



高等数学



学习内容

第二讲

收敛级数的性质

收敛级数的必要条件

小结

性质1 设常数 $k \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 有相同的敛散性.

证明 令 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的部分和分别为 s_n 及 σ_n . 则

$$\sigma_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = ks_n$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} ks_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

故 s_n 和 σ_n 极限同存在或同不存在

所以, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 有相同的敛散性.

性质2 设有两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$,

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$ 均收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = s \pm \sigma$ 收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 敛散性不确定.

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 发散.

证明

令 $s_n = \sum_{i=1}^n u_i$, $\sigma_n = \sum_{i=1}^n v_i$, 则

$$\tau_n = \sum_{i=1}^n (u_i \pm v_i) = s_n \pm \sigma_n \rightarrow s \pm \sigma \quad (n \rightarrow \infty),$$

这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $s \pm \sigma$.

例

$$1 + 1 + 1 + \cdots,$$

$$(-1) + (-1) + (-1) + \cdots,$$

都发散.

但两个级数的和

$$[1 + (-1)] + [1 + (-1)] + \cdots$$

$$= 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 0$$

收敛.

性质3

在级数中**去掉、加上或改变**有限项，不会影响级数的敛散性.

证明 只证明“在级数前面去掉有限项的情况”，其他情况类似.

将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n + \cdots$

前 k 项去掉, 所得新级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n} = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n} = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} + \cdots$$

其部分和为 $\sigma_n = \sum_{l=1}^n u_{k+l} = S_{k+n} - S_k$ 常数

由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, σ_n 与 S_{k+n} 极限状况相同,
故新旧两级数敛散性相同.

当级数收敛时, 其和的关系为 $\sigma = S - S_k$.

其他情况可类似证明.

性质4

收敛级数任意加括号后所成的新级数仍收敛, 且其和不变.

证明 设收敛级数 $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若按某一规律加括弧,

例如 $(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + \cdots$

则新级数的部分和序列 σ_m ($m = 1, 2, \cdots$) 为原级数部分和序列 s_n ($n = 1, 2, \cdots$) 的一个子序列, 因此必有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

注意

1. 一个级数加括号后所得新级数发散, 则原级数发散(反证法可证).
2. 一个级数加括号后收敛, 原级数敛散性不确定.

例如: 级数 $1-1+1-1+\dots$

加括号后 $(1-1)+(1-1)+\dots$ 收敛

原级数却发散.

级数敛散性的判断方法之三

利用级数收敛的性质判别级数的敛散性.

性质1 设常数 $k \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 有相同的敛散性.

性质2见下一页

性质3 在级数中**去掉、加上或改变**有限项, 不会影响级数的敛散性.

性质4 收敛级数**任意加括号**后所成级数仍收敛于原级数, 且其和不变.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/528061104065006105>