

2023-2024 学年广东省中山市纪念中学高三第一次大联考数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点为 F ，过点 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A, B 两点，其中点 A 在第一象限，若弦 AB

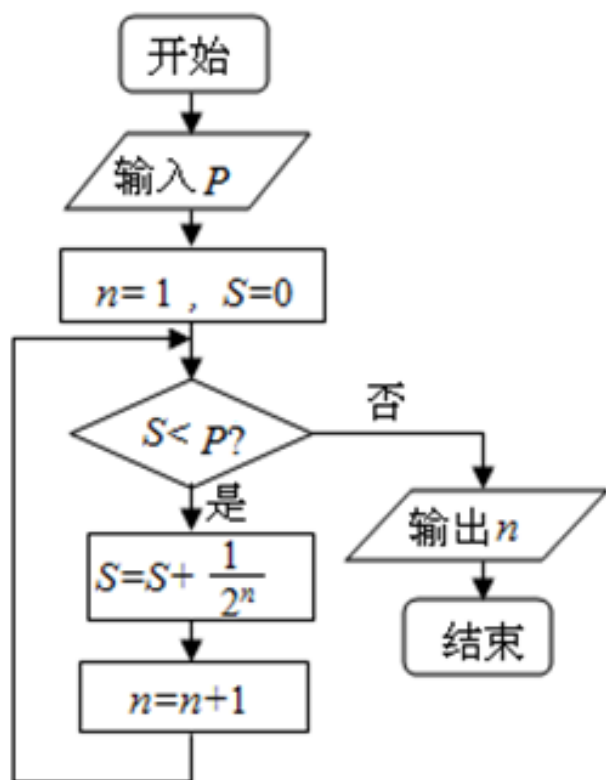
的长为 $\frac{25}{4}$ ，则 $\frac{|AF|}{|BF|} = (\quad)$

- A. 2 或 $\frac{1}{2}$ B. 3 或 $\frac{1}{3}$ C. 4 或 $\frac{1}{4}$ D. 5 或 $\frac{1}{5}$

2. 已知 i 是虚数单位，若 $\frac{z}{1-i} = i$ ，则 $|z| = (\quad)$

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 3

3. 执行如图所示的程序框图后，输出的值为 5，则 P 的取值范围是 $(\quad)$ 。



A. $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]$ B. $\left(\frac{5}{6}, \frac{9}{10}\right]$ C. $\left(\frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right]$ D. $\left(\frac{15}{16}, \frac{31}{32}\right]$

4. 给出以下四个命题:

- ①依次首尾相接的四条线段必共面;
 ②过不在同一条直线上的三点, 有且只有一个平面;
 ③空间中如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行, 那么这两个角必相等;
 ④垂直于同一直线的两条直线必平行.

其中正确命题的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5. 棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内有一个内切球 O , 过正方体中两条异面直线 AB , A_1D_1 的中点 P, Q 作直线, 则该直线被球面截在球内的线段的长为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}-1$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

6. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左, 右焦点, O 是坐标原点, 过点 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线, 垂足为 P . 若 $|PF_1| = \sqrt{6}|OP|$, 则 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

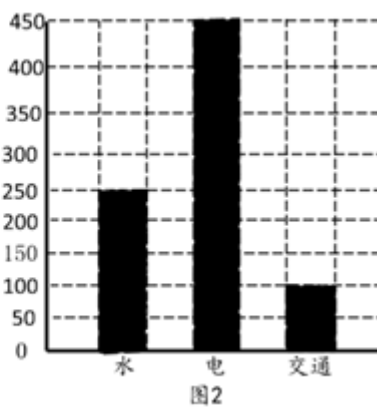
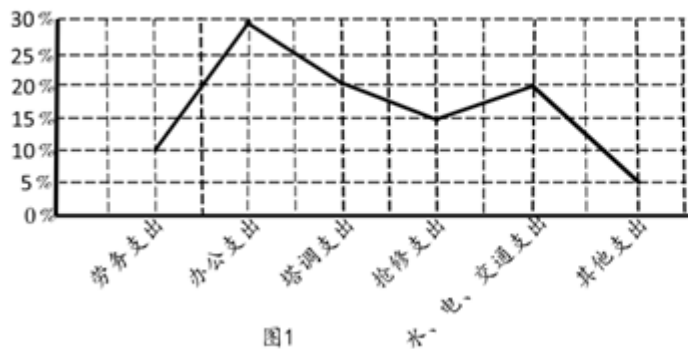
7. 已知 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2}$, $b = 0.2^{-\frac{1}{2}}$, $c = \log_{\frac{1}{3}} 2$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $b > c > a$ D. $a > c > b$

