

2023 年高考数学模拟试卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

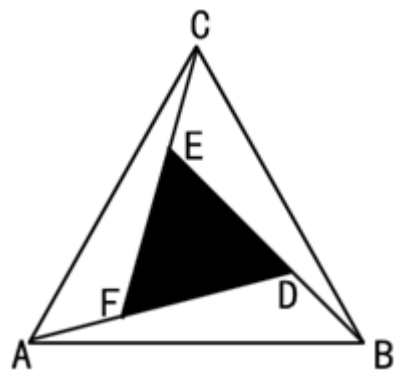
1. 不等式组
$$\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ y \geq \frac{1}{2}x \\ x + y - 3 \leq 0 \end{cases}$$
 表示的平面区域为 Ω ，则 ()

- A. $\forall (x, y) \in \Omega, x + 2y > 3$ B. $\exists (x, y) \in \Omega, x + 2y > 5$
- C. $\forall (x, y) \in \Omega, \frac{y+2}{x-1} > 3$ D. $\exists (x, y) \in \Omega, \frac{y+2}{x-1} > 5$

2. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，记 $f_1(x) = f'(x)$ ， $f_2(x) = f'_1(x)$ ， $\dots$ ， $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}^*$)。若 $f(x) = x \sin x$ ，则 $f_{2019}(x) + f_{2021}(x) =$ ()

- A. $-2 \cos x$ B. $-2 \sin x$ C. $2 \cos x$ D. $2 \sin x$

3. 赵爽是我国古代数学家、天文学家，大约在公元 222 年，赵爽为《周髀算经》一书作序时，介绍了“勾股圆方图”，亦称“赵爽弦图”（以弦为边长得到的正方形是由 4 个全等的直角三角形再加上中间的一个小正方形组成的）。类比“赵爽弦图”，可类似地构造如下图所示的图形，它是由 3 个全等的三角形与中间的一个小等边三角形拼成一个大等边三角形。设 $DF = 2AF = 2$ ，若在大等边三角形中随机取一点，则此点取自小等边三角形（阴影部分）的概率是 ()



- A. $\frac{4}{13}$ B. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ C. $\frac{9}{26}$ D. $\frac{3\sqrt{13}}{26}$

4. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E ， F ， G 分别为棱 A_1D_1 ， D_1D ， A_1B_1 的中点，给出下列命题 ① $AC_1 \perp EG$

；② $GC \parallel ED$ ；③ $B_1F \perp$ 平面 BGC_1 ；④ EF 和 BB_1 成角为 $\frac{\pi}{4}$. 正确命题的个数是 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5. 设 i 是虚数单位, 若复数 $m + \frac{10}{3+i}$ ($m \in R$) 是纯虚数, 则 m 的值为 ()

A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

6. 若复数 z 满足 $(1+i)\bar{z} = 1+2i$, 则 $|z| =$ ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

7. 要得到函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需将函数 $y = \sin 2x$ 的图象 ()

A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位 B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位 D. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

8. 已知命题 p : 若 $a > 1$, $b > c > 1$, 则 $\log_b a < \log_c a$; 命题 q : $\exists x_0 (0, +\infty)$, 使得 $2^{x_0} < \log_3 x_0$, 则以下命题为真命题的是 ()

A. $p \wedge q$ B. $p \wedge (\neg q)$ C. $(\neg p) \wedge q$ D. $(\neg p) \wedge (\neg q)$

9. 已知平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (-3, t)$, 且 $\vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{b})$, 则 $|\vec{b}| =$ ()

A. 3 B. $\sqrt{10}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 5

10. 设 m , n 是两条不同的直线, α , β 是两个不同的平面, 下列命题中正确的是 ()

A. 若 $\alpha \perp \beta$, $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, 则 $m \perp n$

B. 若 $\alpha \parallel \beta$, $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, 则 $m \parallel n$

C. 若 $m \perp n$, $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

D. 若 $m \perp \alpha$, $m \parallel n$, $n \parallel \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

11. 已知 $a, b \in R$, $3 + ai = b - (2a - 1)i$, 则 ()

A. $b = 3a$ B. $b = 6a$ C. $b = 9a$ D. $b = 12a$

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(c, 0)$, 若 F 到直线 $2bx - ay = 0$

的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}c$, 则 E 的离心率为()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + 2y \leq 3 \\ 4x - y \geq -6 \end{cases}$, 则 $z = x - 2y$ 的最小值为_____.

