

第一章 静电场

§ 1.1 静电的基本现象和基本规律

思考题:

1、 给你两个金属球, 装在可以搬动的绝缘支架上, 试指出使这两个球带等量异号电荷的方向。你可以用丝绸摩擦过的玻璃棒, 但不使它和两球接触。你所用的方法是否要求两球大小相等?

答: 先使两球接地使它们不带电, 再绝缘后让两球接触, 将用丝绸摩擦后带正电的玻璃棒靠近金属球一侧时, 由于静电感应, 靠近玻璃棒的球感应负电荷, 较远的球感应等量的正电荷。然后两球分开, 再移去玻璃棒, 两金属球分别带等量异号电荷。本方法不要求两球大小相等。因为它们本来不带电, 根据电荷守恒定律, 由于静电感应而带电时, 无论两球大小是否相等, 其总电荷仍应为零, 故所带电量必定等量异号。

2、 带电棒吸引干燥软木屑, 木屑接触到棒以后, 往往又剧烈地跳离此棒。试解释之。

答: 在带电棒的非均匀电场中, 木屑中的电偶极子极化出现束缚电荷, 故受带电棒吸引。但接触棒后往往带上同种电荷而相互排斥。

3、 用手握铜棒与丝绸摩擦, 铜棒不能带电。戴上橡皮手套, 握着铜棒和丝绸摩擦, 铜棒就会带电。为什么两种情况有不同结果?

答: 人体是导体。当手直接握铜棒时, 摩擦过程中产生的电荷通过人体流入大地, 不能保持电荷。戴上橡皮手套, 铜棒与人手绝缘, 电荷不会流走, 所以铜棒带电。

计算题:

1、 真空中两个点电荷 $q_1=1.0 \times 10^{-10}\text{C}$, $q_2=1.0 \times 10^{-11}\text{C}$, 相距 100mm, 求 q_1 受的力。

解:

2、 真空中两个点电荷 q 与 Q , 相距 5.0mm, 吸引力为 40 达因。已知 $q=1.2 \times 10^{-6}\text{C}$, 求 Q 。

解: 1 达因=克·厘米/秒²= 10^{-5} 牛顿

3、 为了得到一库仑电量大小的概念, 试计算两个都是一库仑的点电荷在真空中相距一米时的相互作用力和相距一千米时的相互作用力。

解:

4、 氢原子由一个质子(即氢原子核)和一个电子组成。根据经典模型, 在正常状态下, 电子绕核作圆周运动, 轨道半径是 $r=5.29 \times 10^{-11}\text{m}$ 。已知质子质量 $M=1.67 \times 10^{-27}\text{kg}$, 电子质量 $m=9.11 \times 10^{-31}\text{kg}$ 。电荷分别为 $e=\pm 1.6 \times 10^{-19}\text{C}$, 万有引力常数 $G=6.67 \times 10^{-11}\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ 。

(1) 求电子所受的库仑力; (2) 库仑力是万有引力的多少倍? (3) 求电子的速度。

解:

5、 卢瑟福实验证明: 当两个原子核之间的距离小到 10^{-15} 米时, 它们之间的排斥力仍遵守库仑定律。金的原子核中有 79 个质子, 氦的原子核(即 α 粒子)中有 2 个质子。已知每个质子带电 $e=1.6 \times 10^{-19}\text{C}$, α 粒子的质量为 $6.68 \times 10^{-27}\text{kg}$ 。当 α 粒子与金核相距为 $6.9 \times 10^{-15}\text{m}$ 时(设这时它们仍都可当作点电荷)。求 (1) α 粒子所受的力; (2) α 粒子的加速度。

解:

6、 铁原子核里两质子间相距 $4.0 \times 10^{-15}\text{m}$, 每个质子带电 $e=1.6 \times 10^{-19}\text{C}$ 。(1) 求它们之间的库仑力; (2) 比较这力与所受重力的大小。

解:

7、 两个点电荷带电 $2q$ 和 q , 相距 l , 第三个点电荷放在何处所受的合力为零?

解: 设所放的点电荷电量为 Q 。若 Q 与 q 同号, 则三者互相排斥, 不可能达到平衡; 故 Q

只能与 q 异号。当 Q 在 $2q$ 和 q 连线之外的任何地方，也不可能达到平衡。由此可知，只有 Q 与 q 异号，且处于两点荷之间的连线上，才有可能达到平衡。设 Q 到 q 的距离为 x 。

8、三个相同的点电荷放置在等边三角形的各顶点上。在此三角形的中心应放置怎样的电荷，才能使作用在每一点电荷上的合力为零？

解：设所放电荷为 Q ， Q 应与顶点上电荷 q 异号。中心 Q 所受合力总是为零，只需考虑 q 受力平衡。

平衡与三角形边长无关，是不稳定平衡。

9、电量都是 Q 的两个点电荷相距为 l ，连线中点为 O ；有另一点电荷 q ，在连线的中垂面上距 O 为 r 处。（1）求 q 所受的力；（2）若 q 开始时是静止的，然后让它自己运动，它将如何运动？分别就 q 与 Q 同号和异号两种情况加以讨论。

解：

(1)

(2) q 与 Q 同号时， F 背离 O 点， q 将沿两 Q 的中垂线加速地趋向无穷远处。

q 与 Q 异号时， F 指向 O 点， q 将以 O 为中心作周期性振动，振幅为 r 。

<讨论>：设 q 是质量为 m 的粒子，粒子的加速度为

因此，在 $r \ll l$ 和 q 与 Q 异号的情况下， m 的运动近似于简谐振动。

10、两小球质量都是 m ，都用长为 l 的细线挂在同一点，若它们带上相同的电量，平衡时两线夹角为 2θ 。设小球的半径都可以略去不计，求每个小球上的电量。

解：小球静止时，作用其上的库仑力和重力在垂直于悬线方向上的分量必定相等。

§ 1.2 电场 电场强度

思考题：

1、在地球表面上通常有一竖直方向的电场，电子在此电场中受到一个向上的力，电场强度的方向朝上还是朝下？

答：电子受力方向与电场强度方向相反，因此电场强度方向朝下。

2、在一个带正电的大导体附近 P 点放置一个试探点电荷 $q_0 (q_0 > 0)$ ，实际测得它受力 F 。若考虑到电荷量 q_0 不是足够小的，则 F/q_0 比 P 点的场强 E 大还是小？若大导体带负电，情况如何？

答： q_0 不是足够小时，会影响大导体球上电荷的分布。由于静电感应，大导体球上的正电荷受到排斥而远离 P 点，而 F/q_0 是导体球上电荷重新分布后测得的 P 点场强，因此比 P 点原来的场强小。若大导体球带负电，情况相反，负电荷受吸引而靠近 P 点， P 点场强增大。

3、两个点电荷相距一定距离，已知在这两点电荷连线中点处电场强度为零。你对这两个点电荷的电荷量和符号可作什么结论？

答：两电荷电量相等，符号相反。

4、一半径为 R 的圆环，其上均匀带电，圆环中心的电场强度如何？其轴线上场强方向如何？

答：由对称性可知，圆环中心处电场强度为零。轴线上场强方向沿轴线。当带电为正时，沿轴线向外；当带电为负时，沿轴线向内，

计算题：

1、在地球表面上某处电子受到的电场力与它本身的重量相等，求该处的电场强度（已知电子质量 $m=9.1 \times 10^{-31}\text{kg}$, 电荷为 $-e=-1.610 \times 10^{-19}\text{C}$ ）。

解：

2、电子所带的电荷量（基本电荷 $-e$ ）最先是密立根通过油滴实验测出的。密立根设计的实验装置如图所示。一个很小的带电油滴在电场 E 内。调节 E ，使作用在油滴上的电场力与油滴的重量平衡。如果油滴的半径为 $1.64 \times 10^{-4}\text{cm}$ ，在平衡时， $E=1.92 \times 10^5\text{N/C}$ 。求油滴上的电荷（已知油的密度为 0.851g/cm^3 ）

解：

3、在早期（1911 年）的一连串实验中，密立根在不同时刻观察单个油滴上呈现的电荷，其测量结果（绝对值）如下：

6.568×10^{-19} 库仑 13.13×10^{-19} 库仑 19.71×10^{-19} 库仑

8.204×10^{-19} 库仑 16.48×10^{-19} 库仑 22.89×10^{-19} 库仑

11.50×10^{-19} 库仑 18.08×10^{-19} 库仑 26.13×10^{-19} 库仑

根据这些数据，可以推得基本电荷 e 的数值为多少？

解：油滴所带电荷为基本电荷的整数倍。则各实验数据可表示为 kie 。取各项之差点儿

4、根据经典理论，在正常状态下，氢原子中电子绕核作圆周运动，其轨道半径为 5.29×10^{-11} 米。已知质子电荷为 $e=1.60 \times 10^{-19}$ 库，求电子所在处原子核（即质子）的电场强度。

解：

5、两个点电荷， $q_1=+8$ 微库仑， $q_2=-16$ 微库仑（1 微库仑= 10^{-6} 库仑），相距 20 厘米。求离它们都是 20 厘米处的电场强度。

解：

与两电荷相距 20cm 的点在一个圆周上，各点 E 大小相等，方向在圆锥在上。

6、如图所示，一电偶极子的电偶极矩 $P=ql$ 。P 点到偶极子中心 O 的距离为 r ， r 与 l 的夹角为 θ 。在 $r \gg l$ 时，求 P 点的电场强度 E 在 $r=OP$ 方向的分量 E_r 和垂直于 r 方向上的分量 E_θ 。

解：

其中--

7、把电偶极矩 $P=ql$ 的电偶极子放在点电荷 Q 的电场内，P 的中心 O 到 Q 的距离为 $r(r \gg l)$ ，分别求：（1） $P \parallel QO$ 和（2） $P \perp QO$ 时偶极子所受的力 F 和力矩 L 。

解：（1）

F 的作用线过轴心 O，力矩为零

（2）

8、附图中所示是一种电四极子，它由两个相同的电偶极子 $P=ql$ 组成，这两偶极子在一直线上，但方向相反，它们的负电荷重合在一起。证明：在它们的延长线上离中心为 r 处，
解：

9、附图中所示为另一种电四极子，设 q 和 l 都已知，图中 P 点到电四极子中心 O 的距离为 x 。PO 与正方形的一对边平行。求 P 点的电场强度 E 。当 $x \gg l$ 时， $E=?$

解：

10、均匀带电细棒（1）在通过自身端点的垂直面上和（2）在自身的延长线上的场强分布，设棒长为 $2l$ ，带电总量为 q 。

解：（1）一端的垂直面上任一点 A 处

(2) 延长线上任一点 B 处

11、两条平行的无限长直均匀带电线，相距为 a ，电荷线密度分别为 $\pm \eta e$ ，(1) 求这两线构成的平面上任一点（设这点到其中一线的垂直距离为 x ）的场强；(2) 求两线单位长度间的相互吸引力。

解：(1) 根据场强叠加原理，任一点场强为两无限长直带电线产生场强的矢量和

(2)

12、如图所示，一半径为 R 的均匀带电圆环，电荷总量为 q 。(1) 求轴线上离环中心 O 为 x 处的场强 E ；(2) 画出 $E-x$ 曲线；(3) 轴线上什么地方场强最大？其值是多少？

解：(1) 由对称性可知，所求场强 E 的方向平行于圆环的轴线

(2) 由场强表达式得到 $E-X$ 曲线如图所示

(3) 求极大值：

13、半径为 R 的圆面上均匀带电，电荷面密度为 σe ，(1) 求轴线上离圆心的坐标为 x 处的场强；(2) 在保持 σe 不变的情况下，当 $R \rightarrow 0$ 和 $R \rightarrow \infty$ 时结果各如何？(3) 在保持总电荷 $Q = \pi R^2 \sigma e$ 不变的情况下，当 $R \rightarrow 0$ 和 $R \rightarrow \infty$ 时结果各如何？

解：(1) 由对称性可知，场强 E 沿轴线方向

利用上题结果

(2) 保持 σe 不变时，

(3) 保持总电量不变时，

14、一均匀带电的正方形细框，边长为 l ，总电量为 q ，求这正方形轴线上离中心为 x 处的场强。

解：根据对称性，所求场强沿正方形的轴线方向

对于一段长为 l 的均匀带电直线，在中垂面上离中点为 a 处产生的电场强度为

正方形四边在考察点产生的场强为

15、证明带电粒子在均匀外电场中运动时，它的轨迹一般是抛物线。这抛物线在什么情况下退化为直线？

解：(1) 设带电粒子的初速度方向与电场方向夹角为 θ ，其运动方程为

(2) 当 E 为均匀电场且粒子的初速度为零时，或初速度平行于电场方向时，初速度没有垂直于场强方向的分量，抛物线退化为直线。

16、如图所示，示波管偏转电极的长度 $l = 1.5 \text{ cm}$ ，两极间电场是均匀的， $E = 1.2 \times 10^4 \text{ V/m}$ (E 方向垂直于管轴)，一个电子以初速度 $v_0 = 2.6 \times 10^7 \text{ m/s}$ 沿管轴注入。已知电子质量 $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ，电荷为 $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。

(1) 求电子经过电极后所发生的偏转；

(2) 若可以认为一出偏转电极的区域后，电场立即为零。设偏转电极的边缘到荧光屏的距离 $D = 10 \text{ 厘米}$ ，求电子打在荧光屏上产生的光点偏离中心 O 的距离。

解：(1) 电子的运动方程得

(2)

§ 1.3 高斯定理

思考题：

1、一般地说，电力线代表点电荷在电场中运动的轨迹吗？为什么？

答：一般情况下，电力线不代表点电荷在电场中运动的轨迹。因为电力线一般是曲线，若电荷沿电力线作曲线运动，应有法向力存在；但电力线上各点场强只沿切线方向，运动电荷必定偏离弯曲的电力线。仅当电力线是直线，且不考虑重力影响时，初速度为零的点电荷才能沿着电力线运动。若考虑重力影响时，静止的点电荷只能沿竖直方向电力线运动。

2、空间里的电力线为什么不相交？

答：电力线上任一点的切线方向即为该点场强方向。如果空间某点有几条电力线相交，过交点对每条电力线都可作一条切线，则交点处的场强方向不唯一，这与电场中任一点场强有确定方向相矛盾。

3、一个点电荷 q 放在球形高斯面的中心处，试问在下列情况下，穿过这高斯面的电通量是否改变？

(1) 如果第二个点电荷放在高斯球面外附近；

(2) 如果第二个点电荷放在高斯球面内；

(3) 如果将原来的点电荷移离了高斯球面的球心，但仍在高斯球面内。

答：由于穿过高斯面的电通量仅与其内电量的代数和有关，与面内电荷的分布及面外电荷无关，所以

(1) ； (2) ； (3)

4、(1) 如果上题中高斯球面被一个体积减小一半的立方体表面所代替，而点电荷在立方体的中心，则穿过该高斯面的电通量如何变化？(2) 通过这立方体六个表面之一的电通量是多少？

答：(1) 立方体高斯面内电荷不变，因此电通量不变；

(2) 通过立方体六个表面之一的电通量为总通量的 $1/6$ 。即

5、附图所示，在一个绝缘不带电的导体球的周围作一同心高斯面 S 。试定性地回答，在将一正点荷 q 移至导体表面的过程中，

(1) A 点的场强大小和方向怎样变化？

(2) B 点的场强大小和方向怎样变化？

(3) 通过 S 面的电通量如何变化？

答：由于电荷 q 的作用，导体上靠近 A 点的球面感应电荷 $-q'$ ，远离 A 点的球面感应等量的 $+q'$ ，其分布与过电荷 q 所在点和球心 O 的连线成轴对称，故 $\pm q'$ 在 A 、 B 两点的场强 E' 沿 AOB 方向。

(1) $E=E_0+E'$ ， q 移到 A 点前， E_0 和 E' 同向，随着 q 的移近不断增大，总场强 E_A 也不断增大。 q 移过 A 点后， E_0 反向，且 $E_0 > E'$ ， E_A 方向与前相反。随着 q 的远离 A 点， E_0 不断减小， $\pm q'$ 和 E' 增大，但因 E' 始终小于 E_0 ，所以 E_A 不断减小。

(2) 由于 q 及 $\pm q'$ 在 B 点的场强始终同向，且随着 q 移近导体球，二者都增大，所以 E_B 不断增大。

(3) q 在 S 面外时，面内电荷代数和为零，故 $\Phi=0$ ； q 在 S 面内时， $\Phi=q/\epsilon_0$ ；当 q 在 S 面上时，它已不能视为点电荷，因高斯面是无厚度的几何面，而实际电荷总有一定大小，

此时 $\Phi = \Delta q / \epsilon_0$, Δq 为带电体处于 S 面内的那部分电量。

6、有一个球形的橡皮气球, 电荷均匀分布在表面上, 在此气球被吹大的过程中, 下列各处的场强怎样变化?