8. 甲在微信群中发了一个 6 元“拼手气”红包, 被乙、丙、丁三人抢完, 若三人均领到整数元, 且每人至少领到 1 元, 则乙获得“最佳手气”(即乙领到的钱数多于其他任何人)的概率是 ()

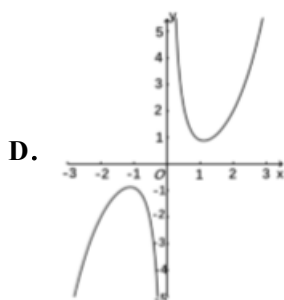
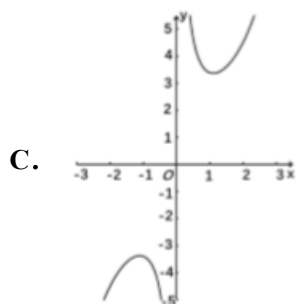
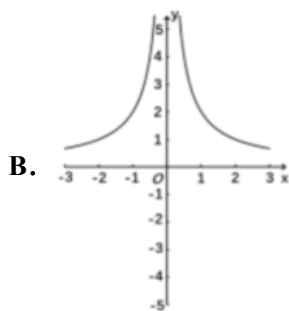
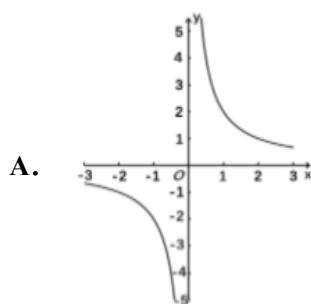
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{4}$

9. 某单位去年的开支分布的折线图如图 1 所示, 在这一年中的水、电、交通开支 (单位: 万元) 如图 2 所示, 则该单位去年的水费开支占总开支的百分比为 ()



- A. 6.25% B. 7.5% C. 10.25% D. 31.25%

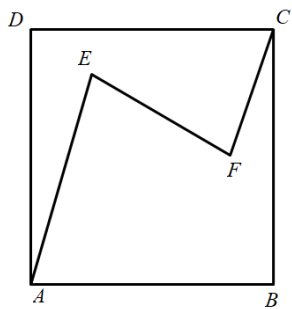
10. 函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(x^2 + 1)}$ 在 $[-3, 3]$ 的图象大致为()



11. 已知函数 $f(x) = (x - a - 1)e^x$, 若 $2^a = \log_2 b = c$, 则 ()

- A. $f(a) < f(b) < f(c)$ B. $f(b) < f(c) < f(a)$
C. $f(a) < f(c) < f(b)$ D. $f(c) < f(b) < f(a)$

12. 台球是一项国际上广泛流行的高雅室内体育运动, 也叫桌球 (中国粤港澳地区的叫法)、撞球 (中国地区的叫法) 控制撞球点、球的旋转等控制母球走位是击球的一项重要技术, 一次台球技术表演节目中, 在台球桌上, 画出如图正方形 $ABCD$, 在点 E, F 处各放一个目标球, 表演者先将母球放在点 A 处, 通过击打母球, 使其依次撞击点 E, F 处的目标球, 最后停在点 C 处, 若 $AE=50cm$, $EF=40cm$, $FC=30cm$, $\angle AEF = \angle CFE = 60^\circ$, 则该正方形的边长为 ()

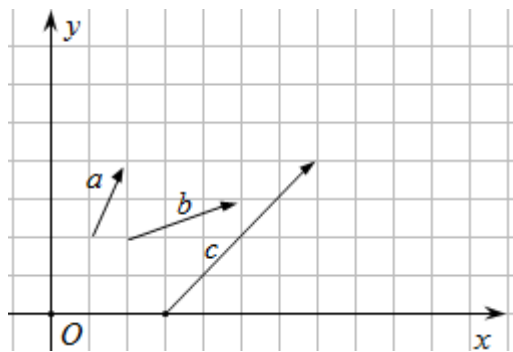


- A. $50\sqrt{2} \text{ cm}$ B. $40\sqrt{2} \text{ cm}$ C. 50 cm D. $20\sqrt{6} \text{ cm}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ 2x + y \leq 2 \end{cases}$ ，则 $z = 3x + 2y$ 的最小值为_____.

14. 如图所示，直角坐标系中网格小正方形的边长为 1，若向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 满足 $(2\vec{a} + t\vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ ，则实数 t 的值为_____.



15. 已知 $F_1(-3, 0)$ ， $F_2(3, 0)$ 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，双曲线 C 的渐近线上存在点 P 满足 $|PF_1| = 2|PF_2|$ ，则 b 的最大值为_____.

