隐圆与蒙日圆问题2025高考数学专项复习

隐圆与蒙日圆问题

【新高考专用】

题型归纳

命题规律

1. 隐圆与蒙日圆问题

从近几年的高考情况来看，在近几年全国各地的解析几何试题中可以发现许多试题涉及隐圆、蒙日圆，这些问题聚焦了轨迹方程、定值、定点、弦长、面积等解析几何的核心问题，难度为中高档，需要灵活求解.

方法技巧总结

【知识点 1　隐圆与阿波罗尼斯圆】

1．隐圆问题

在题设中没有明确给出圆的相关信息，而是隐含在题目中，要通过分析、转化、发现圆 (或圆的方程)，从而最终利用圆的知识来求解，我们称这类问题为“隐圆问题”.

2．隐圆问题的几大类型

(1) 隐圆类型一：到定点的距离等于定长；
(2) 隐圆类型二：到两定点距离的平方和为定值；
(3) 隐圆类型三：到两定点的夹角为直角；
(4) 隐圆类型四：对角互补、数量积定值；
(5) 隐圆类型五：阿波罗尼斯圆.

3．阿波罗尼斯圆

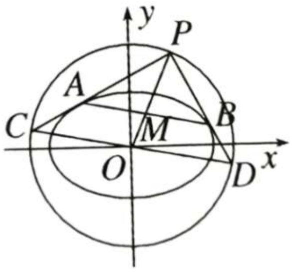
“阿波罗尼斯圆”的定义：平面内到两个定点 $A(-a,0)$，$B(a,0)$ $(a>0)$ 的距离之比为正数 $\lambda(\lambda\neq 1)$ 的点的轨迹是以 $C\left(\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}a,0\right)$ 为圆心，$\left|\dfrac{2a\lambda}{\lambda^2-1}\right|$ 为半径的圆，即为阿波罗尼斯圆.

【知识点 2　蒙日圆】

1．蒙日圆

在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，任意两条相互垂直的切线的交点都在同一个圆上，它的圆心是椭圆的中心，半径等于椭圆长半轴与短半轴平方和的算术平方根，这个圆叫蒙日圆.

设 P 为蒙日圆上任一点，过点 P 作椭圆的两条切线，交椭圆于点 A，B，O 为原点，如图.



举一反三

【题型1　隐圆类型一：到定点的距离等于定长】

1. (2024·全国·二模) 已知直线 $l_1: y=tx+5(t\in R)$ 与直线 $l_2: x+ty-t+4=0(t\in R)$ 相交于点 P，且点 P 到点 $Q(a,3)$ 的距离等于1，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $[-2\sqrt{2}-3,-2\sqrt{2}-1]$　　B. $[-2\sqrt{2}-3,2\sqrt{2}-1]$

C. $[-2\sqrt{2}-3,-2\sqrt{2}-1]\cup[2\sqrt{2}+1,2\sqrt{2}+3]$　　D. $[-2\sqrt{2}-3,-2\sqrt{2}-1]\cup[2\sqrt{2}-3,2\sqrt{2}-1]$

2. (24－25高三上·江西南昌·开学考试) 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F，则 E 上满足 $|PF|=\sqrt{3}$ 的 P 点有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

3. (2024·陕西咸阳·模拟预测) 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 是两个单位向量，且 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，若向量 $\vec{c}$ 满足 $\left|\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}\right|=2$，则 $\left|\vec{c}\right|$ 的最大值为（　　）

A. $2-\sqrt{2}$　　B. $2+\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

4. (23－24高三下·湖南长沙·阶段练习) 已知 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 是圆 $C:(x+2)^2+(y-4)^2=1$ 上的两个不同的点，若 $|MN|=\sqrt{2}$，则 $|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$ 的取值范围为（　　）

A. $[10,14]$　　B. $[8,16]$　　C. $[5\sqrt{2},7\sqrt{2}]$　　D. $[4\sqrt{2},8\sqrt{2}]$

【题型2　隐圆类型二：到两定点距离的平方和为定值】

5. (24－25高二上·全国·课后作业) 平面上一动点 P 满足：$|PM|^2+|PN|^2=6$ 且 $M(-1,0)$，$N(1,0)$，则动点 P 的轨迹方程为（　　）

A. $(x+1)^2+y^2=3$　　B. $(x-1)^2+y^2=3$　　C. $x^2+y^2=2$　　D. $x^2+y^2=3$

6. (2024·河南·三模) 在平面 α 内，已知线段 AB 的长为4，点 P 为平面 α 内一点，且 $|PA|^2+|PB|^2=10$，则 $\angle PAB$ 的最大值为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

7. (24－25高二上·江苏徐州·阶段练习) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(2,0)$，若点 M 满足 $MA^2+MO^2=10$，则点 M 的轨迹方程是______ $x^2+y^2-2x-3=0$ ______.