(1) 始终在气球内部的点; (2) 始终在气球外部的点; (3) 被气球表面掠过的点。

答: 气球在膨胀过程中, 电荷始终均匀分布在球面上, 即电荷成球对称分布, 故场强分布也呈球对称。由高斯定理可知:

始终在气球内部的点, $E=0$, 且不发生变化;

始终在气球外的点, 场强相当于点电荷的场强, 也不发生变化;

被气球表面掠过的点, 当它们位于面外时, 相当于点电荷的场强; 当位于面内时, $E=0$, 所以场强发生跃变。

7、求均匀带正电的无限大平面薄板的场强时, 高斯面为什么取成两底面与带电面平行且对称的柱体的形状? 具体地说,

(1) 为什么柱体的两底面要对于带电面对称? 不对称行不行?

(2) 柱体底面是否需要是圆的? 面积取多大合适?

(3) 为了求距带电平面为 x 处的场强, 柱面应取多长?

答: (1) 对称性分析可知, 两侧距带电面等远的点, 场强大小相等, 方向与带电面垂直。只有当高斯面的两底面对带电面对称时, 才有 $E_1=E_2=E$, 从而求得 E 。如果两底在不对称, 由于不知 E_1 和 E_2 的关系, 不能求出场强。若已先证明场强处处相等, 就不必要求两底面对称。

(2) 底面积在运算中被消去, 所以不一定要要求柱体底面是圆, 面积大小也任意。

(3) 求距带电面 x 处的场强时, 柱面的每一底应距带电面为 x , 柱体长为 $2x$ 。同样, 若已先证明场强处处相等, 则柱面的长度可任取。

17、求一对带等量异号或等量同号电荷的无限大平行平板之间的场强时, 能否只取一个高斯面?

答: 如果先用高斯定理求出单个无限大均匀带电平面的场强, 再利用叠加原理, 可以得到两个无限大均匀带电平面间的场强。在这样的计算过程中, 只取了一个高斯面。

18、已知一高斯面上场强处处为零, 在它所包围的空间内任一点都没有电荷吗?

答: 不一定。高斯面上 $E=0$, S 内电荷的代数和为零, 有两种可能: 一是面内无电荷, 如高斯面取在带电导体内部; 二是面内有电荷, 只是正负电荷的电量相等, 如导体空腔内有电荷 q 时, 将高斯面取在导体中, S 包围导体内表面的情况。

19、要是库仑定律中的指数不恰好是 2 (譬如为 3), 高斯定理是否还成立?

答: 不成立。设库仑定律中指数为 $2+\delta$,

穿过以 q 为中心的球面上的电通量为 , 此时通量不仅与面内电荷有关, 还与球面半径有关, 高斯定理不再成立。

习题:

1、设一半径为 5 厘米的圆形平面, 放在场强为 300 N/C 的匀强电场中, 试计算平面法线与场强的夹角 θ 取下列数值时通过此平面的电通量。(1) $\theta = 0^\circ$; (2) $\theta = 30^\circ$; (3) $\theta = 90^\circ$; (4) $\theta = 120^\circ$; (5) $\theta = 180^\circ$ 。

解:

2、均匀电场与半径为 a 的半球面的轴线平行, 试用面积分计算通过此半球面的电通量。

解: 通过半球面的电通量与通过半球面在垂直于场强方向上的投影面积的电通量相等。

3、 如附图所示,在半径为 R_1 和 R_2 的两个同心球面上,分别均匀地分布着电荷 Q_1 和 Q_2 , 求:

(1) I、II、III三个区域内的场强分布;

(2) 若 $Q_1 = -Q_2$, 情况如何? 画出此情形的 $E-r$ 曲线。

解: (1) 应用高斯定理可求得三个区域内的场强为

$E-r$ 曲线 ($r < R_1$); ($R_1 < r < R_2$)

($r > R_2$)

(2) 若 $Q_1 = -Q_2$, $E_1 = E_3 = 0$,

$E-r$ 曲线如图所示。

4、 根据量子理论,氢原子中心是一个带正电子 qe 的原子核(可以看成是点电荷),外面是带负电的电子云。在正常状态(核外电子处在 S 态)下,电子云的电荷密度分布是球对称的:

式中 a_0 为一常数(它相当于经典原子模型中 s 电子圆形轨道的半径,称为玻尔半径)。求原子内电场的分布。

解: 电子云是球对称分布,核外电子的总电荷量为

可见核外电荷的总电荷量等于电子的电荷量。

应用高斯定理: 核外电荷产生的场强为

原子核与核外电荷产生的总场强为

5、 实验表明:在靠近地面处有相当强的电场, E 垂直于地面向下,大小约为 100 N/C ; 在离地面 1.5 千米高的地方, E 也是垂直地面向下的,大小约为 25 N/C 。

(1) 试计算从地面到此高度大气中电荷的平均密度;

(2) 如果地球上的电荷全部均匀分布在表面,求地面上电荷的面密度。

解: (1) 以地心为心作球形高斯面,恰好包住地面,由对称性和高斯定理得

(2) 以地球表面作高斯面

6、 半径为 R 的无穷长直圆筒面上均匀带电,沿轴线单位长度的电量为 λ 。求场强分布,并画出 $E-r$ 曲线。

解: 应用高斯定理,求得场强分布为

$$E = 0 \quad r < R$$

$$r > R$$

$E-r$ 曲线如图所示。

7、 一对无限长的共轴直圆筒,半径分别为 R_1 和 R_2 ,筒面上都均匀带电。沿轴线单位长度的电量分别为 λ_1 和 λ_2 ,

(1) 求各区域内的场强分布;

(2) 若 $\lambda_1 = -\lambda_2$, 情况如何? 画出此情形的 $E-r$ 曲线。

解: (1) 由高斯定理,求得场强分布为

$$r < R_1 \quad E_1 = 0$$

$$R_1 < r < R_2$$

$$r > R_2$$

(2) 若 $\lambda_1 = -\lambda_2$, $E_1 = E_3 = 0$, E_2 不变。此情形的 $E-r$ 曲线如图所示。

8、 半径为 R 的无限长直圆柱体内均匀带电，电荷的体密度为 ρ ，求场强分布，并画出 $E-r$ 曲线。

解：应用高斯定理，求得场强分布为

圆柱体内

圆柱体外

$E-r$ 曲线如图所示

9、 设气体放电形成的等离子体圆柱内的体电荷分布可用下式表示，式中 r 是到轴线的距离， ρ_0 是轴线上的密度值， a 是常数，求场强的分布。

解：应用高斯定理，作同轴圆柱形闭合柱面为高斯面。

E 方向沿矢径 r 方向。

10、 两无限大的平行平面均匀带电，电荷的面密度分别为 $\pm \sigma$ ，求各区域的场强分布。

解：无限大均匀带电平面所产生的电场强度为

根据场强的叠加原理，各区域场强分别为

可见两面外电场强度为零，两面间电场是均匀电场。平行板电容器充电后，略去边缘效应，其电场就是这样的分布。

11、 两无限大的平行平面均匀带电，电荷的面密度都是 σ ，求各区域的场强分布。

解：与上题同理，无限大均匀带电平面所产生的电场强度为

应用场强叠加原理，场强在各区域的分布为

可见两面间电场强度为零，两面外是均匀电场，电场强度大小相等，方向相反。

12、 三个无限大的平行平面均匀带电，电荷的面密度分别为 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ，求下列情况各处的场强：（1） $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ ；（2） $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma$ ； $\sigma_2 = -\sigma$ ；（3） $\sigma_1 = \sigma_3 = -\sigma$ ； $\sigma_2 = \sigma$ ；（4） $\sigma_1 = \sigma$ ； $\sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma$ 。

解：无限大均匀带电平面所产生的电场强度为

各区域场强为各带电面产生场强的叠加

$$E_1 \quad E_2 \quad E_3 \quad E_4$$

（1）

（2）

（3）

(4)

1 3、 一厚度为 d 的无限大平板，平板体内均匀带电，电荷的体密度为 ρ ，求板内、板外场强的分布。

解：根据对称性，板内外的电场强度方向均垂直于板面，并对中心对称。

应用高斯定理可求得：

板内 ($r < d/2$)

板外 ($r > d/2$)

1 4、 在半导体 p-n 结附近总是堆积着正、负电荷，在 n 区内有正电荷，p 区内有负电荷，两区电荷的代数和为零。把 p-n 结看成是一对带正、负电荷的无限大平板，它们相互接触。取坐标 x 的原点在 p、n 区的交界面上，n 区的范围是 $-x_n \leq x \leq 0$ ，p 区的范围是 $0 \leq x \leq x_p$ 。设两区内电荷体密度分布都是均匀的：

n 区

p 区 (突变结模型)

这里 N_D 、 N_A 是常数，且 $N_A x_p = N_D x_n$ (两区电荷数量相等)。

试证明电场的分布为：

n 区

p 区 并画出 ρ 和 E 随 x 变化的曲线。

解：将带电层看成无数无限大均匀带电平面的叠加，

由叠加原理可知，在 p-n 结以外区域， $E=0$

(1) 对高斯面 S_1 ，应用高斯定理

(2) 对高斯面 S_2 ，应用高斯定理

(3) ρ 和 E 随 x 变化的曲线如图所示。

-

1 5、 如果在上题中电荷的体分布为

p-n 结外 $\rho(x) = 0$

$-x_n \leq x \leq x_p$ $\rho(x) = -e a x$ (线性缓变结模型)

这里 a 是常数， $x_n = x_p$ (为什么?)，统一用 $x_m/2$ 表示。试证明电场分布为

并画出 ρ 和 E 随 x 变化的曲线。

解：正负电荷代数和仍为零，p-n 结外 $E=0$

作高斯面

ρ 和 E 随 x 变化的曲线如图所示。

§ 1.4 电位及其梯度

思考题:

1、 假如电场力的功与路径有关, 定义电位差的公式 还有没有意义? 从原则上说, 这时还能不能引入电位差、电位的概念?

答: 如果电场力的功与路径有关, 积分 在未指明积分路径以前就没有意义, 路径不同, 积分结果也不同, 相同的位置, 可以有无限多取值, 所以 就没有确定的意义, 即不能根据它引入电位、电位差的概念来描写电场的性质。

2、 (1) 在附图 a 所示的情形里, 把一个正电荷从 P 点移动到 Q, 电场力的功 A_{PQ} 是正还是负? 它的电位能是增加还是减少? P、Q 两点的电位哪里高? (2) 若移动负电荷, 情况怎样? (3) 若电力线的方向如附图 b 所示, 情况怎样?

答: (1) 正电荷在电场中任一点受电场力 $F = qE$, 方向与该点 E 方向相同, 在 P Q 路径上取任一微元, $dA > 0$

$P \rightarrow Q$, 电场力的功 $A_{PQ} > 0$,

$A_{PQ} = q(U_P - U_Q) = W_P - W_Q > 0$, 所以电位能减少,

$q > 0, A > 0$, 所以 $U_P > U_Q$

(2) 负电荷受力与电场方向相反, $P \rightarrow Q$, 电场力的功 $A_{PQ} < 0$, 电位能增加, 但仍有 $U_P > U_Q$

(3) 由于场强方向与前述相反, 则所有结论与 (1) (2) 相反。

3、 电场中两点电位的高低是否与试探电荷的正负有关? 电位差的数值是否与试探电荷的电量有关?

答: 电位高低是电场本身的性质, 与试探电荷无关。电位差的数值也与试探电荷的电量无关。

4、 沿着电力线移动负试探电荷时, 它的电位能是增加还是减少?

答: 沿着电力线移动负试探电荷时, 若 dl 与 E 同向, 电场力作负功, 电位能增加; 反之电位能减少。

5、 说明电场中各处的电位永远逆着电力线方向升高。

答: 在任何情况下, 电力线的方向总是正电荷所受电场力的方向, 将单位正电荷逆着电力线方向由一点移动到另一点时, 必须外力克服电场力作功, 电位能增加。电场中某点的电位, 在数值上等于单位正电荷在该点所具有的电位能, 因此, 电位永远逆着电力线方向升高。

6、 (1) 将初速度为零的电子放在电场中时, 在电场力作用下, 这电子是向电场中高电位处跑还是向低电位处跑? 为什么? (2) 说明无论对正负电荷来说, 仅在电场力作用下移动时, 电荷总是从电位能高处移向电位能低处。

答: (1) 电子带负电, 被电场加速, 逆着电力线方向运动, 而电场中各点的电位永远逆着电力线方向升高--电子向高电位处移动。

(2) 若电子初速度为零, 无论正负电荷, 单在电场力作用下移动, 电场力方向与位移方向总是一致的, 电场力作正功, 电位能减少, 所以电荷总是从电位能高处向电位能低处移动。

7、 可否规定地球的电位为+100 伏, 而不规定它为零? 这样规定后, 对测量电位、电位差的数值有什么影响?

答: 可以。因为电位零点的选择是任意的, 假如选取地球的电位是 100V 而不是 0V, 测量

的电位等于以地为零电位的数值加上 100V，而对电位差无影响。

8、 若甲、乙两导体都带负电，但甲导体比乙导体电位高，当用细导线把二者连接起来后，试分析电荷流动的情况。

答：在电场力作用下，电荷总是从电位能高处向电位能低处移动。负电荷由乙流向甲，直至电位相等。

9、 在技术工作中有时把整机机壳作为电位零点。若机壳未接地，能不能说因为机壳电位为零，人站在地上就可以任意接触机壳？若机壳接地则如何？

答：把整机机壳作为零电位是对机上其他各点电位而言，并非是对地而言。若机壳未接地，它与地之间可能有一定的电位差，而人站在地上，与地等电位，这时人与机壳接触，就有一定电位差加在人体上。当电压较高时，可能造成危险，所以一般机壳都要接地，这样人与机壳等电位，人站在地上可以接触机壳。

10、 (1) 场强大的地方，是否电位就高？电位高的地方是否场强大？

(2) 带正电的物体的电位是否一定是正的？电位等于零的物体是否一定不带电？

(3) 场强为零的地方，电位是否一定为零？电位为零的地方，场强是否一定为零？

(4) 场强大小相等的地方电位是否相等？等位面上场强的大小是否相等？

以上各问题分别举例说明之。

答：

(1) 不一定。E 仅与电势的变化率有关，场强大仅说明 U 的变化率大，但 U 本身并不一定很大。例如平行板电容器，B 板附近的电场可以很强，但电位可以很低。同样电位高的地方，场强不一定大，因为电位高不一定电位的变化率大。如平行板电容器 A 板的电位远高于 B 板电位，但 A 板附近场强并不比 B 板附近场强大。

(2) 当选取无限远处电位为零或地球电位为零后，孤立的带正电的物体电位恒为正，带负电的物体电位恒为负。但电位的正负与零电位的选取有关。假如有两个电位不同的带正电的物体，将相对于无限远电位高者取作零电位，则另一带电体就为负电位，由引可说明电位为零的物体不一定不带电。

(3) 不一定。场强为零仅说明 U 的变化率为零，但 U 本身并不一定为零。例如两等量同号电荷的连线中点处， $E=0$ 而 $U \neq 0$ 。U 为零时，U 的变化率不一定为零，因此 E 也不一定为零。例如两等量异号电荷的连线中点处， $U=0$ 而 $E \neq 0$ 。

(4) 场强相等的地方电位不一定相等。例如平行板电容器内部，E 是均匀的，但 U 并不相等。等位面上场强大小不一定相等。如带电导体表面是等位面，而表面附近的场强与面电荷密度及表面曲率有关。

11、 两个不同电位的等位面是否可以相交？同一等位面是否可以与自身相交？

答：在零电位选定之后，每一等位面上电位有一确定值，不同等位面 U 值不同，故不能相交。同一等位面可与自身相交。如带电导体内部场强为零，电位为一常量，在导体内任意作两个平面或曲面让它们相交，由于其上各点的电位都相同，等于导体的电位，这种情况就属于同一等位面自身相交。

习题：

1、 在夏季雷雨中，通常一次闪电里两点间的电位差约为 100MV（十亿伏特），通过的电量约为 30C。问一次闪电消耗的能量是多少？如果用这些能量来烧水，能把多少水从 00C 加热到 1000C？

解：一次闪电消耗的能量为 $W=QU=30 \times 10^9=3 \times 10^{10}$ (J)

所求的水的质量为 $M=W/J=72$ (t)

2、 已知空气的击穿场强为 2×10^6 V/m,测得某次闪电的火花长 100 米，求发生这次闪电时两端的电位差。

解: $U=2 \times 10^6 \times 100=2 \times 10^8$ (V)

3、 证明: 在真空静电场中凡是电力线都是平行直线的地方, 电场强度的大小必定处处相等; 或者凡是电场强度的方向处处相同的地方, 电场强度的大小必定处处相等。

证明: 在电场中作任意矩形闭合回路 $abcd$,

移动电荷 q 一周, 电场力作功为

4、 求与点电荷 $q=1.0 \times 10^{-6}C$ 分别相距为 $a=1.0m$ 和 $b=2.0m$ 的两点间的电位差。

解:

5、 一点电荷 q 在离它 10 厘米处产生的电位为 100V, 求 q 。

解:

6、 求一对等量同号电荷连线中点的场强和电位, 设电荷都是 q , 两者之间距离为 $2l$ 。

解:

7、 求一对等量异号电荷连线中点的场强和电位, 设电荷分别是 $\pm q$, 两者之间距离为 $2l$ 。

解:

8、 如图所示, $AB=2l$, OCD 是以 B 为中心, l 为半径的半圆, A 点有正点电荷 $+q$, B 点有负点电荷 $-q$ 。

(1) 把单位正电荷从 O 点沿 OCD 移到 D 点, 电场力对它作了多少功?