16. 某种赌博每局的规则是：赌客先在标记有 1, 2, 3, 4, 5 的卡片中随机摸取一张，将卡片上的数字作为其赌金；随后放回该卡片，再随机摸取两张，将这两张卡片上数字之差的绝对值的 1.4 倍作为其奖金。若随机变量 ξ_1 和 ξ_2 分别表示赌客在一局赌博中的赌金和奖金，则 $D(\xi_1) = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $E(\xi_1) - E(\xi_2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

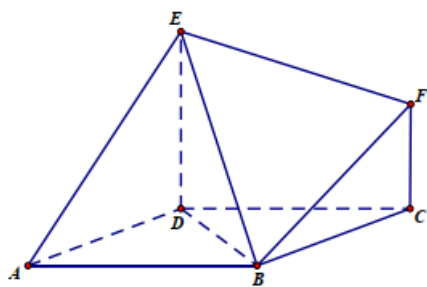
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = |2x - a| + a$.

(1) 当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x) \leq 6$ 的解集；

(2) 设函数 $g(x) = |2x - 1|$. 当 $x \in \mathbf{R}$ 时， $f(x) + g(x) \geq 3$ ，求 a 的取值范围.

18. (12 分) 如图，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形， $\angle BAD = 60^\circ$ ， $DE \perp$ 平面 $ABCD$ ， $CF \parallel DE$ ， $DE = 2CF$ ， BE 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45° .



(1) 求证: 平面 $BEF \perp$ 平面 BDE ;

(2) 求二面角 $B-EF-D$ 的余弦值.

19. (12 分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 点 F 为抛物线的焦点, 焦点 F 到直线 $3x - 4y + 2 = 0$ 的距离为 d_1 ,

焦点 F 到抛物线 C 的准线的距离为 d_2 , 且 $\frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{2}$.

(1) 求抛物线 C 的标准方程;

(2) 若 x 轴上存在点 M , 过点 M 的直线 l 与抛物线 C 相交于 P 、 Q 两点, 且 $\frac{1}{|PM|^2} + \frac{1}{|QM|^2}$ 为定值, 求点 M 的坐标.

20. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 角中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别是 a 、 b 、 c , 若 $a \sin B = \sqrt{3} b \cos A$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, $a = 5$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

21. (12 分) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 , F_2 , 下顶点为 A , 椭圆 C 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\triangle AF_1F_2$ 的面积是 $\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 直线 l 与椭圆 C 交于 B , D 两点 (异于 A 点), 若直线 AB 与直线 AD 的斜率之和为 1, 证明: 直线 l 恒过定点, 并求出该定点的坐标.

22. (10 分) 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $2n, a_n, 2S_n - a_n$ 成等差数列 ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 证明: 数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = \frac{a_n + 1}{a_n a_{n+1}}$ 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

先根据弦长求出直线的斜率，再利用抛物线定义可求出 $|AF|, |BF|$ 。

【详解】

设直线的倾斜角为 θ ，则 $|AB| = \frac{2p}{\cos^2 \theta} = \frac{4}{\cos^2 \theta} = \frac{25}{4}$ ，

所以 $\cos^2 \theta = \frac{16}{25}$ ， $\tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 = \frac{9}{16}$ ，即 $\tan \theta = \pm \frac{3}{4}$ ，

所以直线 l 的方程为 $y = \pm \frac{3}{4}x + 1$ 。当直线 l 的方程为 $y = \frac{3}{4}x + 1$ ，

联立 $\begin{cases} x^2 = 4y \\ y = \frac{3}{4}x + 1 \end{cases}$ ，解得 $x_1 = -1$ 和 $x_2 = 4$ ，所以 $\frac{|AF|}{|BF|} = \left| \frac{4-0}{0-(-1)} \right| = 4$ ；

同理，当直线 l 的方程为 $y = -\frac{3}{4}x + 1$ ， $\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{1}{4}$ ，综上， $\frac{|AF|}{|BF|} = 4$ 或 $\frac{1}{4}$ 。选 C。

【点睛】

本题主要考查直线和抛物线的位置关系，弦长问题一般是利用弦长公式来处理。出现了到焦点的距离时，一般考虑抛物线的定义。

2、A

【解析】

直接将 $\frac{z}{1-i} = i$ 两边同时乘以 $1-i$ 求出复数 z ，再求其模即可。

【详解】

解：将 $\frac{z}{1-i} = i$ 两边同时乘以 $1-i$ ，得

$$z = i(1-i) = 1+i$$

$$|z| = \sqrt{2}$$

故选：A

【点睛】

考查复数的运算及其模的求法，是基础题.

