兰州第一中学 2024 届高三下学期联考数学试题

请考生注意：

1．请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0．5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。

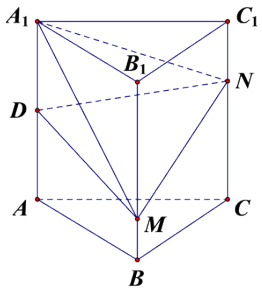
2．答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设直线 l 的方程为 $x-2y+m=0(m\in\mathbf{R})$，圆的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=25$，若直线 l 被圆所截得的弦长为 $2\sqrt{5}$，则实数 m 的取值为

A．-9 或 11　　B．-7 或 11　　C．-7　　D．-9

2．如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 各条棱的长度均相等，D 为 AA_1 的中点，M,N 分别是线段 BB_1 和线段 CC_1 的动点（含端点），且满足 $BM=C_1N$，当 M,N 运动时，下列结论中不正确的是



A．在 ΔDMN 内总存在与平面 ABC 平行的线段

B．平面 $DMN\perp$ 平面 BCC_1B_1

C．三棱锥 A_1-DMN 的体积为定值

D．ΔDMN 可能为直角三角形

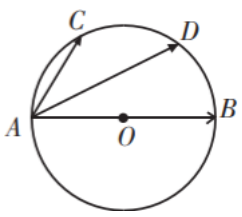
3．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 S_n 为前 n 项和，$2a_9=a_{11}+12$，则 S_{13} 的值是（　　）

A．156　　B．124　　C．136　　D．180

4．设 i 是虚数单位，复数 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=$（　　）

A．$-1+\mathrm{i}$　　B．$-1-\mathrm{i}$　　C．$1+\mathrm{i}$　　D．$1-\mathrm{i}$

5．如图，$AB=2$ 是圆 O 的一条直径，C,D 为半圆弧的两个三等分点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=$（　　）



A．$\frac{5}{2}$　　B．4　　C．2　　D．$1+\sqrt{3}$

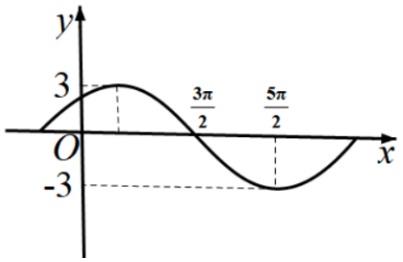
6．已知实数$a>0$，$a\neq 1$，函数$f\left(x\right)=\begin{cases}a^{x},x<1\\ x^{2}+\frac{4}{x}+a\ln x,x\geq 1\end{cases}$在$R$上单调递增，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$1<a\leq 2$　　B．$a<5$　　C．$3<a<5$　　D．$2\leq a\leq 5$

7．已知双曲线$\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>0,b>0)$，过原点作一条倾斜角为$\frac{\pi}{3}$直线分别交双曲线左、右两支 P，Q 两点，以线段 PQ 为直径的圆过右焦点 F，则双曲线离心率为(　　)

A．$\sqrt{2}+1$　　B．$\sqrt{3}+1$　　C．2　　D．$\sqrt{5}$

8．函数$f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$（其中$A>0$，$\omega>0$，$\left|\varphi\right|<\frac{\pi}{2}$）的图象如图，则此函数表达式为（　　）



A．$f\left(x\right)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$　　B．$f\left(x\right)=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$

C．$f\left(x\right)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$　　D．$f\left(x\right)=3\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$

9．记单调递增的等比数列$\left\{a_{n}\right\}$的前n项和为S_{n}，若$a_{2}+a_{4}=10$，$a_{2}a_{3}a_{4}=64$，则（　　）

A．$S_{n+1}-S_{n}=2^{n+1}$　　B．$a_{n}=2^{n}$　　C．$S_{n}=2^{n}-1$　　D．$S_{n}=2^{n-1}-1$

10．下列判断错误的是(　　)

A．若随机变量ξ服从正态分布$N\left(1,\sigma^{2}\right),P\left(\xi\leq 4\right)=0.78$，则$P\left(\xi\leq -2\right)=0.22$

