以当$k=0$时，$S_{\triangle ABF}$有最大值4，故D错误.

故选：BC

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知向量$\vec{a}=(-2,1,5),\vec{b}=(1,-3,m)$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$|\vec{b}|=$__________.

【答案】$\sqrt{11}$

【解析】

【分析】根据空间向量垂直得到方程，求出$m=1$，进而求出模长.

【详解】因为$\vec{a}\perp\vec{b}$，所以$-2\times1-3\times1+5m=0$，解得：$m=1$，

故$|\vec{b}|=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$.

故答案为：$\sqrt{11}$

14. 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_5=a_4+7,a_{10}=19$，则数列$\{a_n\cdot\cos n\pi\}$的前2024项和__________.