(2) 把单位负电荷从 D 点沿 AB 的延长线移到无穷远去, 电场力对它作了多少功?

解: 电荷在电场中移动时, 电场力作功等于电势能减少的值。

(1)

(2)

9、 两个点电荷的电量都是 q , 相距为 l , 求中垂面上到两者连线中点为 x 处的电位。

解: 根据电势的叠加原理

10、 有两个异号点电荷 me 和 $-e(n>1)$, 相距为 a ,

(1) 证明电位为零的等位面是一个球面;

(2) 证明球心在这两个点电荷的延长线上, 且在 $-e$ 点电荷的外边;

(3) 这球的半径是多少?

解: 以 $-e$ 为原点 O , 两电荷的连线为 x 轴, 取坐标系如图所示。根据电势叠加原理, 空间任一点的电势为

11、 求电偶极子 $p=ql$ 电位的直角坐标表达式, 并用梯度求出场强的直角分量表达式。

解: (1) 取坐标系如图所示, 根据电势叠加原理

当 $r \gg l$ 时,

(2) 由电势梯度求得场强为

12、 证明如图所示电四极子在它的轴线延长线上的电位为 , 并由梯度求场强。

解: 取坐标系如图所示, 根据电势的叠加原理

13、 一电四极子如图所示, 证明: 当 $r \gg l$ 时, 它在 $P(r, \theta)$ 点产生的电位为

图中的极轴通过正方形中心 O 点, 且与一边平行。

解: (1) 根据电势叠加原理

当 $r \gg l$ 时,

(2) 由电势梯度求场强

此题也可以将平面电四极子当作两个电偶极子, 由电偶极子产生的电势叠加求 U 及 E 。

1 4、 求均匀带电圆环轴线上电位的分布, 并画 $U-x$ 曲线。

解: (1) P 点的电势及场强为

(2) 由电势表达式得

因此得 $U-x$ 曲线为

1 5、 求均匀带电圆面轴线上的电位分布, 并画 $U-x$ 曲线。

解: (1) 利用上题结果, 求得电位及场强分布为

(2) 由电势表达式得

$U-X$ 曲线如图所示

1 6、 求两个均匀带电的同心球面在三个区域内的电位分布, 并画 $U-r$ 曲线。

解: (1) 已知均匀带电球面产生的电场中电位的分布为

由电势叠加原理可知:

(2) $U-r$ 曲线如图所示

1 7、 在上题中, 保持内球上电量 Q_1 不变, 当外球电量 Q_2 改变时, 试讨论三个区域内的电位有何变化? 两球面之间的电位差有何变化?

解: 保持 Q_1 不变, 当外球电量 Q_2 变化时, 各区域电位随之变化

1 8、 求均匀带电球体的电位分布。并画 $U-x$ 曲线。

解: (1) 由高斯定理可求得场强分布为

(2) 由场强求得电势为

(3) $U-r$ 曲线如图所示

1 9、 金原子核可当作均匀带电球, 半径约为 6.9×10^{-15} 米, 电荷为 $Ze = 79 \times 1.6 \times 10^{-19}C$, 求它表面上的电位。

解:

2 0、 (1) 一质子 (电荷为 $e = 1.6 \times 10^{-19}C$, 质量为 $1.67 \times 10^{-27}kg$) , 以 $1.2 \times 10^2 m/s$ 的初速从很远的地方射向金原子核, 求它能达到金原子核的最近距离。

(2) α 粒子的电荷为 $2e$, 质量为 $6.7 \times 10^{-27}kg$, 以 $1.6 \times 10^2 m/s$ 的初速度从很远的地方射向

金原子核，求它能达到金原子核的最近距离。

解：由能量守恒定律得

(1)

(2)

2 1、在氢原子中，正常状态下电子到质子的距离为 $5.29 \times 10^{-11} \text{m}$ ，已知氢原子核（质子）和电子带电各为 $\pm e$ 。把氢原子中的电子从正常状态下离核的最近距离拉开到无穷远处所需的能量，叫做氢原子核的电离能。求此电离能是多少电子伏和多少焦耳。

解：设电子的质量为 m ，速度为 v ，氢原子基态的能量为

负号是因为，以电子和质子相距无穷远时为电势能的零点，要把基态氢原子的电子和质子分开到相距无穷远处，需要外力做功。这功的最小值便等于氢原子的电离能量 E

$$E = -W = -13.6 \text{eV}$$

一摩尔氢原子的电离能量为

$$E_{\text{mol}} = N_A E = 8.19 \text{eV} = 1.31 \times 10^6 (\text{J})$$

2 2、轻原子核（如氢及其同位素氘、氚的原子核）结合成为较重原子核的过程，叫做核聚变。核聚变过程可以释放出大量能量。例如，四个氢原子核（质子）结合成一个氦原子核（ α 粒子）时，可释放出 28MeV 的能量。这类核聚变就是太阳发光、发热的能量来源。如果我们能在地球上实现核聚变，就可以得到非常丰富的能源。实现核聚变的困难在于原子核都带正电，互相排斥，在一般情况下不能互相靠近而发生结合。只有在温度非常高时，热运动的速度非常大，才能冲破库仑排斥力的壁垒，碰到一起发生结合。这叫做热核反应。根据统计物理学，绝对温度为 T 时，粒子的平均平动动能为 $\frac{1}{2} kT$ ， $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{J/K}$ 。试计算：

(1) 一个质子以怎样的动能（以 eV 表示）才能从很远的地方达到与另一个质子接触的距离？

(2) 平均热运动动能达到此数值时，温度（以 K 表示）需为多少？

解：(1) 设两个质子迎头相碰，碰撞时两者中心距离为 $2r$

(2)

实际上，由于量子力学的隧道效应，使质子不需要那么大的动能就可以穿过静电壁垒而达到互相接触，故发生热核聚变所需的温度可以低一些，据估算， 10^8K 即可。

2 3、在绝对温度为 T 时，微观粒子热运动能量具有 kT 的数量级。有时人们把能量 kT 折合成电子伏，就说温度 T 为若干电子伏。问：

(1) $T = 1 \text{eV}$ 相当于多少开？

(2) $T = 50 \text{keV}$ 相当于多少开？

(3) 室温 ($T = 300 \text{K}$) 相当于多少 eV ？

解：(1)

(2)

(3)

又如：

太阳表面温度约为 6000K ， $T = 0.52 \text{eV}$

热核反应时温度高达 10^8K ， $T = 8.6 (\text{keV})$

2 4、电量 q 均匀地分布在长为 $2l$ 的细直线上，求下列各处的电位 U ：

(1) 中垂面上离带电线段中心 O 为 r 处，并利用梯度求 E_r ；

(2) 延长线上离中心 O 为 Z 处，并利用梯度求 E_Z ；

(3) 通过一端的垂面上离该端点为 r 处, 并利用梯度求 E_r .

解: (1) 中垂面上离中心为 r_1 处,

(2) 延长线上离中心为 r_2 处

(3) 端垂面上离该端为 r_3 处,

25、如图所示, 电量 q 均匀地分布在长为 $2l$ 的细直线上,

(1) 求空间任一点 $P(r, z)$ 的电位 $U(0 < r < +\infty, -\infty < z < \infty)$;

(2) 利用梯度求任一点 $P(r, z)$ 的场强分量 E_r 和 E_z ;

(3) 将所得结果与上题中的特殊位置相比较。

解: (1) 在图示坐标系中,

(2) 由电势梯度求场强

(3) 与上题比较:

$r=r_1, z=0$ 时, 得中垂面上任一点的电位与场强

$r=0, z=r_2$ 时, 得延长线上任一点的电位与场强

$r=r_3, z=l$ 时, 得端面上任一点的电位与场强

26、一无限长直线均匀带电, 线电荷密度为 η , 求离这线分别为 r_1 和 r_2 两点的两点之间的电位差。

解:

27、如附图所示, 两条均匀带电的无限长平行直线 (与图纸垂直), 电荷的线密度分别为 $\pm \eta$, 相距为 $2a$ 。求空间任一点 $P(x, y)$ 的电位。

解: 取 O 点为电势零点时, 空间任一点的电势为两无限长带电线电势的叠加

若以无穷远处为电势零点, 一条无限长带电线所产生的电势是无穷大, 但两条无限长带等量异号电荷的直线产生的电势是有限值, 因为单位长度的电荷量大小相等而符号相反, 结果电势在相加时, 消去无穷大, 而成为有限值。

28、证明在上题中电位为 U 的等位面是半径为 a 的圆筒面, 筒的轴线与两直线共面, 位置在 $x=0$ 处, 其中 $U=0$ 的等位面是什么形状?

解: P 点的电势为

由于对称性, U 与 z 无关。

为方便, 令 $x = a \cos \theta$,

在三维空间, 这是一个圆柱面, 轴线在 $z-x$ 平面内并与 Z 轴平行, 位置在 $x=0$ 处, 其半径为 a 。

$U=0$ 的等位面为 $X=0$ 的 $Y-Z$ 平面。

29、求两无限长共轴圆筒间的电势分布和两筒间的电位差 (设 $U=0$), 并画出 $U-r$ 曲线。

解: 根据高斯定理可求得两筒间的电场强度为

30、求无限长直圆柱体的电位分布 (以轴线为参考点, 设它电位为零)。

解: 由高斯定理可求得圆柱体内的场强分布为

3 1、求电荷密度为 ρ 的无限长等离子体柱的电势分布（以轴线为参考点，设它的电位为零）
解：由高斯定理可求得场强分布为

以轴线为电势零点，其电位分布为

3 2、一电子二极管由半径 $a=0.50\text{mm}$ 的圆柱形阴极 K 和套在阴极外同轴圆筒形的阳极 A 构成，阳极半径 $R=0.45\text{cm}$ 。阳极电位比阴极电位高 300V 。设电子从阴极发射出来时速度很小，可忽略不计。求：

（1）电子从 K 向 A 走过 2.0mm 时的速度；

（2）电子到达 A 时的速度。

解：设离阴极 K 的轴线为 r 处的电势为 U ，则

3 3、如图所示，一对均匀、等量异号的平行带电平面。若其间距离 d 远小于带电平面的线度时，这对带电面可看成是无限大的。这样的模型可叫做电偶极层。求场强和电位沿垂直两平面的方向 x 的分布，并画出 $E-x$ 曲线和 $U-x$ 曲线（取离两平面等距的 O 点为参考点，令该处的电位为零）。

解：由高斯定理可求得电偶极层内部
电偶极层外部
以 O 点为电势的参考点

$E-x$ 曲线为

$U-x$ 曲线为

3 4、证明半导体突变型 p-n 结内的电位分布为

n 区

p 区

这公式是以哪里作为电位参考点的？p-n 结两侧的电位差是多少？

解：n 区

p 区

以交界面处为电势的零点。P-n 结两侧的电势差为

3 5、证明半导体线性缓变 p-n 结内的电位分布为

这公式是以哪里作为电位参考点的？p-n 结两侧的电位差是多少？

解：（1）

此电位是以 O 点为参考点的。

（2）p-n 结两侧的电位差为

3 6、在示波管中，若已知的不是偏转电极间的场强 E ，而是两极板间的距离 $d=1.0\text{cm}$ 和电压 120V ，其余尺寸相同。求偏转距离 y 和 y' 。

解：示波器内部

(与 § 2 习题 1 6 结果相同)

3 7、电视显象管的第二和第三阳极是两个直径相同的同轴金属圆筒。两电极间的电场即为显象管中的主聚焦电场。图中所示为主聚焦电场中的等位面，数字表示电位值。试用直尺量出管轴上各等位面间的距离，并求出相应的电场强度。

解：用直尺量出管轴上各等位面间的距离

根据

可求出各等位间的电场强度--

场强分布是非均匀电场，但具有对称性。从左至右各等位面间的场强分布为

(单位：伏 / 米)

4.44 9.09 22.22 33.33 50 66 50 33.33 22.22 9.09 4.44

3 8、带电粒子经过加速电压加速后，速度增大。已知电子的质量为 m_e ，电荷绝对值为 e

(1) 设电子质量与速度无关，把静止电子加速到光速 $c=3 \times 10^8 \text{m/s}$ 要多高的电压？

(2) 对于高速运动的物体来说，上面的算法不对，因为根据相对论，物体的动能不是 $\frac{1}{2}mv^2$ ，而是 $(\gamma - 1)m_0c^2$ 。按照这公式，静止电子经过上述电压加速后，速度 v 是多少？它是光速 c 的百分之几？

(3) 按照相对论，要把电子从静止加速到光速，需要多高的电压？这可能吗？

解：(1) 根据能量守恒定律

(2) 对于高速运动的物体，根据能量守恒定律

(3) 根据

所需电压为

因此，根据狭义相对论，不可能把带电粒子加速到光速。

§ 1.5 带电体系的静电能

思考题：

1、为什么在点电荷组相互作用能的公式 $W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} q_i q_j / r_{ij}$ 中有因子 $1/2$ ，而点电荷在外电场中的电位能公式 $W(P) = qU(P)$ 中没有这个因子？

答：在计算点电荷组的相互作用能时，每一对点电荷之间的相互作用能计算了两两次，所以求和公式中有因子 $1/2$ 。点电荷在外电场中的电位能公式没有重复计算。

2、在电偶极子的位能公式 $W = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}$ 中是否包括偶极子的正、负电荷间的相互作用能？

答：公式中的电场是外电场，因此此位能不包括偶极子正负电荷之间的相互作用能。

习题：

1、计算三个放在等边三角形三个顶点的点电荷的相互作用能。设三角形的边长为 l ，顶点上的点电荷都是 q 。

解：根据点电荷组的相互作用能公式

2、 计算上题三角形中心的电荷 $q' =$ 处在其余顶点上三个电荷产生的外电场中的电位能。

解：

3、 求均匀带电球体的电位能，设球的半径为 R ，带电总量为 q 。

解： 根据静电能量公式

4、 利用虚功概念计算电偶极子放在点电荷 Q 的电场中时，偶极子所受的力和力矩。

解：（1） $P \parallel QO$ 时

（2） $P \perp QO$ 时

当 r 与 P 成夹角 θ 时，

5、 利用虚功概念证明：均匀带电球壳在单位面积上受到的静电排斥力为 $\sigma^2 / 2 \epsilon_0$ 。

解：均匀带电球壳的自能为

第一章 结 束

第二章 静电场中的导体和电介质

§ 2.1 静电场中的导体

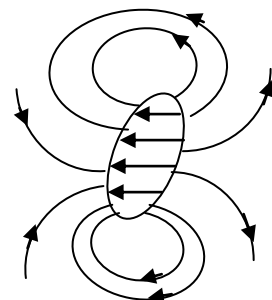
思考题：

1、 试想放在匀强外电场 E_0 中的不带电导体单独产生的电场 E' 的电力线是什么样子（包括导体内和导体外的空间）。如果撤去外电场 E_0 ， E' 的电力线还会维持这个样子吗？

答：电场 E' 的特征有：（1）静电平衡时，在导体内部， E_0 和 E' 的矢量和处处为零。因此 E' 的电力线在导体内部是与 E_0 反向的平行直线；（2）导体上的等量异号电荷，在离导体足够远处激发的场，等效于一个电偶极子激发的场，因此其电力线也等效于电偶极子电场的电力线；（3）导体上电荷密度大的地方，电力线的数密度较大；（4）在导体表面附近， E_0 和 E' 的矢量和的方向一定垂直于导体表面。因此， E' 的方向相对于 E_0 一定位于表面法线的另一侧。

E' 的电力线分布如图所示。值得注意的是，单独考虑感应电荷的场 E' 时，导体并非等位体，表面也并非等位面，所以感应电荷激发的场的电力线在外表面上会有一些起于正电荷而止于负电荷。