B．已知直线$l\perp$平面α，直线$m//$平面β，则“$\alpha//\beta$”是“$l\perp m$”的充分不必要条件

C．若随机变量ξ服从二项分布：　$\xi:\ B\left(4,\frac{1}{4}\right)$，　则$E\left(\xi\right)=1$

D．$am>bm$是$a>b$的充分不必要条件

11．为实现国民经济新“三步走”的发展战略目标，国家加大了扶贫攻坚的力度．某地区在 2015

年以前的年均脱贫率（脱离贫困的户数占当年贫困户总数的比）为70%．2015 年开始，全面实施“精准扶贫”政策后，扶贫效果明显提高，其中 2019 年度实施的扶贫项目，各项目参加户数占比（参加该项目户数占 2019 年贫困户总数的比）及该项目的脱贫率见下表：

实施项目	种植业	养殖业	工厂就业	服务业
参加用户比	40%	40%	10%	10%
脱贫率	95%	95%	90%	90%

那么2019年的年脱贫率是实施“精准扶贫”政策前的年均脱贫率的（　　）

A．$\frac{27}{28}$倍　　B．$\frac{47}{35}$倍　　C．$\frac{48}{35}$倍　　D．$\frac{7}{5}$倍

12．双曲线$\frac{x^2}{m}-y^2=1\left(m>c\right)$的一条渐近线方程为$x+2y=0$，那么它的离心率为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．在△ABC 中，a＝3，$b=2\sqrt{6}$，B＝2A，则 cosA＝_____.

14．在$(x^2-\frac{2}{x})^6$的二项展开式中，所有项的系数的和为_____

15．已知两动点A,B在椭圆$C\frac{x^2}{a^2}+y^2=1\left(a>1\right)$上，动点$P$在直线$3x+4y-10=0$上，若$\angle APB$恒为锐角，则椭圆$C$的离心率的取值范围为_____.

16．设变量x，y满足约束条件$\begin{cases}x-y+2\le 0\\ x+2y-4\ge 0\\ y-3\le 0\end{cases}$，则目标函数$z=x-2y$的最小值为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知函数$f(x)=ax^2-a-\ln x$，$\exists a\in[0,+\infty)$,使得对任意两个不等的正实数x_1,x_2，都有

$\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0$恒成立.

（1）求$f(x)$的解析式；

（2）若方程$\frac{1}{2x}=f(x)+m$有两个实根x_1,x_2，且$x_1<x_2$，求证：$x_1+x_2>1$.

18.（12 分）设椭圆 E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a,b>0）过 M（2，$\sqrt{2}$），N($\sqrt{6}$,1)两点，O 为坐标原点，

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）是否存在圆心在原点的圆，使得该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒有两个交点 A,B,且$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$？若存在，写出该圆的方程，若不存在说明理由.

19.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=e^x-\frac{k}{2}x^2$ 有两个极值点 x_1，x_2.

（1）求实数 k 的取值范围；

（2）证明：$\frac{f\left(x_1\right)}{x_1}+\frac{f\left(x_2\right)}{x_2}<k$.

20.（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+\frac{1}{2}t\\ y=\sqrt{3}a-\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数，$a\in R$）.在以坐标原点为极点、x 轴的非负半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C 的极坐标方程为 $3\rho^2\cos 2\theta+4\rho^2\sin^2\theta=3$.

（1）若点 $A\left(2,0\right)$ 在直线 l 上，求直线 l 的极坐标方程；

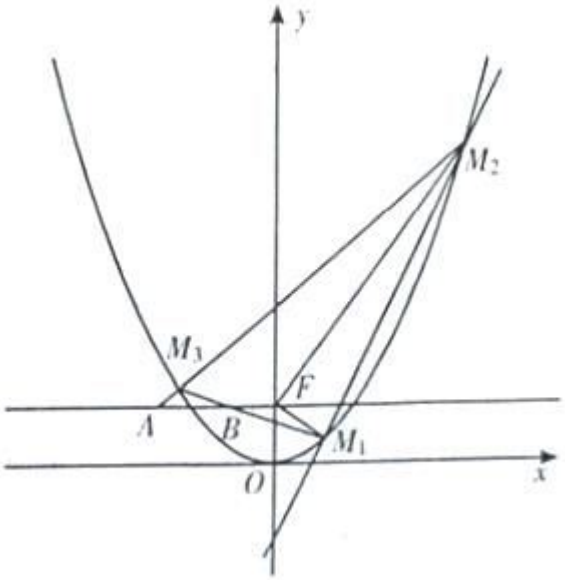
（2）已知 $a>0$，若点 P 在直线 l 上，点 Q 在曲线 C 上，且 $|PQ|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，求 a 的值.