14. 在矩形 $ABCD$ 中, $BC=4$, M 为 BC 的中点, 将 $\triangle ABM$ 和 $\triangle DCM$ 分别沿 AM, DM 翻折, 使点 B 与 C 重合于点 P . 若 $\angle APD=150^\circ$, 则三棱锥 $M-PAD$ 的外接球的表面积为_____.

15. 若函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在定义域 $[m, n]$ 上的值域是 $[m^2, n^2]$ ($1 < m < n$), 则 a 的取值范围是_____.

16. 已知函数 $f(x) = e^x(x+1)^2$, 令 $f_1(x) = f'(x)$, $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 若 $f_n(x) = e^x(a_n x^2 + b_n x + c_n)$, $[m]$ 表示不超过实数 m 的最大整数, 记数列 $\left\{ \frac{2a_n}{2c_n - b_n} \right\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $[3S_{2000}] =$ _____

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某企业生产一种产品, 从流水线上随机抽取 100 件产品, 统计其质量指标值并绘制频率分布直方图 (如图 1): 规定产品的质量指标值在 $[65, 85)$ 的为劣质品, 在 $[85, 105)$ 的为优等品, 在 $[105, 115]$ 的为特优品, 销售时劣质品每件亏损 0.8 元, 优等品每件盈利 4 元, 特优品每件盈利 6 元, 以这 100 件产品的质量指标值位于各区间的频率代替产品的质量指标值位于该区间的概率。

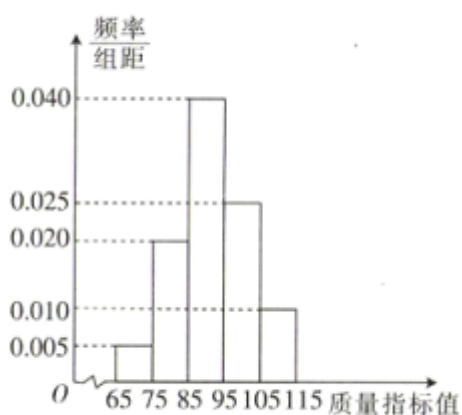


图 1

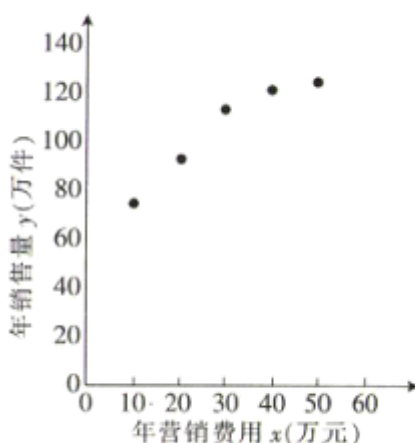


图 2

(1) 求每件产品的平均销售利润;

(2) 该企业主管部门为了解企业年营销费用 x (单位: 万元) 对年销售量 y (单位: 万件) 的影响, 对该企业近 5 年的年营销费用 x_i 和年销售量 y_i , ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) 数据做了初步处理, 得到的散点图 (如图 2) 及一些统计量的值。

$\sum_{i=1}^5 u_i$	$\sum_{i=1}^5 v_i$	$\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})$	$\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})^2$
16.35	23.4	0.54	1.62

表中 $u_i = \ln x_i$, $v_i = \ln y_i$, $\bar{u} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 u_i$, $\bar{v} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 v_i$.