3、C

【解析】

框图的功能是求等比数列的和，直到和不满足给定的值时，退出循环，输出 n .

【详解】

第一次循环： $S = \frac{1}{2}, n = 2$ ；第二次循环： $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}, n = 3$ ；

第三次循环： $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}, n = 4$ ；第四次循环： $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16}, n = 5$ ；

此时满足输出结果，故 $\frac{7}{8} < P \leq \frac{15}{16}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查程序框图的应用，建议数据比较小时，可以一步一步的书写，防止错误，是一道容易题.

4、B

【解析】

用空间四边形对①进行判断；根据公理 2 对②进行判断；根据空间角的定义对③进行判断；根据空间直线位置关系对④进行判断.

【详解】

①中，空间四边形的四条线段不共面，故①错误.

②中，由公理 2 知道，过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面，故②正确.

③中，由空间角的定义知道，空间中如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行，那么这两个角相等或互补，故③错误.

④中，空间中，垂直于同一直线的两条直线可相交，可平行，可异面，故④错误.

故选：B

【点睛】

本小题考查空间点，线，面的位置关系及其相关公理，定理及其推论的理解和认识；考查空间想象能力，推理论证能力，考查数形结合思想，化归与转化思想.

5、C

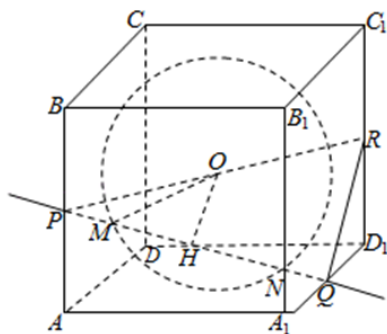
【解析】

连结并延长 PO ，交对棱 C_1D_1 于 R ，则 R 为对棱的中点，取 MN 的中点 H ，则 $OH \perp MN$ ，推导出 $OH \parallel RQ$ ，且 $OH =$

$\frac{1}{2}RQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，由此能求出该直线被球面截在球内的线段的长.

【详解】

如图，



MN 为该直线被球面截在球内的线段

连结并延长 PO ，交对棱 C_1D_1 于 R ，

则 R 为对棱的中点，取 MN 的中点 H ，则 $OH \perp MN$ ，

$$\therefore OH \parallel RQ, \text{ 且 } OH = \frac{1}{2}RQ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore MN = 2MH = \sqrt{2}.$$

故选：C.

【点睛】

本题主要考查该直线被球面截在球内的线段的长的求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，是中档题.

6、B

【解析】

设过点 $F_2(c, 0)$ 作 $y = \frac{b}{a}x$ 的垂线，其方程为 $y = -\frac{a}{b}(x - c)$ ，联立方程，求得 $x = \frac{a^2}{c}$ ， $y = \frac{ab}{c}$ ，即 $P\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right)$ ，由

$|PF_1| = \sqrt{6}|OP|$ ，列出相应方程，求出离心率.

【详解】

解：不妨设过点 $F_2(c, 0)$ 作 $y = \frac{b}{a}x$ 的垂线，其方程为 $y = -\frac{a}{b}(x - c)$ ，

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ y = -\frac{a}{b}(x-c) \end{cases} \text{解得 } x = \frac{a^2}{c}, y = \frac{ab}{c}, \text{ 即 } P\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right),$$

$$\text{由 } |PF_1| = \sqrt{6}|OP|, \text{ 所以有 } \frac{a^2b^2}{c^2} + \left(\frac{a^2}{c} + c\right)^2 = 6\left(\frac{a^4}{c^2} + \frac{a^2b^2}{c^2}\right),$$

$$\text{化简得 } 3a^2 = c^2, \text{ 所以离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}.$$

故选：B.

【点睛】

本题主要考查双曲线的概念、直线与直线的位置关系等基础知识，考查运算求解、推理论证能力，属于中档题.

7、B

【解析】

利用指数函数和对数函数的单调性，将数据和0,1做对比，即可判断.

【详解】

$$\text{由于 } 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{0.2} < \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1,$$

$$0.2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{5}}} = \sqrt{5},$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$$

$$\text{故 } b > a > c.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查利用指数函数和对数函数的单调性比较大小，属基础题.

8、B

【解析】

将所有可能的情况全部枚举出来,再根据古典概型的方法求解即可.

【详解】

设乙,丙,丁分别领到 x 元, y 元, z 元,记为 (x, y, z) , 则基本事件有 $(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3),$

$(2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 2, 2)$, 共 10 个, 其中符合乙获得“最佳手气”的有 3 个, 故所求概率为 $\frac{3}{10}$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/528054132030006134>