如果撤去外电场 E_0 ，静电平衡被破坏， E' 的电力线不会维持这个样子。最后 E' 将因导体上的正、负电荷中和而消失。



- 2、无限大带电面两侧的场强 $E = \sigma / 2\varepsilon_0$ ，这个公式对于靠近有限大小带电面的地方也适用。这就是说，根据这个结果，导体表面元 ΔS 上的电荷在紧靠它的地方产生的场强也应是 $\sigma / 2\varepsilon_0$ ，它比导体表面处的场强小一半。为什么？

答：可以有两种理解：（1）为了用高斯定理求场强，需作高斯面。在两种情形下，通过此高斯面的电通量都是 $\sigma S / \varepsilon_0$ ，但在前一种情况，由于导体内部场强为零，通过位于导体内部的底面的电通量为零，因而造成两公式不同；（2）如果两种情况面电荷密度相同，无限大带电平面的电力线对称地分布在带电面两侧，而导体表面电力线只分布在导体外侧，因此电力线的密度前者为后者的二分之一，故场强也为后者的二分之一。

- 3、根据式 $E = \sigma / \varepsilon_0$ ，若一带电导体面上某点附近电荷面密度为 σ ，这时该点外侧附近场强为 $E = \sigma / \varepsilon_0$ ，如果将另一带电体移近，该点的场强是否改变？公式 $E = \sigma / \varepsilon_0$ 是否仍成立？

答：场强是所有电荷共同激发的。另一带电体移近时，由于它的影响和导体上电荷分布的变化，该点的场强 E 要发生变化。当达到静电平衡时，因为表面附近的场强总与导体表面垂直，应用高斯定理，可以证明 $E = \sigma / \varepsilon_0$ 仍然成立，不过此时的 σ 是导体上的电荷重新分布后该点的电荷密度。

- 4、把一个带电物体移近一个导体壳，带电体单独在导体空腔内产生的电场是否等于零？静电屏蔽效应是怎样体现的？

答：带电体单独在导体空腔内产生的场强不为零。静电平衡的效应表现在，这个场强与导体外表面感应电荷激发的场强，在空腔内的矢量和处处为零，从而使空腔内的场不受壳外带电体电场的影响。

- 5、万有引力和静电力都服从平方反比定律，都存在高斯定理。有人幻想把引力场屏蔽起来，这能否作到？引力场和静电力有什么重要差别？

答：产生静电平衡的关键，在于导体中存在两种电荷，而且负电荷（电子）在电场力作用下能够自由移动，因此在外电场作用下，能够形成一附加电场，使得在导体壳内总场强为零。引力场与此不同，引力场的源只有一种，因此在外部引力场的作用下不可能产生一附加引力场，使得物质壳内部的引力场处处为零，所以屏蔽引力场是不可能的。两种场的重要差别在于：静电场的源有两种，相应的电荷之间的作用力也有两种，引力和斥力；引力场的源只有一种，相应的物质的引力相互作用只有一种引力。

- 6、（1）将一个带正电的导体 A 移近一个不带电的绝缘导体 B 时，导体 B 的电位是升高还

是降低？为什么？

(2) 试论证：导体 B 上每种符号感应电荷的数量不多于 A 上的电量。

答：(1) A 移近时，B 的电位将升高。因为带电体 A 移近时，B 上将出现感应电荷，靠近 A 的一边感应电荷为负，远离 A 的一边为正。从 A 上正电荷发出的电力线，一部分终止于负的感应电荷上，正的感应电荷发出的电力线延伸至无限远，由于同一电力线其起点的电位总是高于终点的电位，若选取无限远处的电位为零，则正的感应电荷所在处(导体 B) 的电位大于零。静电平衡时，导体 B 为等位体，因此整个导体 B 的电位大于零，而在 A 未移近之前，B 的电位为零。可见，当 A 移近时，B 的电位升高了。

(2) 从 A 上正电荷发出的电力线，一部分终止于 B 上，其余延伸至无限远处，因此 B 上的负电荷电量小于 A 上的正电荷电量，且 B 上感应电荷总是等量异号的，所以 B 导体上每种电荷的电量均少于 A 上的电荷。

7、将一个带正电的导体 A 移近一个接地的导体 B 时，导体 B 是否维持零电位？其上是否带电？

答：导体 B 与大地等电位，电位仍为零。不论 B 导体原来是否带电，由于 A 所带电荷的符号、大小和位置的影响，B 将带负电。

8、一封闭的金属壳内有一个带电量 q 的金属物体。试证明：要想使这金属物体的电位与金属壳的电位相等，唯一的办法是使 $q=0$ 。这个结论与金属壳是否带电有没有关系？

答：若 $q \neq 0$ ，金属壳的电位与带电金属物体的电位不等。应用高斯定理可证明，金属壳内表面上带负电，电量为 $-q$ ，从带电的金属物体上发出的电力线终止于金属壳的内表面上，因此带电金属物体的电位高于金属壳的电位。反之，若 $q=0$ ，金属壳和金属物体之间无电场，电荷从它们中的一个移向另一个的过程中，没有电场力做功，所以它们之间无电位差。

由于静电屏蔽效应，金属壳带电与否，不会影响金属壳表面上所包围区域内的场强和电位差，所以，金属壳是否带电对以上证明的结论没有影响。

9、有若干个互相绝缘的不带电导体 A、B、C、...，它们的电位都是零。如果把其中任一个如 A 带上正电，证明：

(1) 所有这些导体的电位都高于零；

(2) 其他导体的电位都低于 A 的电位。

答：(1) 与 6 题解释相同。当选无限远处电位为零时，一个不带电的绝缘导体附近放入一个带正电的物体时，这个导体的电位将升高。因此电位不为零的带正电绝缘导体 A 将使 B、C、... 的电位高于零。

(2) 由 A 发出的电力线总有一部分终止在其他各导体的负的感应电荷上, 由于电力线指向电位降低的方向, 所以其他导体的电位都会低于 A 的电位。

10、 两导体上分别带有电量 $-q$ 和 $2q$, 都放在同一个封闭的金属壳内。证明: 电荷为 $+2q$ 的导体的电位高于金属壳的电位。

答: 应用高斯定理可证明, 金属壳内表面的感应电荷为 $-q$ 。从电荷 $2q$ 的导体表面发出的电力线将有一部分终止于金属壳内表面的负电荷上, 根据电力线起点电位高于终点电位的性质, 电荷为 $2q$ 的导体的电位高于金属壳的电位。

11、 一封闭导体壳 C 内有一些带电体, 所带电量分别为 q_1 、 q_2 、 $\dots$, C 外也有一些带电体, 所带电量分别为 Q_1 、 Q_2 、 $\dots$ 。问:

(1) q_1 、 q_2 、 $\dots$ 的大小对 C 外电场强度和电位有无影响?

(2) 当 q_1 、 q_2 、 $\dots$ 的大小不变时, 它们的分布形状对 C 外的电场强度和电位影响如何?

(3) Q_1 、 Q_2 、 $\dots$ 的大小对 C 内的电场强度和电位有无影响?

(4) 当 Q_1 、 Q_2 、 $\dots$ 的大小不变时, 它们的分布形状对 C 内的电场强度和电位影响如何?

答: (1) 有影响。壳内电荷在壳的外表面产生等量同号的感应电荷, 这些感应电荷将要影响壳外的电场强度和电位。

(2) 没有影响。腔内带电体上发出的电力线全部终止于内表面的等量异号的感应电荷上, 空腔内电荷分布发生变化时, 内表面上感应电荷的分布也随之发生变化, 但力线不穿过导体壳, 因此只要腔内带电体的总电量不变, 导体壳外表面的电荷量就一定, 而这些电荷的分布状态仅取决于外表面的形状。形状一定, 电荷分布就一定, 壳外电场和相对于壳外任意点的电位也就一定。

(3) 对 C 内的电场强度无影响, 对电位有影响, 但对两点之间的电位差无影响。因为外面电荷的场强与导体壳上感应电荷的场强在腔内的矢量和处处为零, 因此外部电荷对腔内的电场强度没有影响, 因而对 C 内两点之间的电位差也无影响。但是导体壳相对于壳外任意点的电位要受壳外电场, 即壳外电荷大小的影响, 而腔内各点的电位与导体壳的电位有关, 所以腔内的电位受外部电荷大小的影响。

(4) 对 C 内的场强无影响, 对电位差也没有影响, 但对电位有影响。理由同上。

12、 若上题中 C 接地, 情况如何?

答：当C接地时，导体壳内和导体壳外将不发生任何互相影响。

13、（1）一个孤立导体球带电 Q ，其表面场强沿什么方向？ Q 在其表面上的分布是否均匀？其表面是否等电位？电位有没有变化？导体内任一点 P 的场强是多少？为什么？

（2）当把另一带电体移近这个导体球时，球表面场强沿什么方向？其上的电荷分布是否均匀？其表面是否等电位？电位有没有变化？导体内任一点 P 的场强有无变化？为什么？

答：（1）一个孤立带电导体球，其表面场强必与表面垂直，即沿半径方向，否则不会处于静电平衡状态。场的分布具有球对称性，球面上各点的电场强度数值相同，根据 $E = \sigma / \epsilon_0$ ，球面上各点的电荷密度也相同，即电荷分布是均匀的。既然场强总是垂直于球面，所以球面是等位面。导体内任一点 P 的场强为零。

（2）当把另一带电体移近时，达到静电平衡后，球面的场强仍与表面垂直，否则将不会处于静电平衡状态。这时，场的分布不再具有球对称性，球面附近各点的场强数值不同，因而电荷分布不是均匀的。既然导体表面处的场强仍处处垂直于导体表面，故表面仍为等位面。导体球的电位将升高。导体内任一点 P 的场强仍为零。

14、（1）在两个同心导体球B、C的内球上带电 Q ， Q 在其表面上的分布是否均匀？

（2）当从外边把另一带电体A移近这一对同心球时，内球C上的电荷分布是否均匀？为什么？

答：（1）具有球对称性， Q 在内球的表面上分布是均匀的。

（2）A的移近使外球的外表面上感应出等量异号的感应电荷，但内部的电场不受A的影响，仍具有球对称性，内球上的电荷分布仍是均匀的。

15、两个同心球状导体，内球带电 Q ，外球不带电，试问：

（1）外球内表面电量 $Q_1 = ?$ 外球外表面电量 $Q_2 = ?$

（2）球外 P 点总场强是多少？

（3） Q_2 在 P 点产生的场强是多少？ Q 是否在 P 点产生场强？ Q_1 是否在 P 点产生场强？如果外面球壳接地，情况有何变化？

答：（1）外球内表面电量 $Q_1 = -Q$ ；外球外表面电量 $Q_2 = Q$ 。

(2) 设球外 P 点到球心的距离为 r , 则 P 点的总场强为 $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}$ 。

(3) Q_2 在 P 点产生的场强是 $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}$ 。Q 和 Q_1 都要在 P 点激发电场, 不过,

其场强的矢量和为零。如果外面球壳接地, 则 $Q_2 = 0$, 仍有 $Q_1 = -Q$, P 点的场强为零。

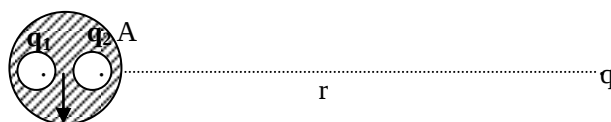
16、在上题中当外球接地时, 从远处移来一个带负电的物体, 内、外两球的电位增高还是降低? 两球间的电场分布有无变化?

答: 这时, 内外两球的电位即不增高也不降低, 外球仍与大地等电位。由于静电屏蔽效应, 两球间的电场分布没有变化。

17、在上题中若外球不接地, 从远处移来一个带负电的物体, 内、外两球的电位增高还是降低? 两球间的电场分布有无变化? 两球间的电位差有无变化?

答: 这时, 内外两球的电位要降低。由于静电屏蔽效应, 两球间的电场无变化, 两球间各点相对于地的电位要变化。因为每点的电位与外壳的电位有关。但是, 任意两点之间的电位差没有变化, 因为两点之间的电位差只由场强分布决定, 场强分布不变时, 电位差不变。

18、如图所示, 在金属球 A 内有两个球形空腔。此金属球整体上不带电。在两空腔中心各放置一点电荷 q_1 和 q_2 。此外在金属球 A 之外远处放置一点电荷 q (q 至 A 的中心距离 $r \gg$ 球 A 的半径 R)。作用在 A、 q_1 、 q_2 和 q 四物体上的静电力各多大?



答: 电荷 q_1 在其所在空腔内壁上感应出 $-q_1$ 的电荷, 在 A 的外表面上感应出 $+q_1$ 的电荷; q_2 在其所在空腔内壁上感应出 $-q_2$ 的电荷, 在 A 的外表面上感应出 $+q_2$ 的电荷; 因此 A 的外表面上感应电荷的总电量为 $q_1 + q_2$ 。($r \gg R$, q 在球面上的感应电荷不计)

q_1 和 $-q_1$ 在空腔外产生的场强的矢量和为零, 因此, 它们对 A 球面上的电荷 $q_1 + q_2$ 以及电荷 q 、 q_2 没有作用力。同样, q_2 和 $-q_2$ 也是如此。电荷 q 和 A 球面上的电荷 $q_1 + q_2$ 由于静电屏蔽效应, 对 q_1 和 q_2 也没有作用力。由于 q 至 A 球中心的距离 $r \gg R$, 电荷 q 和 A 球面上的电荷 $q_1 + q_2$ 的相互作用, 可看作两个点电荷之间的相互作用, 相互作用力满足库仑定律。力的大小为 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q_1 + q_2)q}{r^2}$, 方向在沿着 q 和 A 球心的连线上。

q_1 和 q_2 之间没有相互作用力, 因为它们各自发出的电力线全部终止在自己所在的空腔内表面上。 q_1 只受其所在腔壁上一 q_1 作用, 由于对称性, 作用力相互抵消为零。同样 q_2 所受到的作用力也为零。

19、在上题中取消 $r \gg R$ 的条件，并设两空腔中心的间距为 a ，试写出：

(1) q 给 q_1 的力；(2) q_2 给 q 的力；(3) q_1 给 A 的力；(4) q_1 受到的合力。

答：(1) 电荷之间的相互作用力与其他物质或电荷是否存在无关，所以点电荷 q 给点电荷

$$q_1 \text{ 的作用力为 } F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{(r+a/2)^2}$$

$$(2) \text{ 同理 } q_2 \text{ 给 } q \text{ 的力 } F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{(r-a/2)^2}$$

(3) q_1 给 A 的力 $F = 0$ (A 所带总电量为零，等量异号电荷分布具有轴对称性)

(4) q_1 受到的合力为零。因为所受力包括四部分——

一是空腔内表面上与其等量异号的感应电荷对其的作用力，由于感应电荷均匀分布于内球面上，由对称性可知 $F_1 = 0$ ；

二是 q_2 及其空腔内表面上的感应电荷 $-q_2$ 对其的作用力， $-q_2$ 在内表面上的分布也是均匀的， q_2 及 $-q_2$ 对 q_1 的作用力 $F_2 = 0$ ；

三是 A 球外表面感应电荷 $q_1 + q_2$ 对其作用， $q_1 + q_2$ 均匀分布于 A 球面上，在导体内部产生的场强为零，所以作用力 $F_3 = 0$

四是 q 及 A 上感应电荷对其作用。导体外表面上感应电荷在导体内产生的场正好与引起它的电荷在导体内产生的电场互相抵消，使得导体内场强处处为零，所以合力 $F_4 = 0$ 。

20、(1) 若将一个带正电的金属小球移近一个绝缘的不带电导体时，小球受到吸引力还是排斥力？

(2) 若小球带负电，情况将如何？

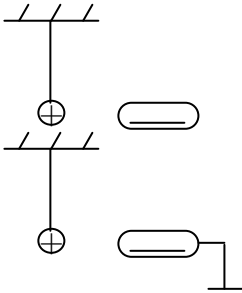
(3) 若当小球在导体近旁（但未接触）时，将导体远端接地，情况如何？

(4) 若将导体近端接地，情况如何？

(5) 若导体在未接地前与小球接触一下，将发生什么变化？

(6) 若将导体接地，小球与导体接触一下后，将发生什么变化？

答：



(1) 导体在靠近小球一端感应电荷为负电荷，小球受吸引力；

(2) 若小球带负电，导体在靠近小球一端感应电荷为正电荷，小球仍受吸引力；

(3) 导体远端接地时, 导体整体带负电, 小球所受力为吸引力;

(4) 导体近端接地时, 导体仍带负电, 小球所受力为吸引力;

(5) 导体在未接地前与小球接触一下, 导体也带正电, 小球受到排斥力;

(6) 导体接地, 小球与导体接触后, 所有电荷将通过导体流入大地, 小球与导体均不带电, 因此小球与导体之间没有相互作用力。

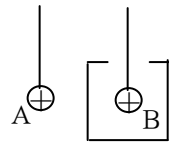
2 1、(1) 将一个带正电的金属小球 B 放在一个开有小孔的绝缘金属壳内, 但不与接触。将另一带正电的试探电荷 A 移近时, A 将受到吸引力还是排斥力? 若将小球 B 从壳内移去后, A 将受到什么力?