根据散点图判断, $y = ax^b$ 可以作为年销售量 y (万件) 关于年营销费用 x (万元) 的回归方程.

①求 y 关于 x 的回归方程;

②用所求的回归方程估计该企业每年应投入多少营销费, 才能使得该企业的年收益的预报值达到最大? (收益 = 销售利润 - 营销费用, 取 $e^{3.59} = 36$)

附: 对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归直线 $\hat{v} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}.$$

18. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 且 $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$.

(1) 求角 C 的值;

(2) 若 $c = 2$, 且 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 $a+b$ 的取值范围.

19. (12分) 已知直线 $x+y=1$ 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, 且交椭圆于 A, B 两点, 线段 AB 的中点是

$$M\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

(1) 求椭圆的方程;

(2) 过原点的直线 l 与线段 AB 相交 (不含端点) 且交椭圆于 C, D 两点, 求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

20. (12分) 已知 $f(x) = x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - k \ln x - 1 (k \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 求 k 的取值范围;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点, 判断函数 $f(x)$ 零点的个数.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1}{2x} - ax^2 + x (a \geq 0)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的极值点的个数;

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 证明 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{x_1 + x_2} > \frac{3}{4} - \ln 2$.

22. (10 分) 已知 $\triangle ABC$ 三内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c , 且 $3\sin^2 A + 3\sin^2 B = 4\sin A \sin B + 3\sin^2 C$.

(1) 求 $\cos C$ 的值;

(2) 若 $a=3, c=\sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

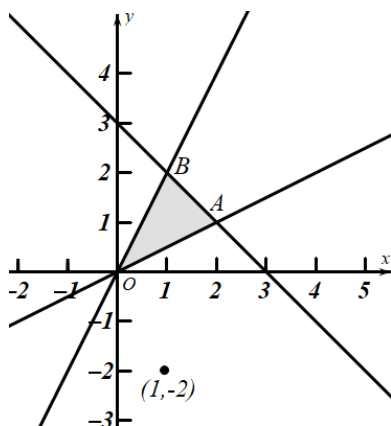
【解析】

根据题意，分析不等式组的几何意义，可得其表示的平面区域，设 $z_1 = x + 2y, z_2 = \frac{y+2}{x-1}$ ，分析 z_1, z_2 的几何意义，

可得 z_1, z_2 的最小值，据此分析选项即可得答案.

【详解】

解：根据题意，不等式组 $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ y \geq \frac{1}{2}x \\ x + y - 3 \leq 0 \end{cases}$ 其表示的平面区域如图所示，



其中 $A(2,1)$ ， $B(1,2)$ ，

设 $z_1 = x + 2y$ ，则 $y = -\frac{x}{2} + \frac{z_1}{2}$ ， z_1 的几何意义为直线 $y = -\frac{x}{2} + \frac{z_1}{2}$ 在 y

轴上的截距的 2 倍,

由图可得: 当 $y = -\frac{x}{2} + \frac{z_1}{2}$ 过点 $B(1, 2)$ 时, 直线 $z_1 = x + 2y$ 在 y 轴上的截距最大, 即 $x + 2y \leq 5$,

当 $y = -\frac{x}{2} + \frac{z_1}{2}$ 过点原点时, 直线 $z_1 = x + 2y$ 在 y 轴上的截距最小, 即 $x + 2y \geq 0$,

故 AB 错误;

设 $z_2 = \frac{y+2}{x-1}$, 则 z_2 的几何意义为点 (x, y) 与点 $(1, -2)$ 连线的斜率,

由图可得 z_2 最大可到无穷大, 最小可到无穷小, 故 C 错误, D 正确;

故选: D.

【点睛】

本题考查二元一次不等式的性质以及应用, 关键是对目标函数几何意义的认识, 属于基础题.

2、D

【解析】

通过计算 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)$, 可得 $f_{4k-3}(x), f_{4k-2}(x), f_{4k-1}(x), f_{4k}(x)$, 最后计算可得结果.

【详解】

由题可知: $f(x) = x \sin x$

所以 $f_1(x) = \sin x + x \cos x, f_2(x) = 2 \cos x - x \sin x$

$f_3(x) = -3 \sin x - x \cos x, f_4(x) = -4 \cos x + x \sin x$

$f_5(x) = 5 \sin x + x \cos x, \dots$

所以猜想可知: $f_{4k-3}(x) = (4k-3) \sin x + x \cos x$

$f_{4k-2}(x) = (4k-2) \cos x - x \sin x$

$f_{4k-1}(x) = -(4k-1) \sin x - x \cos x$

$f_{4k}(x) = -4k \cos x + x \sin x$

由 $2019 = 4 \times 505 - 1, 2021 = 4 \times 506 - 3$

所以 $f_{2019}(x) = -2019 \sin x - x \cos x$

$f_{2021}(x) = 2021 \sin x + x \cos x$

所以 $f_{2019}(x) + f_{2021}(x) = 2 \sin x$

故选：D

【点睛】

本题考查导数的计算以及不完全归纳法的应用，选择题、填空题可以使用取特殊值，归纳猜想等方法的使用，属中档题.

3、A

【解析】

根据几何概率计算公式，求出中间小三角形区域的面积与大三角形面积的比值即可.

【详解】

在 $\triangle ABD$ 中， $AD=3$ ， $BD=1$ ， $\angle ADB=120^\circ$ ，由余弦定理，得

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos 120^\circ} = \sqrt{13},$$

$$\text{所以 } \frac{DF}{AB} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

$$\text{所以所求概率为 } \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \right)^2 = \frac{4}{13}.$$

故选 A.

【点睛】

本题考查了几何概型的概率计算问题，是基础题.

4、C

【解析】

建立空间直角坐标系，利用向量的方法对四个命题逐一分析，由此得出正确命题的个数.

【详解】

设正方体边长为2，建立空间直角坐标系如下图所示， $A(2,0,0), C_1(0,2,2), G(2,1,2)$,

$$C(0,2,0), E(1,0,2), D(0,0,0), B_1(2,2,2), F(0,0,1), B(2,2,0).$$

①, $\overrightarrow{AC_1} = (-2, 2, 2), \overrightarrow{EG} = (1, 1, 0), \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{EG} = -2 + 2 + 0 = 0$ ，所以 $AC_1 \perp EG$ ，故①正确.

②, $\overrightarrow{GC} = (-2, 1, -2), \overrightarrow{ED} = (-1, 0, -2)$ ，不存在实数 λ 使 $\overrightarrow{GC} = \lambda \overrightarrow{ED}$ ，故 $GC \nparallel ED$ 不成立，故②错误.

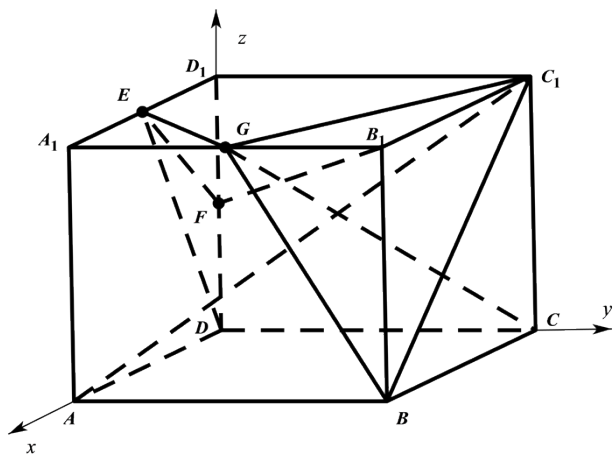
③, $\overrightarrow{B_1F} = (-2, -2, -1), \overrightarrow{BG} = (0, -1, 2), \overrightarrow{BC_1} = (-2, 0, 2), \overrightarrow{B_1F} \cdot \overrightarrow{BG} = 0, \overrightarrow{B_1F} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 2 \neq 0$ ，故 $B_1F \perp$ 平面 BGC_1 不成立，故③错误.