(2) 若使小球 B 与金属壳内部接触, A 受什么力? 这时再将小球 B 从壳内移去, 情况如何?

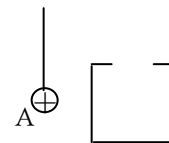
(3) 使小球不与壳接触, 但金属壳接地, A 将受什么力? 将接地线拆掉后, 又将小球 B 从壳内移去, 情况如何?

(4) 如情形 (3), 但先将小球从壳内移去后再拆除接地线, 情况与 (3) 相比有何不同?

答: (1) 在此情形下, 带正电的 B 球将在金属壳内表面感应出负电荷, 在金属壳外表面感应出正电荷, B 球和金属壳组成的体系在金属壳外部的场, 只由金属壳外表面的电荷分布决定, 由于金属壳外表面带正电, 所以处在这个电荷的场中的带正电的试探电荷 A 将受到排斥力 (这里忽略不计 A 的场对金属壳外表面电荷分布的影响, 否则, 在一定条件下, 它们之间可能出现相互吸引的情况)。

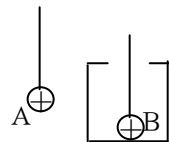


若将 B 从壳内移去, 带正电的试探电荷 A 将使金属壳外表面上产生感应电荷, 靠近 A 的一边出现负电荷, 远离 A 的一边出现正电荷。

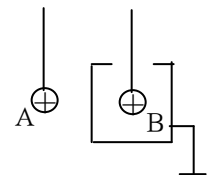


距离不同, 吸引力大于排斥力, 结果 A 将受到吸引力作用。

(2) 小球 B 与金属壳内部接触, B 的正电荷将分布在金属壳的外表面, 处于此电场中的 A 将受到排斥力的作用。这时再将 B 从金属壳内移去, 情况不变。



(3) B 不与金属壳接触, 但金属壳接地时, 金属壳外表面由于 A 的存在而出现的感应电荷消失。但由于带正电的 A 的存在, 将在离 A 最近的一边出现负的感应电荷, 它将使 A 球受到吸引力作用。



将接地线拆掉后, 又将 B 从壳内移去, 内表面上的负电荷将分布

在外表面上，最后结果是A球所受的吸引力增大。

(4) 先将B移去再拆去地线，与(3)的最后结果相同，但引力大小不同。

在(3)中，由于静电平衡状态下先拆掉地线，各部分电荷分布不变，再将B从壳内移去，内壁的负电荷转移到外表面后不能入地，A球受到的吸引力增大。

在(4)中，先将B从壳内移去，内壁的负电荷转移到外表面后，全部从接地线入地，静电平衡后再拆去地线，A球受到的吸引力将不增加。

2 2、在一个孤立导体球壳的中心放一个点电荷，球壳内、外表面上的电荷分布是否均匀？

如果点电荷偏离球心，情况如何？

答：电荷放在球心，由于球对称性，球壳内、外表面上的电荷分布是均匀的。如果点电荷偏离球心，力线不是从球心出发，但在内表面附近，又必须垂直于球壳的内表面，所以球壳内的场强分布不再具有球对称性，球壳内表面上的电荷分布不再均匀。但是，点电荷发出的电力线终止在内表面上，不影响球壳外部，因此，球壳外表面的电荷仍然按外表面的形状均匀分布。

2 3、如图所示，金属球置于两金属板间，板间加以高压，则可看到球与板间放电的火花。

若再在下面板上金属球旁放一等高度的尖端金属，问放电火花将如何变化？想一想这现象可有何应用？

答：若在下面板上金属球旁放一等高度的尖端金属，则球和上板之间不再出现放电火花，火花只出现在尖端金属与上板之间。这是由于导体尖端处面电荷密度大，附近的场强特别强，使得空气易于在金属尖端和上板之间被击穿而发生火花放电。

上述现象说明，曲率半径小的尖端比曲率半径大的表面易于放电。利用这种现象可以做成避雷针，避免建筑物遭受雷击；让高压输电线表面作得很光滑，其半径不要过小，避免尖端放电而损失能量；高压设备的电极作成光滑球面，避免尖端放电而漏电，以维持高电压等。

习题：

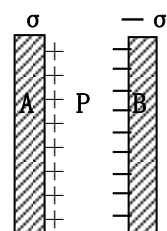
1、如图所示，一平行板电容器充电后，A、B两极板上电荷的面密度分别为 σ 和 $-\sigma$ 。

设P为两板间任一点，略去边缘效应，求：

(1) A板上的电荷在P点产生的电场强度 E_A ；

(2) B板上的电荷在P点产生的电场强度 E_B ；

(3) A、B两板上的电荷在P点产生的电场强度 E ；



(4) 若把B板拿走, A板上电荷分布如何? A板上的电荷在P点产生的电场强度为多少?

解: 略去边缘效应, 两极板上的电荷是均匀分布的电荷, 两极板间的电场是均匀电场。由对称性和高斯定理可得

(1) A板上的电荷在P点产生的电场强度 $\vec{E}_A = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}$ (A板法线方向上的单位矢量, 指向B板);

(2) B板上的电荷在P点产生的电场强度 $\vec{E}_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}$

(3) A、B两板上的电荷在P点产生的电场强度 $\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}$

(4) B板拿走后, A板上电荷将均匀分布在两个表面上, 面电荷密度减小为一半。

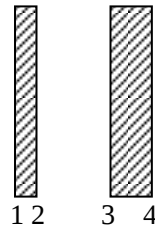
在P点产生的场强为两个表面上电荷产生场强的叠加, $\vec{E}_A = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}$

2、证明: 对于两个无限大的平行平面带电导体板来说,

(1) 相向的两面上, 电荷的面密度总是大小相等而符号相反;

(2) 相背的两面上, 电荷的面密度总是大小相等而符号相同。

(3) 若左导体板带电+3 微库/米², 右导体板带电+7 微库/米², 求四个表面上的电荷。



解: 由对称性可知, 在每个面上, 电荷必定都是均匀分布的, 在两板间和两板外的电场必定都是均匀电场, 电场强度的方向都与板面垂直。

(1) 作柱形高斯面如图所示, 由高斯定理得

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{1}{\varepsilon_0} (\sigma_2 + \sigma_3) S$$

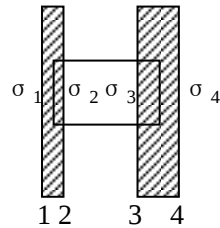
$$\therefore \sigma_2 = -\sigma_3$$

(2) 根据无限大带电平面均匀电荷产生电场强度的公式和电场强度的叠加原理, 导体内任一点P的电场强度为

$$\vec{E}_P = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{e} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} (-\vec{e}) + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} (-\vec{e}) + \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} (-\vec{e}) = \frac{1}{2\varepsilon_0} (\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4) \vec{e} = 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_4$$

(3) 应用前述结果及电荷守恒定律



$$\begin{aligned}
 \sigma_2 &= -\sigma_3 \\
 \sigma_1 &= \sigma_4 \\
 Q_1 &= (\sigma_1 + \sigma_2)S \\
 Q_2 &= (\sigma_3 + \sigma_4)S
 \end{aligned}
 \quad \text{解得:} \quad
 \begin{aligned}
 \sigma_2 &= -\sigma_3 = \frac{1}{2} \frac{(Q_1 - Q_2)}{S} = -2\mu\text{C}/\text{m}^2 \\
 \sigma_1 &= \sigma_4 = \frac{1}{2} \frac{(Q_1 + Q_2)}{S} = 5\mu\text{C}/\text{m}^2
 \end{aligned}$$

由此可知, 当 $Q_1=Q_2$ 时, 相向的两面上无电荷分布, 相背的两面上电荷等量同号;

当 $Q_1=-Q_2$ 时, 相背的两面上无电荷分布, 相向的两面上电荷等量异号。

3、两平行金属板分别带有等量的正负电荷。两板的电位差为 120V, 两板的面积都是 3.6cm^2 , 两板相距 1.6mm。略去边缘效应, 求两板间的电场强度和各板上所带的电量。

解: (1) 两板间电场看作均匀电场, 两板的电势差为

$$\begin{aligned}
 U_+ - U_- &= \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ed \\
 E &= \frac{U_+ - U_-}{d} = 7.5 \times 10^4 (\text{V}/\text{m})
 \end{aligned}$$

电场强度的方向由电势高的板指向电势低的板。

(2) 利用上题结果, 相背的两面上没有电荷, 相向的两面上电荷面密度大小相等而符号相反。板上的电量为 $Q = \sigma S = \pm \varepsilon_0 ES = \pm 2.4 \times 10^{-10} \text{C}$

4、两块带有等量异号电荷的金属板 a 和 b, 相距 5.0mm, 两板的面积均为 150cm^2 , 电量的大小都是 $2.66 \times 10^{-8} \text{C}$, a 板带正电并接地。以地的电位为零, 并略去边缘效应, 问:

(1) b 板的电位是多少?

(2) a、b 间离 a 板 1.0mm 处的电位是多少?

解: a、b 两板上的电荷都均匀分布在相向的两面上,

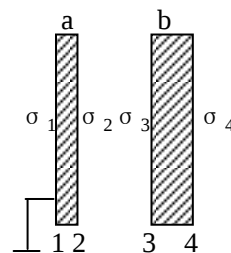
(1) 两板间的电场强度为

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \vec{e}$$

$$\text{b 板的电位为 } U_b = U_a - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 - \int_a^b E dl = -\frac{Ql}{\varepsilon_0 S} = -1.0 \times 10^3 \text{V}$$

(2) 两板之间离 a 板 1.0mm 处的电位是

$$U_b = -\int_a^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^P E dl = -U_b \frac{l_p}{l} = -2.0 \times 10^2 \text{V}$$



5、三平行金属板 A、B 和 C, 面积都是 200cm^2 , AB 相距 4.0mm, AC 相距 2.0mm, BC 两板都接地。如果使 A 板带正电 $3.0 \times 10^{-7} \text{C}$, 在略去边缘效应时, 问 B 板和 C 板上感应电

荷各是多少？以地的电位为零，问 A 板的电位是多少？

解：（1）BC 两板都接地，故两板上只有向着 A 的一面有感应电荷。

由对称性和高斯定理得

$$\sigma_C + \sigma_{AC} = 0$$

$$\sigma_B + \sigma_{AB} = 0$$

$$\therefore \sigma_B + \sigma_C = -\sigma_{AB} - \sigma_{AC}$$

三块板上电荷量的关系为 $Q_B + Q_C = -Q_A$

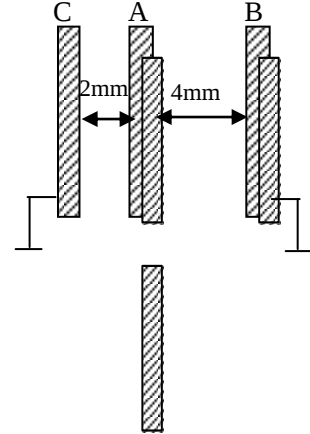
由高斯定理得 AB 间的电场强度为 $\vec{E}_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\epsilon_0} \vec{e}$

AC 间的电场强度为 $\vec{E}_{AC} = \frac{\sigma_{AC}}{\epsilon_0} (-\vec{e})$

$$U_B = U_C \rightarrow \frac{\sigma_C}{\epsilon_0} d_{AC} = \frac{\sigma_B}{\epsilon_0} d_{AB} \rightarrow Q_C = \frac{d_{AB}}{d_{AC}} Q_B$$

联立解得 $Q_B = -1.0 \times 10^{-7} C$,

$$Q_C = -2.0 \times 10^{-7} C$$



$$(2) \text{ A 板的电位为 } U_A = E_{AB} d_{AB} = -\frac{\sigma_B}{\epsilon_0} d_{AB} = -\frac{Q_B}{\epsilon_0 S} d_{AB} = 2.3 \times 10^3 V$$

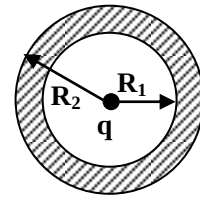
6、点电荷 q 处在导体球壳的中心，壳的内外半径分别为 R_1 和 R_2 ，求场强和电位的分布，并画出 $E-r$ 和 $U-r$ 曲线。

解：（1）由高斯定理得场强的分布为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r < R_1)$$

$$E = 0 \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R_2)$$



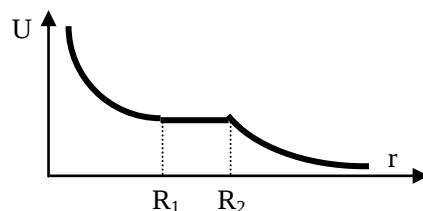
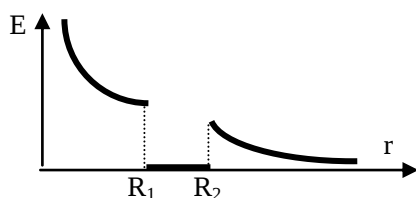
（2）电位分布为

$$U_1 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (r < R_1)$$

$$U_2 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$U_3 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R_2)$$

（3） $E-r$ 和 $U-r$ 曲线如图所示



球壳内外面上电场强度的值，等于该面两边趋于该面时电场强度极限值的平均值。

7、在上题中，若 $q=4.0 \times 10^{-10} \text{C}$, $R_1=2\text{cm}$, $R_2=3\text{cm}$, 求：

- (1) 导体球壳的电位；
- (2) 离球心 $r=1\text{cm}$ 处的电位；
- (3) 把点电荷移开球心 1cm , 求导体球壳的电位。

解：(1) 导体球壳的电位为 $U = \int_{R_2}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 120\text{V}$

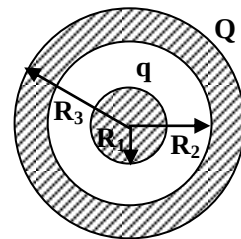
(2) 离球心为 r 处的电位为

$$U = \int_r^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 300\text{V}$$

(3) 导体球壳的电位取决于球壳外表面电荷分布所激发的电场，与点电荷在球壳内的位置无关。因此导体球壳电位仍为 300V 。

8、半径为 R_1 的导体球带有电量 q , 球外有一个内、外半径分别 R_2 、 R_3 的同心导体球壳，壳上带有电荷 Q 。

- (1) 求两球的电位 U_1 和 U_2 ；
- (2) 两球的电位差 ΔU ；
- (3) 以导线把球和壳连在一起后， U_1 、 U_2 和 ΔU 分别是多少？
- (4) 在情形 (1)、(2) 中，若外球接地， U_1 、 U_2 和 ΔU 分别是多少？
- (5) 设外球离地面很远，若内球接地，情况如何？



解：(1) 由对称性和高斯定理求得，各区域的电场强度和电位分别为

$$\begin{aligned}
E &= 0 (r < R_1) & U_1 &= \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} (r \leq R_1) \text{内球电位} \\
E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (R_1 < r < R_2) & U_2 &= \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} (R_1 \leq r \leq R_2) \\
E &= 0 (R_2 < r < R_3) & U_3 &= \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_3} (R_2 \leq r \leq R_3) \text{外球电位} \\
E &= \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (r > R_3) & U_4 &= \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r} (r \geq R_3)
\end{aligned}$$

$$(2) \text{ 两球的电位差为 } \Delta U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$(3) \text{ 以导线连接内外球, 所有电荷将分布于球壳的外表面上, } U_{\text{内}} = U_{\text{外}} = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$\Delta U = 0$$

(4) 若外球接地, 则情形 (1) (2) 中球壳内表面带电 $-q$, 外表面不带电

$$\begin{aligned}
\text{内球电位 } U_1 &= \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\
\text{外球电位 } U_2 &= 0 \rightarrow \Delta U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)
\end{aligned}$$

(5) 内球电位为零。设其上所带电量为 q' ,

$$\begin{aligned}
\text{内球电位 } U_1 &= \int_{R_1}^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q'}{R_1} - \frac{q'}{R_2} + \frac{q'+Q}{R_3} \right) = 0 \rightarrow q' = \frac{QR_1R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 - R_1R_3} \\
\text{外球电位 } U_2 &= \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(R_1 - R_2)}{R_1R_2 + R_2R_3 - R_1R_3} \\
\Delta U &= U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(R_1 - R_2)}{R_1R_2 + R_2R_3 - R_1R_3}
\end{aligned}$$

9、上题中, 设 $q=10^{-10}\text{C}$, $Q=11 \times 10^{-10}\text{C}$, $R_1=1\text{cm}$, $R_2=3\text{cm}$, $R_3=4\text{cm}$, 试计算各种情形中的 U_1 、 U_2 和 ΔU , 并画出 $U-r$ 曲线。

解: 利用上题结果代入数据得

$$(1) U_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} = 330V$$

$$U_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} = 270V$$

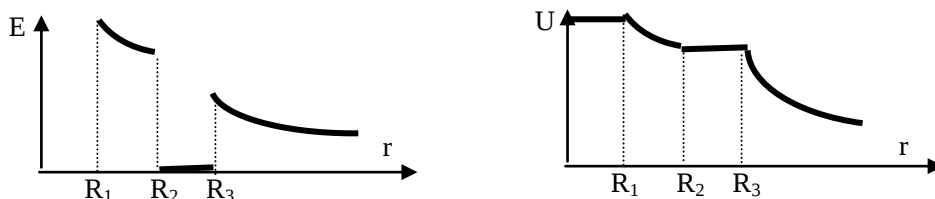
$$(2) \Delta U = U_1 - U_2 = 60V$$

$$(3) U_1 = U_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} = 270V$$

$$(4) U_1 = 60V, U_2 = 0, \Delta U = U_1 - U_2 = 60V$$

$$(5) U_1 = 0, U_2 = 180V, \Delta U = U_1 - U_2 = -180V$$

函数曲线如图所示。



- 1 0、 设范德格喇夫起电机的球壳与传送带上喷射电荷的尖针之间的电位差为 $3.0 \times 10^6 V$, 如果传送带迁移电荷到球壳上的速率为 $3.0 \times 10^{-3} C/s$, 则在仅考虑电力的情况下, 必须用多大的功率来开动传送带?

解: 开动传送带的功率至少应等于迁移电荷做功的功率

$$N = \frac{A}{t} = \frac{q\Delta U}{t} = vU = 9000W$$

- 1 1、 德格喇夫起电机的球壳直径为 1m。空气的击穿场强为 30KV/cm。这起电机最多能达到多高的电位?

解: 对空间任一点 P, 球壳所带电荷产生的电场的场强和电位分别为

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \\ U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \end{aligned} \right\} \frac{U}{E} = r$$

$$U_{\max} = ER = 1.5 \times 10^6 V$$

- 1 2、 同轴传输线是由两个很长且彼此绝缘的同轴金属直圆柱体构成。设内圆柱体的电位为 U_1 , 半径为 R_1 , 外圆柱体的电位为 U_2 , 内半径为 R_2 , 求其间离轴为 r 处 ($R_1 < r < R_2$) 的电位。

解: 由高斯定理可解得内圆柱体和外圆柱体之间的电场强度为

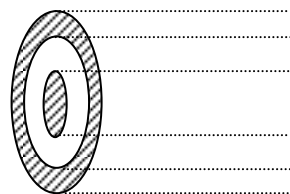
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

设 r 处的电位为 U , 则 $U_1 - U = \int_{R_1}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_1}$

$$\therefore U_1 - U_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} = \frac{U_1 - U_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$\therefore U = U_1 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_1} = U_1 - (U_1 - U_2) \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}$$



- 1 3、 同轴传输线是由两个很长且彼此绝缘的同轴金属直圆柱体构成。设内圆柱体的半径为 R_1 , 外圆柱体的内半径为 R_2 , 两圆柱体的电位差为 U 。求其间离轴为 r_1 和 r_2 处 ($R_1 < r_1 < r_2 < R_2$) 的电位差。

解: 利用上题结果, 离轴为 r_1 和 r_2 处 ($R_1 < r_1 < r_2 < R_2$) 的电位差为

$$U_1 - U_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = U \frac{\ln(r_2/r_1)}{\ln(R_2/R_1)}$$

- 1 4、 一很长直导线横截面的半径为 a , 这线外套有内半径为 b 的同轴导体圆筒, 两者互相绝缘, 外筒接地, 它的电位为零。导线电位为 U , 求导线和筒间的电场强度分布。

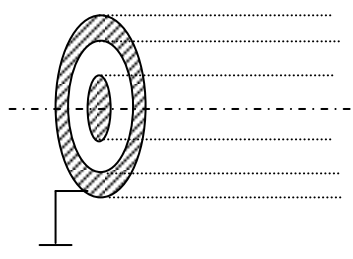
解: 由高斯定理可求得 $a < r < b$ 区域内的电场强度为 $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$

导线相对于外筒的电位差为

$$U_a - U_b = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} = \frac{U_a - U_b}{\ln(b/a)} = \frac{U}{\ln(b/a)}$$

$$\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{U}{r \ln(b/a)}$$



§ 2.2 电容和电容器

思考题:

- 1、 两导体 A、B 相距很远 (因此它们都可以看成是孤立的), 其中 A 原来带电, B 不带电。

现用一根细长导线将两球联接。电荷将按怎样的比例在两球上分配？

答：当用导线联接 A、B 时， $U_A=U_B$ ，两导体所带电量与电容成正比。如果两导体为球形，

$$\text{则 } \frac{q_A}{q_B} = \frac{C_A}{C_B} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_A}{4\pi\epsilon_0 R_B} = \frac{R_A}{R_B}, \text{ 即电量与导体球的半径成正比。}$$

2、用一个带电的小球与一个不带电的绝缘大金属球接触，小球上的电荷会全部传到大球上去吗？为什么？

答：只要大球的半径是有限的，小球的电荷就不会全部传到大球上去。因为两球接触后，可看作一个孤立导体，表面的电荷分布与导体表面曲率有关。两球曲率不同，电荷的面密度不同。只要大球的半径与小球半径之比不是充分大，小球上保留的电荷与大球上的电荷相比就不能忽略。

3、将一个带电导体接地后，其上是否还会有电荷？为什么？分别就此导体附近有无其他带电体的不同情况加以讨论。

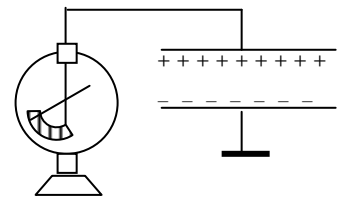
答：当带电体附近无其他带电体时，将带电体接地后，实验表明带电体上的电荷就会消失，

这可以由静电平衡时，导体表面的电荷分布与曲率有关解释。 $\frac{q}{Q} = \frac{r}{R}$ ，由于实际问题

中，带电体的线度与地球半径比较可以忽略，即 $r/R \rightarrow 0$ ，所以 $q/Q \rightarrow 0$ 。可见，不论带电体和地球联接前如何带电，它们连接后，带电体上保留的电荷可以视为零。

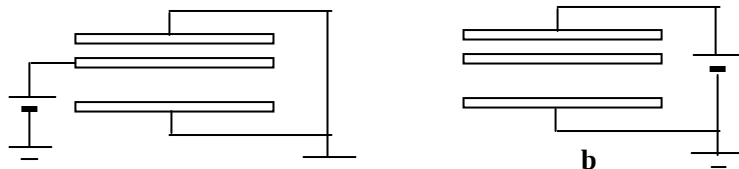
当接地带电体附近有其他带电体时，由于其他带电体在此接地带电体上产生异号感应电荷，接地导体上仍然还会有电荷。不过，这些电荷的符号和大小与原来的带电体情况无关，只取决于附近其他带电体所带的电荷的符号、大小和位置。

4、附图中所示是用静电计测量电容器两极板间电压的装置。试说明，为什么电容器上电压大时，静电计的指针偏转也大？



答：静电计可看作一个电容器，外壳为一极板，指针和支撑刻度盘的杆子为另一极板。平行板电容器与静电计构成的电容器并联。电压相等。电容一定时，电量与电压成正比。当平行板电容器的电压高时，静电计电容器上的电压也高。因而静电计指针和支撑刻度盘的金属杆上的电量也大，从而指针和杆子的排斥作用也大，静电计的指针偏转也就大。

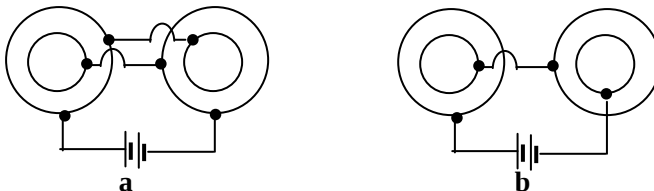
5、附图中三块平行金属板构成两个电容器。试判断图 a、b 中哪种接法是串联，哪种接法是并联。



a

答：a 是并联。b 是串联。

6、判断图 a、b 中两个同心球电容器是串联还是并联。



答：a 是并联。b 是串联。

7、附图中四个电容器大小相同 ($C_1=C_2=C_3=C_4$)，电源电压为 U ，下列情况下每个电容器上的电压是多少？

(1) 起先电键 K_2 断开，接通 K_1 再接通 K_2 ，然后断开 K_1 ；

(2) 起先电键 K_2 断开，接通 K_1 ，断开 K_1 ，然后接通 K_2 。

答：(1) K_2 断开，接通 K_1 ， $U_1=U_2=U_3=U/3$ ， $U_4=0$ ；

再接通 K_2 ， C_2 与 C_4 并联， $C_{24}=2C$

$$U_1 = U_3 = 2U_{24}, \quad U_1 + U_3 + U_{24} = U;$$

$$U_1 = U_3 = 2U/5 \quad U_{24} = U/5$$

断开 K_1 ，情况不变。

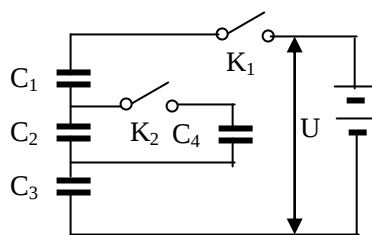
(总电压为 U 保持不变)

(2) 电键 K_2 断开，接通 K_1 ， $U_1=U_2=U_3=U/3$ ， $U_4=0$ ；

断开 K_1 ，电量保持一定；

接通 K_2 ， $U_1 = U_3 = U/3$ ， $U_{24} = U/6$ ， $U_2 = U_4 = U/6$

(电量不变，总电容增大，总电压减小)

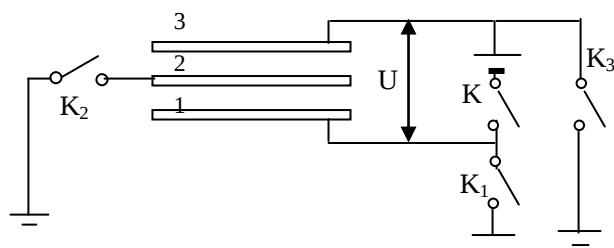


8、附图中三平行金属板面积相等，且等距。下列情形下各板的电位是多少？设原来电键 K 和 K_1 已接通， K_2 和 K_3 是断开的。

(1) 断开 K ，断开 K_1 ，接通 K_2 ；

(2) 断开 K, 接通 K_2 , 断开 K_1 ;

(3) 断开 K, 接通 K_2 , 断开 K_2 , 接通 K_3 。



解: 三平行金属板面积相等, 且等距, 两相邻板之间构成的电容器电容相等。当最初电键 K 和 K_1 已接通, K_2 和 K_3 断开时, $U_1=0$, $U_2=U/2$, $U_3=U$ 。

(1) 断开 K, 断开 K_1 , q_1 和 q_3 不变; 接通 K_2 , $U_2=0$ 。各板上电荷分布不变, 只是零电位点变动, $U_1=-U/2$, $U_3=U/2$ 。

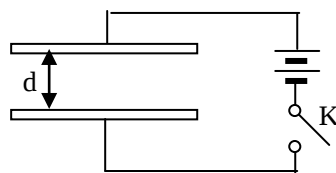
(2) 断开 K, q_3 不变; 接通 K_2 , $U_1=U_2$, 其间 $E=0$, 即 2 板下面正感应电荷与 1 板上负感应电荷中和。2 板和 3 板之间 E 不变; 再断开 K_1 , 情况不变。

$$U_1=U_2=0, U_3=U/2。$$

(3) 断开 K, q_3 不变; 接通 K_2 , q_1 与 q_2 中和; 断开 K_2 , 2 板上剩下的负电荷不变。接通 K_3 , $U_3=U_1$; 但由于 2 板上负电荷的作用, 为保持导体内 $E=0$, $U_3=U_1$, 3 板和 1 板必须有原来一半的电荷, 各板间电场为原来一半, 而且方向指向 2 板。所以 $U_2=-U/4$ 。

9、如附图所示, 用电源将平行板电容器充电后即将电键 K 断开。然后移近两极板。在此过程中外力作正功还是作负功? 电容器储能增加还是减少?

答: 两极板带等量异号电荷, 相互吸引。在移近两板的过程中, 电场力做正功, 外力做负功, 能量减少。



电容器充电后 K 断开, 两极板上的电荷保持不变。

在移近两极板的过程中, 电容器的电容增大, 因而电压减小。由电容器储能公式

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \text{ 可知, 电容器的储能减少。}$$

10、在上题中, 如果充电后不断开 K, 情况怎样? 能量是否守恒?

答: 充电后不断开 K 时, 在移近两板的过程中, 外力仍做负功, 但电压保持不变而电容增大, 电容器储能增加。增加的能量来自于电源所做的功。

在恒压下增大电容, 电源一方面为电容器增加电量, 另一方面提供一部分能量对外

做功。能量守恒。

1 1、 将一个接地的导体 B 移近一个带正电的孤立导体 A 时, A 的电位是升高还是降低?

答: A 的电位将降低。

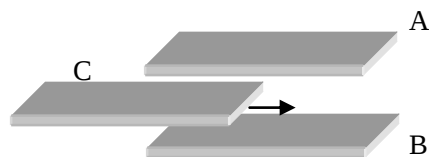
如果 B 不接地, A 带正电, 在其电场作用下, 附近的导体 B 上出现等量异号的感应电荷。近 A 端为负电荷, 远 A 端为正电荷。若取无限远处为电位的零点, 则正电荷激发的场中各点电位为正, 负电荷激发的电场中各点电位为负。导体 A 上的电位等于本身电荷分布激发的场和 B 上感应电荷激发的场的叠加。B 上感应电荷对 A 的电位的贡献是负值, 因而 B 离 A 越近, A 的电位越低。

B 是接地导体时, 其上只有负的感应电荷, 因此 A 的电位降低。

从能量角度分析, 当 B 移近 A 时, 受 A 的电场作用, 将有负电荷从大地流入导体 B, 在此过程中, 电场力做正功, A 的电势能减少——电量不变, 电位降低。

B 移近 A 的过程中, A 的电容增大, 电量不变, 电位降低。

1 2、 两绝缘导体 A、B 分别带等量异号电荷。现将第三个不带电的导体 C 插入 A、B 之间 (不与它们接触), U_{AB} 增大还是减少?



答: U_{AB} 将减少。

A、B 带等量异号电荷, 且保持电量不变。在导体 C 进入 AB 之间的过程中, C 上出现等量异号的感应电荷, C 所受 A、B 的合力方向指向 C 的插入方向, 电场力做正功, 能量减少。由 $W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ 可知, U_{AB} 减小。

如果导体 C 有一定厚度 t, 插入 A、B 之间时, 相当于减小了两极板之间的距离, 因 A、B 所带电量不变, 两板之间的场强不变, $U_{AB} = E(d-t) < Ed$ 。

习题:

1、 地球的半径为 6370km, 把地球当作真空中的导体球, 求它的电容。

解: $C = 4\pi\epsilon_0 R = 7.08 \times 10^{-4} F$

2、 空气电容器的两平行板相距为 1.0mm, 两极板都是正方形, 面积相等。要想它的电容分别是 (1) 100PF; (2) 1.1 μF ; (3) 1.0F, 正方形的边长需多大?