④, $\overrightarrow{EF} = (-1, 0, -1), \overrightarrow{BB_1} = (0, 0, 2)$ ，设 EF 和 BB_1 成角为 θ ，则 $\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BB_1}|}{|\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{BB_1}|} = \frac{|-2|}{\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，由于

$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$, 故④正确.

综上所述, 正确的命题有 2 个.

故选: C



【点睛】

本小题主要考查空间线线、线面位置关系的向量判断方法, 考查运算求解能力, 属于中档题.

5、A

【解析】

根据复数除法运算化简, 结合纯虚数定义即可求得 m 的值.

【详解】

由复数的除法运算化简可得

$$m + \frac{10}{3+i} = m + 3 - i,$$

因为是纯虚数, 所以 $m + 3 = 0$,

$$\therefore m = -3,$$

故选: A.

【点睛】

本题考查了复数的概念和除法运算, 属于基础题.

6、C

【解析】

化简得到 $\bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, $z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, 再计算复数模得到答案.

【详解】

$$(1+i)\bar{z}=1+2i, \text{ 故 } \bar{z}=\frac{1+2i}{1+i}=\frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-1+3i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i,$$

$$\text{故 } z=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i, |z|=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查了复数的化简，共轭复数，复数模，意在考查学生的计算能力.

7、D

【解析】

直接根据三角函数的图象平移规则得出正确的结论即可；

【详解】

$$\text{解：函数 } y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right],$$

$$\therefore \text{要得到函数 } y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \text{ 的图象,}$$

只需将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位.

故选：D.

【点睛】

本题考查三角函数图象平移的应用问题，属于基础题.

8、B

【解析】

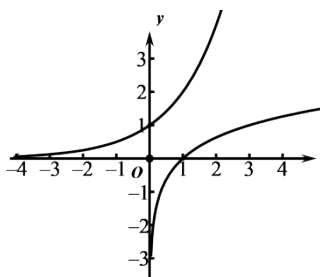
先判断命题 p, q 的真假,进而根据复合命题真假的真值表,即可得答案.

【详解】

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \log_c a = \frac{1}{\log_a c}, \text{ 因为 } a > 1, b > c > 1, \text{ 所以 } 0 < \log_a c < \log_a b, \text{ 所以 } \frac{1}{\log_a c} > \frac{1}{\log_a b}, \text{ 即命题 } p$$

为真命题；画出函数 $y=2^x$ 和 $y=\log_3 x$ 图象，知命题 q 为假命题,所以 $p \wedge (\neg q)$ 为真.

故选:B.



【点睛】

本题考查真假命题的概念,以及真值表的应用,解题的关键是判断出命题 p, q 的真假,难度较易.

9、 B

【解析】

先求出 $\vec{a} + \vec{b}$, 再利用 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$ 求出 t , 再求 $|\vec{b}|$.

【详解】

$$\text{解: } \vec{a} + \vec{b} = (1, -2) + (-3, t) = (-2, t-2)$$

$$\text{由 } \vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{b}), \text{ 所以 } \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$$

$$1 \times (-2) + (-2) \times (t-2) = 0,$$

$$t = 1, \vec{b} = (-3, 1), |\vec{b}| = \sqrt{10}$$

故选: B

【点睛】

考查向量的数量积及向量模的运算, 是基础题.

10、 D

【解析】

试题分析: $Q m \perp \alpha, m \parallel n, \therefore n \perp \alpha, \because n \perp \beta, \therefore \alpha \perp \beta$, 故选 D.

考点: 点线面的位置关系.

11、 C

【解析】

两复数相等, 实部与虚部对应相等.

【详解】

$$\text{由 } 3 + ai = b - (2a - 1)i,$$

$$\text{得 } \begin{cases} 3 = b \\ a = 1 - 2a \end{cases}, \text{ 即 } a = \frac{1}{3}, b = 1.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/528067110057006123>