解: $C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \rightarrow S = \frac{dC}{\epsilon_0} = a^2 \rightarrow a = \sqrt{\frac{dC}{\epsilon_0}}$

(1) $a=10.6\text{cm}$ (2) $a=10.6\text{m}$ (3) $a=10.6\text{km}$

- 3、面积都是 2.0m^2 的两平行导体板放在空气中相距 5.0mm ，两板电位差为 1000V ，略去边缘效应，求：

- (1) 电容 C ；
 (2) 各板上的电量 Q 和电荷的面密度 σ ；
 (3) 板间的电场强度 E 。

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = 3.6 \times 10^{-9} \text{ F}$$

解：
 $Q = CU = 3.6 \times 10^{-6} \text{ C} \rightarrow \sigma = Q/S = 1.8 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$
 $E = U/d = 2.0 \times 10^5 \text{ V/m}$

- 4、如附图所示，三块平面金属板 A、B、C 彼此平行放置，AB 之间的距离是 BC 之间距离的一半。用导线将外侧的两板 A、C 相联并接地，使中间导体板 B 带电 $3\mu\text{C}$ ，三个导体板的六个面上的电荷各为多少？

解：相当于两个电容器并联

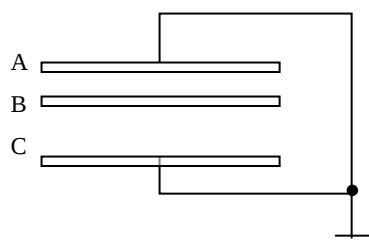
$$C_{AB} = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{q_1}{U_{AB}}$$

$$C_{BC} = \frac{\epsilon_0 S}{2d} = \frac{q - q_1}{U_{BC}}$$

$$U_{AB} = U_{BC} \rightarrow \frac{q_1 d}{\epsilon_0 S} = \frac{2(q - q_1)d}{\epsilon_0 S}$$

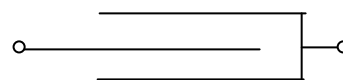
$$\text{解得 } q_1 = \frac{2}{3} q \mu\text{C} = 2\mu\text{C}, q - q_1 = 1\mu\text{C}$$

$$\therefore \sigma_1 = 0, \sigma_2 = -2\mu\text{C}, \sigma_3 = 2\mu\text{C}, \sigma_4 = 1\mu\text{C}, \sigma_5 = -1\mu\text{C}, \sigma_6 = 0$$



- 5、如附图所示，一电容器由三片面积都是 6.0cm^2 的锡箔构成，相邻两箔间的距离都是 0.10mm ，外边两箔片联在一起成为一极，中间箔片作为另一极。

- (1) 求电容 C ；



- (2) 若在这电容器上加 220V 的电压，问各箔上电荷的面密度分别是多少？

解：
 $C = C_1 + C_2 = 2\epsilon_0 S/d = 1.07 \times 10^{-10} \text{ F}$

$$U_1 = U_2 \rightarrow Q_1 = Q_2 = C_1 U = \epsilon_0 S U/d = \sigma S \rightarrow \sigma = Q/S = 1.96 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

- 6、如附图所示，面积为 1.0m^2 的金属箔 11 张平行排列，相邻两箔间的距离都是 5.0mm ，奇数箔联在一起作为电容器的一极，偶数箔联在一起作为另一极。求电容 C 。

解：相当于十个相同的电容器并联。

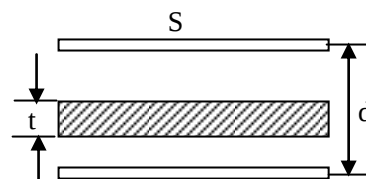
$$C = 10C_1 = 10 \frac{\epsilon_0 S}{d} = 1.78 \times 10^{-8} \text{ F}$$



- 7、如附图所示，平行板电容器两极板的面积都是 S ，相距为 d ，其间有一厚为 t 的金属片。略去边缘效应，

(1) 求电容 C ；

(2) 金属片离极板的远近有无影响？



解：相当于两个电容器串联。设金属板距上板距离为 x

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x}{\epsilon_0 S} + \frac{d - (t + x)}{\epsilon_0 S} = \frac{d - t}{\epsilon_0 S}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d - t}$$

t 不变时 C 亦不变, 与金属片离极板的远近无关

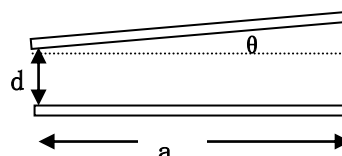
$$\text{当 } t \rightarrow 0 \text{ 时, } C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

$$\text{当 } t \rightarrow d \text{ 时, } C \rightarrow \infty$$

$$\text{或者: } U = \int_0^{d-t} E dl = E(d - t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - t) = \frac{Q}{\epsilon_0 S} (d - t) \rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{(d - t)}$$

- 8、如附图所示，一电容器两极板都是边长为 a 的正方形金属平板，两板不是严格平行，而是有一夹角 θ 。证明：当 $\theta \ll d/a$ 时，略去边缘

$$\text{效应，它的电容为 } C = \frac{\epsilon_0 a^2}{d} \left(1 - \frac{a\theta}{2d}\right)$$



解：将两板同时分割为狭长的细窄条，长为 a ，宽为 dx

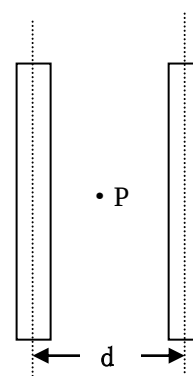
在 dx 宽度内，上下两平面仍近似平行，

$$dC = \frac{\epsilon_0 dS}{d + x \sin \theta} = \frac{\epsilon_0 a dx}{d + x \sin \theta}$$

$$C = \int_0^a \frac{\epsilon_0 a}{d + x \sin \theta} dx = \frac{\epsilon_0 a}{\theta} \ln\left(1 + \frac{a\theta}{d}\right)$$

- 9、半径都是 a 的两根平行长直导线相距为 d ($d \gg a$)，求单位长度的电容。

解：由高斯定理可求得两导线之间垂直连线上任意一点 P 的场强为



$$E = E_+ + E_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d-r} \right)$$

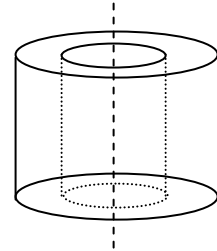
$$U = \int_a^{d-a} E dr = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{d-a}{a} \right)$$

单位长度的电容为

$$C = \frac{\lambda}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \left(\frac{d-a}{a} \right)}$$

1 0、 证明：同轴柱形电容器两极的半径相差很小（即 $R_B - R_A \ll R_A$ ）时，它的电容公式趋于平行板电容公式。

证明：同轴柱形电容器的电容公式为 $C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{R_B}{R_A}}$



令 $R_B - R_A = d$, 且 $d \ll R_A$

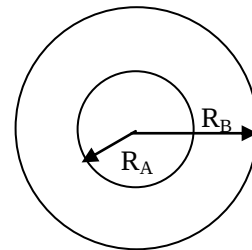
$$\ln \frac{R_B}{R_A} = \ln \frac{R_A + d}{R_A} = \ln \left(1 + \frac{d}{R_A} \right) \approx \frac{d}{R_A}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 2\pi R_A L}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

——相当于平行板电容器的电容公式

1 1、 证明：同心球形电容器两极的半径相差很小（即 $R_B - R_A \ll R_A$ ）时，它的电容公式趋于平行板电容公式。

证明：同心球形电容器的电容公式为 $C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_A R_B}{R_B - R_A}$



当 $R_B - R_A \ll R_A$ 时, $R_B R_A \approx R^2$, $R_B - R_A = d$

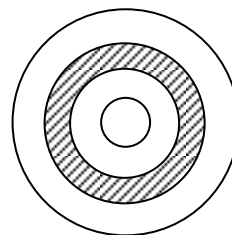
$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_A R_B}{R_B - R_A} \approx \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

——相当于平行板电容器的电容公式

1 2、 一球形电容器内外两壳的半径分别为 R_1 和 R_4 , 今在两壳之间放一个内外半径分别为 R_2 和 R_3 的同心导体球壳。

(1) 给内壳以电量 Q , 求 R_1 和 R_4 两壳的电位差;

(2) 求电容。



解: (1) 由对称性及高斯定理可得各区域场强分布为

$$E = 0 (r < R_1)$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (R_1 < r < R_2)$$

$$E = 0 (R_2 < r < R_3)$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (R_3 < r < R_4)$$

$$\Delta U = U_1 - U_4 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{R_3}^{R_4} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)$$

(2) 电容为

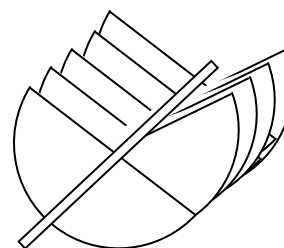
$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)}$$

13、收音机里用的可变电容如附图所示, 其中共有 n 个面积为 S 的金属片, 相邻两片的距离都是 d , 奇数片联在一起作为一极, 它固定不动 (叫做定片), 偶数片联在一起作为另一极, 它可以绕轴转动 (叫做动片)。

(1) 什么动片转动时电容 C 会改变? 转到什么位置时 C 最大? 转到什么位置时 C 最小?

(2) 证明: 略去边缘效应时, C 的最大值为

$$C_M = \frac{(n-1)\epsilon_0 S}{d}$$



解: (1) 电容大小由定片和动片间正对着的那部分面积决定。

当动片转动时, 正对面积变化, 电容随之变化。

当动片完全转到定片间时, S 达到最大, C 就达到最大;

当动片完全转出定片时, $S = 0$, C 达到最小。

(2) 当动片完全转入时, 相当于 $n-1$ 个电容器并联,

总电容为

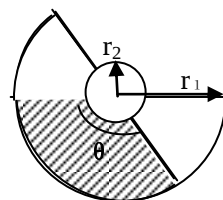
$$C_M = \frac{(n-1)\epsilon_0 S}{d}$$

14、收音机里用的可变电容如上题所示, 其中共有 n 个金属片。每片形状如下图所示; 相邻两片间的距离都是 d , 当动片转到两组片之间夹角为 θ 时, 证明: 当 θ 较大时,

略去边缘效应，它的电容为 $C = \frac{(n-1)\pi\epsilon_0(r_2^2 - r_1^2)\theta}{360d}$ (θ 以度为单位)

解：由扇形面积公式 $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ ，得两组片对着的面积为

$$S = \frac{1}{2}r_2^2\theta - \frac{1}{2}r_1^2\theta = \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\theta$$



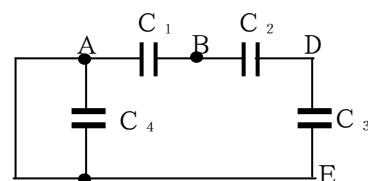
式中 θ 是以弧度为单位，若以度为单位，

$$S = \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\theta = \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\theta \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)\theta}{360}$$

整个电容器可视为 $n-1$ 个电容器并联而成

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{(n-1)\pi\epsilon_0(r_2^2 - r_1^2)\theta}{360d}$$

1 5、四个电容器的电容分别为 C_1 、 C_2 、 C_3 和 C_4 ，联接如图所示，分别求：



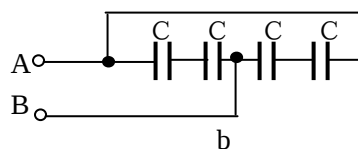
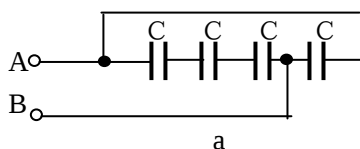
(1) A B 间；(2) D E 间；(3) A E 间的电容。

解：(1) A B 间的电容为 $C_{AB} = C_{EB} = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3}{C_2 + C_3}$

(2) D E 间的电容为 $C_{DE} = C_3 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3}{C_1 + C_2}$

(3) A E 间有导线接通，相当于无穷大的电容。 $C_{AE} \Rightarrow \infty$

1 6、四个电容器的电容都是 C ，分别按图 a 和图 b 联接，求 A、B 间的电容。哪种接法总电容较大？

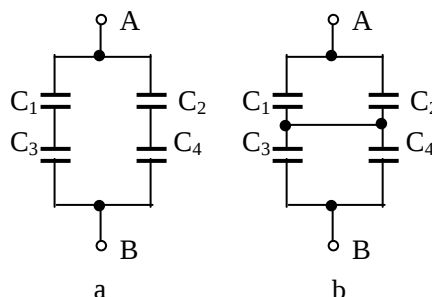


解：(1) $C_{AB} = C + \frac{1}{3}C = \frac{4}{3}C$

(2) $C_{AB} = \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = C$ b 接法总电容

较大。

1 7、四个电容 C_1 、 C_2 、 C_3 和 C_4 都已知，求图 a、



b 两种联法时，A B 间的电容。

解：两种联法 A、B 间的电容分别为

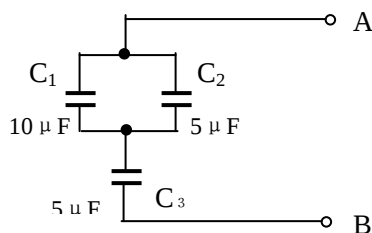
$$C_{AB} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} + \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} = \frac{C_1 C_3 (C_2 + C_4) + C_2 C_4 (C_1 + C_3)}{(C_1 + C_3)(C_2 + C_4)} \quad C_{AB} = \frac{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}$$

1 8、(1) 求附图中 A、B 间的电容；

(2) 在 A、B 间加上 100 V 的电压，求 C_2 上的电荷和电压；

(3) 如果这时 C_1 被击穿，问 C_3 上的电荷和电压各是多少？

解：(1) $C_{AB} = \frac{(C_1 + C_2)C_3}{C_1 + C_2 + C_3} = 3.75 \mu F$



(2) C_2 上的电荷和电压

$$\left. \begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= Q = CU \\ \frac{Q_2}{C_2} &= \frac{Q_1}{C_1} \end{aligned} \right\} Q_2 = CU - Q_1 = CU - C_1 \frac{Q}{C_2}$$

$$\therefore Q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U = 1.25 \times 10^{-4} C$$

$$U_2 = Q_2 / C_2 = 25V$$

(3) C_1 被击穿时， C_2 短路，全部电压将加在 C_3 上，

$$U_3 = U = 100 V$$

$$Q_3 = C_3 U = 5 \times 10^{-4} C$$

1 9、如附图，已知 $C_1 = 0.25 \mu F$ ， $C_2 = 0.15 \mu F$ ， $C_3 = 0.20 \mu F$ ， C_1 上的电压为 50 V。

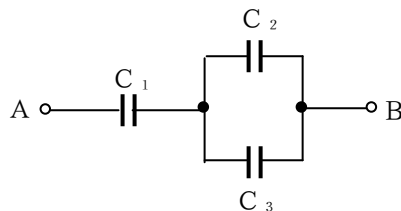
求 U_{AB} 。

解： C_2 与 C_3 并联后与 C_1 串联。

$$Q = C_1 U_1 = C_{23} U_{23}$$

$$U_{23} = \frac{C_1}{C_2 + C_3} U_1$$

$$U_{AB} = U_1 + U_{23} = \left(1 + \frac{C_1}{C_2 + C_3} \right) U_1 = 86V$$



2 0、标准电容的线路如图所示，

(1) 当 K_4 和 K_6 接上边， K_5 和 K_7 接到下边，而其他 K 上下都不接时，A B 之间

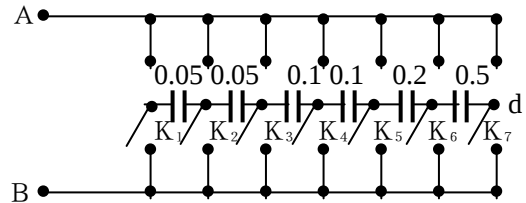
的电容是多少？

(2) 当 K_1 向上, K_3 向下接通, 而其他 K 上下都不接时, $A B$ 之间的电容是多少？

(3) 要得到 $0.4 \mu F$ 的电容, 各 K 如何接？

(4) 能得到最大的电容是多少？怎样接法？

(5) 能得到最小的电容是多少？怎样接法？



解: (1) $C_{AB} = (0.1 + 0.2 + 0.5) = 0.8 \mu F$

(2) $C_{AB} = 0.05 / 2 = 0.025 \mu F$

(3) 应将 0.1 、 0.1 、 0.2 三个电容器并联, K_3 、 K_5 向上, K_4 、 K_6 向下。

(4) 应为各电容器并联的总电容。 $C = 1.0 \mu F$

$K_1 K_3 K_5 K_7$ 向下, $K_2 K_4 K_6$ 向上。

(5) 应为各电容器串联的总电容 $C = 0.0149 \mu F$ K_1 向上, K_7 向下

2 1、有一些相同的电容器, 每个电容都是 $2.0 \mu F$, 耐压都是 $200 V$ 。现在要用它们联接成耐压 $1000 V$, (1) 电容 $C = 0.40 \mu F$ 和 (2) $C = 1.2 \mu F$ 的电容器, 问各需要这种电容器多少个？怎样联法？

解: (1) 将 5 个电容为 $2.0 \mu F$, 耐压 $200 V$ 的电容器串联

$$C = 0.40 \mu F, U = 5 U_0 = 1000 V$$

(2) 将 5 个电容为 $2.0 \mu F$, 耐压 $200 V$ 的电容器串联为一组, 再并联三组

$$C = 1.2 \mu F, U = 1000 V$$

2 2、两个电容器 C_1 和 C_2 , 分别标明为 $C_1: 200 P F 500 V$, $C_2: 300 P F 900 V$. 把它们串联后, 加上 $1000 V$ 电压, 是否会被击穿？

解: 串联后总电容为 $C = 120 P F$, 总电量 $Q = C U = 1.2 \times 10^{-7} C$,

加在 C_1 和 C_2 上的电压分别为 $U_1 = 600 V$, $U_2 = 400 V$

C_1 上的电压超过额定电压, 首先被击穿。 C_1 击穿后, $1000 V$ 电压全部加在 C_2 上, C_2 也被击穿。

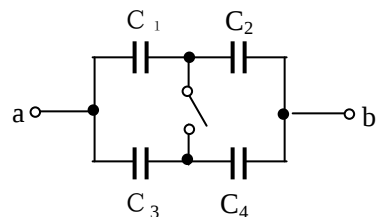
2 3、四个电容器 $C_1=C_4= 0.20 \mu F$, $C_2=C_3=0.60 \mu F$, 联接如图所示。

(1) 分别求 K 断开和接通时的 C_{ab} ;

(2) 当 $U_{ab}=100V$ 时, 分别求 K 断开和接通时各电容上的电压。

解 (1) K 断开时 $C_{ab} = 2 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 0.3 \mu F$

K 接通时 $C_{ab} = \frac{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} = 0.4 \mu F$



(2) K 断开时 $U = 100V$, $Q = C U = 30 \mu C$

每个电容器上 $15 \mu C$, $U_1 = U_4 = Q / C_1 = 75V$, $U_2 = U_3 = Q / C_2 = 25V$

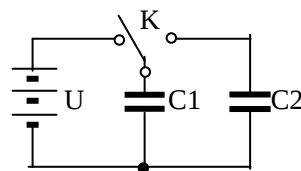
K 接通时 $U = 100V$, $C = 0.4 \mu F$, $Q = C U = 40 \mu C$

$U_1 = 50V$, $U_2 = 50V$

2 4、如图所示, $C_1=20 \mu F$, $C_2=5 \mu F$, 先用 $U=1000V$ 把 C_1 充电, 然后把 K 拨到另一侧使 C_1 与 C_2 联接。求:

(1) C_1 和 C_2 所带的电量;

(2) C_1 和 C_2 两端的电压。



解: (1) C_1 和 C_2 所带的电量为

$$\left. \begin{aligned} Q_{10} &= C_1 U = Q_1 + Q_2 \\ \frac{Q_1}{C_1} &= \frac{Q_2}{C_2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} Q_1 &= \frac{C_1^2 U}{C_1 + C_2} = 1.6 \times 10^{-2} C \\ Q_2 &= \frac{C_2}{C_1} Q_1 = 0.4 \times 10^{-2} C \end{aligned}$$

(2) C_1 和 C_2 两端的电压为

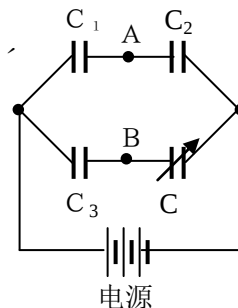
$$U_2 = U_1 = Q_1 / C_1 = 800 V$$

2 5、附图中的电容 C_1 、 C_2 、 C_3 都是已知的, 电容 C 是可以调节的。问当 C 调节到 A、B 两点的电位相等时, C 的值是多少?

解: 设串联的电容 C 和 C_3 上的电量为 q , C_1 和 C_2 上的电量为 q'

A、B 两点等电位

$$\left. \begin{aligned} U_c &= U_2 \rightarrow \frac{q}{C} = \frac{q'}{C_2} \\ U_1 &= U_3 \rightarrow \frac{q}{C_3} = \frac{q'}{C_1} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{C}{C_3} = \frac{C_2}{C_1} \rightarrow C = \frac{C_2 C_3}{C_1}$$



2 6、把 $C_1=1.0 \mu F$ 和 $C_2=2.0 \mu F$ 并联后接到 $900V$ 的直流电源上,

- (1) 求每个电容器上的电压和电量;
- (2) 去掉电源, 并把 C1 和 C2 彼此断开, 然后再把它们带异号电荷的极板分别接在一起, 求每个电容器上的电压和电量。

解: (1) C₁、C₂ 并联后接到 900V 的直流电源上,

$$U_1 = U_2 = 900V \begin{cases} Q_1 = C_1 U_1 = 0.9 \times 10^{-3} C \\ Q_2 = C_2 U_2 = 1.8 \times 10^{-3} C \end{cases}$$

- (2) 去掉电源后重新联接, 两电容器互相充电, 电量重新分配

$$q = Q_2 - Q_1 = 1.8 \times 10^{-3} - 0.9 \times 10^{-3} = 0.9 \times 10^{-3} C$$

$$C = C_1 + C_2 = 3.0 \times 10^{-6} F$$

$$U = q / C = 300V$$

$$\therefore q_1 = C_1 U_1 = 0.3 \times 10^{-3} C$$

$$q_2 = C_2 U_2 = 0.6 \times 10^{-3} C$$

2 7、把 C₁=2.0 μF 和 C₂=8.0 μF 串联后, 加上 300V 的直流电压。

- (1) 求每个电容器上的电量和电压;
- (2) 去掉电源, 并把 C1 和 C2 彼此断开, 然后再把它们带正电的极板接在一起, 带负电的极板也接在一起, 求每个电容器上的电压和电量;
- (3) 如果去掉电源并彼此断开后, 再把它们带异号电荷的极板分别接在一起, 求每个电容器上的电压和电量。

解: 串联电容器的总电容及总电量为

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1.6 \times 10^{-6} F \quad Q = CU = 4.8 \times 10^{-4} C = Q_1 = Q_2$$

- (1) 每个电容器上的电量和电压为

$$Q_1 = Q_2 = 4.8 \times 10^{-4} C \begin{cases} U_1 = Q_1 / C_1 = 240V \\ U_2 = Q_2 / C_2 = 60V \end{cases}$$

- (2) 去掉电源后并接

$$\begin{cases} Q' = 2Q \\ C = C_1 + C_2 \end{cases} \begin{cases} U' = Q' / C = 60V \\ q_1 = C_1 U' = 1.9 \times 10^{-4} C \\ q_2 = C_2 U' = 7.7 \times 10^{-4} C \end{cases}$$

- (3) 去掉电源后串接

$$Q'' = Q_1 - Q_2 = 0 \quad U'' = 0$$

2 8、C₁= 100 μF 充电到 50V 后去掉电源, 再把 C₁ 的两极板分别接到 C₂ 的两极板上 (C₂ 原

来不带电)，测得这时 C_1 上的电位差降低到 3.5V，求 C_2 。

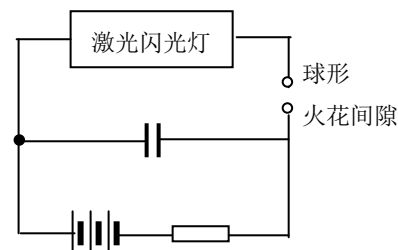
解：充电后， C_1 上的电量为 $Q = C_1 U = 5.0 \times 10^{-9} C$ ，与 C_2 联接后，

$$Q_1 + Q = Q = 5.0 \times 10^{-9} C$$

$$Q_1 = C_1 U_1 = 3.5 \times 10^{-9} C$$

$$\frac{Q_1}{C_1} = U_1 = U_2 = \frac{Q_2}{C_2} \rightarrow C_2 = \frac{Q_2}{U_1} = \frac{Q - Q_1}{U_1} = 43 \mu F$$

29、激光闪光灯的电源线路如图所示，由电容器 C 储存的能量，通过闪光灯线路放电，给闪光灯提供能量。电容 $C = 6000 \mu F$ ，火花间隙击穿电压为 2000V，问 C 在一次放电过程中，能放出多少能量？



解： $W = \frac{1}{2} C U^2 = 1.2 \times 10^4 J$

30、两电容器的电容之比为 $C_1 : C_2 = 1 : 2$ ，把它们串联后接到电源上充电，它们的电能之比是多少？如果并联充电，电能之比是多少？

解：(1) 串联充电时

$$Q_1 = Q_2 = Q \rightarrow \frac{W_1}{W_2} = \frac{\frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1}}{\frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2}} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{2}{1}$$

(2) 并联充电时

$$U_1 = U_2 = U \rightarrow \frac{W_1}{W_2} = \frac{\frac{1}{2} C_1 U_1^2}{\frac{1}{2} C_2 U_2^2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{1}{2}$$

31、已知两电容器 $C_1 = 10 \text{PF}$ ， $C_2 = 20 \text{PF}$ ，把它们串联后充电到 2.0V，问它们各蓄了多少电能？

解： 充电后所带电量为 $Q = C U = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U = Q_1 = Q_2$

两电容器各自储存的电能为

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} = 8.9 \times 10^{-12} J$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} = 4.4 \times 10^{-12} J$$

3 2、(1) 一平行板电容器两极板的面积都是 S ，相距为 d ，电容便为 $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ 。当在两板上

加上电压 U 时，略去边缘效应，两板间电场强度为 $E=U/d$ 。其中一板所带电量为 $Q=CU$ ，

故它所受的力为 $F = QE = CU \left(\frac{U}{d} \right) = \frac{CU^2}{d}$ ，这个结果对吗？为什么？

(2) 用虚功原理证明：正确的公式应为 $F = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{Cd} = \frac{1}{2} \frac{CU^2}{d}$

解：(1) 这个结果不对。因为 $E = U/d$ 是两极板之间的电场强度，而不是面电荷 Q 所在处的电场强度。

$$Q \text{ 所在处的场强大小为 } E_Q = \frac{1}{2} E = \frac{U}{2d}$$

$$\text{正确的结果应为 } F = QE_Q = \frac{QU}{2d} = \frac{1}{2} \frac{CU^2}{d}$$

$$(2) \text{ 电容器储存能量为 } W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} \left(\frac{E}{d} \right)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Sd$$

当电荷在电场中位移 $d\mathbf{r}$ 时，电场作用在它上面的力 F 所作的功 dA 等于电势能减少的值。即

$$d\vec{A} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dW \rightarrow \vec{F} = -\nabla W$$

$$\vec{F} = -\nabla \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Sd \right) = -\frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Sd \right) \vec{e}_d = -\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S \vec{e}_d$$

式中 $\vec{e}_d$ 极板表面法线方向的单位矢量，指向 d 增大的方向，负号表明 F 的方向是指向 d 减小的方向。 F 的大小为

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} \frac{E^2 d^2}{d} = \frac{1}{2} C \frac{U^2}{d}$$

3 3、一平行板电容器极板面积为 S ，间距为 d ，带电 $\pm Q$ ，将极板的距离拉开一倍。计算

(1) 静电能改变多少？

(2) 抵抗电场力作了多少功？

解：(1) 电量 Q 保持不变，静电能的改变为 $\Delta W = \frac{Q^2}{2C'} - \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}$ ，增加了一倍。

(2) 抵抗电场力所作的功等于静电能的增加。 $A = \Delta W = \frac{Q^2}{2C}$

3 4、一平行板电容器极板面积为 S ，间距为 d ，接在电源上以保持电压为 U ，将极板的距离拉开一倍。计算：

- (1) 静电能的改变；
- (2) 电场对电源作的功；
- (3) 外力对极板作的功；

解：(1) 电压保持不变，静电能的改变为

$$\Delta W = \frac{1}{2} C' U^2 - \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} W_0 \quad \text{静电能减小一倍}$$

(2) 电场对电源作功是变力作功

$$\begin{aligned} dA &= U dq = U d(Uc) = U^2 dc \\ \because c &= \frac{\epsilon_0 S}{x} \rightarrow dc = -\frac{\epsilon_0 S}{x^2} dx \\ \therefore A &= \int_d^{2d} dA = \int_d^{2d} -\frac{\epsilon_0 S U^2}{x^2} dx = -\frac{\epsilon_0 S U^2}{2d} = -\frac{1}{2} C U^2 \end{aligned}$$

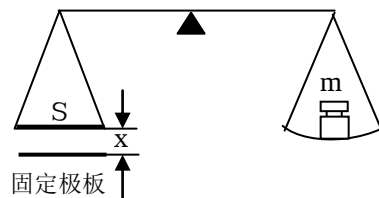
(3) 外力对极板（电场）作功 + 电源对电场作功 = 静电能的增量

$$\begin{aligned} \Delta W &= A + A_{\text{外}} \\ A_{\text{外}} &= \Delta W - A = \frac{\epsilon_0 S U^2}{4d} \end{aligned}$$

3 5、静电天平的装置如图所示，一空气平行板电容器两极板的面积都是 S ，间距为 x ，下板固定，上板接到天平的一头。当电容器不带电时，天平正好平衡。然后把电压 U 加到电容器的两极上，则天平的另一头须加上质量为 m 的砝码，才能达到平衡。求所加的电压。

解：加上电压 U 后，极板所受的静电力为

$$F = Q E_Q = Q \left(\frac{1}{2} E \right) = \frac{1}{2} Q \frac{U}{x} = \frac{1}{2} C \frac{U^2}{x} = \frac{1}{2} \epsilon_0 S \left(\frac{U}{x} \right)^2$$



当天平平衡时， $F = mg$

$$\therefore U = \sqrt{\frac{2mgx^2}{\epsilon_0 S}}$$

§ 2.3 电介质

思考题:

1、(1) 将平行板电容器两极板接在电源上以维持其间电压不变, 用介电常数为 ε 的均匀电介质把它充满, 极板上的电荷量为原来的几倍? 电场为原来的几倍?

(2) 若充电后拆掉电源, 然后再加入电介质, 情况如何?

答: (1) 极板间电压 U_0 保持不变, 加入电介质时, 电容器的电容 $C = \varepsilon C_0$, 极板上电荷 $Q = C U_0 = \varepsilon C_0 U_0 = \varepsilon Q_0$, 可见电量增加为原来的 ε 倍。 $E = U/d$, 极板间的场强保持不变,

(2) 极板上电荷量 Q_0 保持不变, 加入介质后, 电容增加为 $C = \varepsilon C_0$ 。极板间的电压 $U = Q_0/C = U_0/\varepsilon$, 极板间的电压降低。介质中的总场强小于原来的场强, $E = U/d = E_0/\varepsilon$,

2、如图所示, 平行板电容器的极板面积为 S , 间距为 d , 试问:

(1) 将电容器接在电源上, 插入厚度为 $d/2$ 的均匀电介质板, 介质内、外电场之比是多少? 它们和未插入电介质之前电场之比为多少? (图 a)

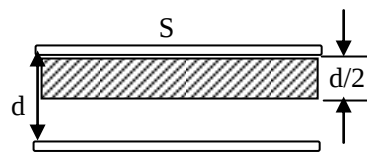
(2) 在问题 (1) 中, 若充电后拆去电源, 插入电介质板, 情况如何?

(3) 将电容器接在电源上, 插入面积为 $S/2$ 的均匀电介质板, 介质内、外电场之比是多少? 它们和未插入电介质之前电场之比为多少? (图 b)

(4) 在问题 (3) 中, 若充电后拆去电源, 插入电介质板, 情况如何?

(5) 图 a、b 中电容器的电容各为真空时的几倍?

以上各问题中都设电介质的介电常数为 ε 。



答: (1) 插入厚度为 $d/2$ 的介质板, 电压 U_0 保持不变,

$$U_0 = U_{\text{内}} + U_{\text{外}} = \frac{1}{2} E_{\text{内}} d + \frac{1}{2} E_{\text{外}} d = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{\varepsilon} + \frac{D}{\varepsilon_0} \right) d = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon_0}{\varepsilon \varepsilon_0} \right) D d \quad \text{图 a}$$

$$D = \frac{2 \varepsilon \varepsilon_0 U_0}{(\varepsilon + \varepsilon_0) d} = \frac{2 \varepsilon \varepsilon_0 E_0}{(\varepsilon + \varepsilon_0)}$$

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{内}} &= \frac{D}{\varepsilon} = \frac{2 \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 \\ E_{\text{外}} &= \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{2 \varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 \end{aligned} \right\} \frac{E_{\text{内}}}{E_{\text{外}}} = \frac{1}{\varepsilon_r} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{E_{\text{内}}}{E_0} &= \frac{2 \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} = \frac{2}{\varepsilon_r + 1} \\ \frac{E_{\text{外}}}{E_0} &= \frac{2 \varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_0} = \frac{2 \varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} \end{aligned} \right.$$

(2) 电量 Q_0 保持不变, 则 D 保持不变。

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{内}} &= \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon} = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \\ E_{\text{外}} &= \frac{D}{\varepsilon_0} = E_0 \end{aligned} \right\} \frac{E_{\text{内}}}{E_{\text{外}}} = \frac{1}{\varepsilon_r} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{E_{\text{内}}}{E_0} &= \frac{1}{\varepsilon_r} \\ \frac{E_{\text{外}}}{E_0} &= 1 \end{aligned} \right.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/528045110074006070>