21.（12 分）$\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a、b、c，$2a+c=2b\cos C$.

（1）求 B 的大小；

（2）若 $a=3$，且 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，且 $\left|\overrightarrow{BG}\right|=\frac{\sqrt{19}}{3}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

22.（10 分）如图，直线□ = 2□ − 2与抛物线□² = 2□□(□ > 0)交于□₁, □₂两点，直线□ = □/2与□轴交于点□，且直线□ = □/2恰好平分□□₁□□₂.



（1）求□的值；

（2）设□是直线□ = □/2上一点，直线□□2交抛物线于另一点□3，直线□1□3交直线□ = □/2于点□，求$\overrightarrow{□□}\cdot\overrightarrow{□□}$的值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=25$ 的圆心坐标为（1，1），该圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{|m-1|}{\sqrt{5}}$，结合弦长公式得

$2\sqrt{25-(\frac{|m-1|}{\sqrt{5}})^2}=2\sqrt{5}$，解得 $m=-9$ 或 $m=11$，故选 A.

2、D

【解析】

A 项用平行于平面 ABC 的平面与平面 MDN 相交，则交线与平面 ABC 平行；

B 项利用线面垂直的判定定理；

C 项三棱锥 A_1-DMN的体积 与三棱锥 $\mathrm{N}-A_1DM$ 体积相等，三棱锥 $\mathrm{N}-A_1DM$

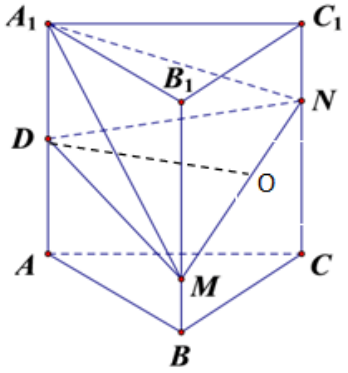
的底面积是定值，高也是定值，则体积是定值；

D 项用反证法说明三角形 DMN 不可能是直角三角形.

【详解】

A 项，用平行于平面 ABC 的平面截平面 MND，则交线平行于平面 ABC，故正确；

B 项，如图：



当 M、N 分别在 BB_1、CC_1 上运动时,若满足 BM=CN,则线段 MN 必过正方形 BCC_1B_1 的中心 O,由 DO 垂直于平面 BCC_1B_1 可得平面 $DMN \perp$ 平面 BCC_1B_1，故正确；

C 项,当 M、N 分别在 BB_1、CC_1 上运动时,$\triangle A_1DM$ 的面积不变,N 到平面 A_1DM 的距离不变,所以棱锥 $N\text{-}A_1DM$ 的体积不变,即三棱锥 $A_1\text{-}DMN$ 的体积为定值,故正确；

D 项,若$\triangle DMN$ 为直角三角形,则必是以$\angle MDN$ 为直角的直角三角形,但 MN 的最大值为 BC_1,而此时 DM,DN 的长大于 BB_1,所以$\triangle DMN$ 不可能为直角三角形,故错误.

故选 D

【点睛】

本题考查了命题真假判断、棱柱的结构特征、空间想象力和思维能力，意在考查对线面、面面平行、垂直的判定和性质的应用，是中档题.

3、A

【解析】

因为 $a_7+a_{11}=2a_9=a_{11}+12$，可得 $a_7=12$，根据等差数列前 n 项和，即可求得答案.

【详解】

Q $a_7+a_{11}=2a_9=a_{11}+12$，

$\therefore a_7=12$，

$\therefore S_{13}=\dfrac{13\left(a_1+a_{13}\right)}{2}=13a_7=13\times12=156$.

故选：A.

【点睛】

本题主要考查了求等差数列前n项和，解题关键是掌握等差中项定义和等差数列前n项和公式，考查了分析能力和计算能力，属于基础题.

4、D

【解析】

利用复数的除法运算，化简复数$\frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$，即可求解，得到答案.

【详解】

由题意，复数$\frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{(1+\mathrm{i})\cdot(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\times(-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$，故选 D.

【点睛】

本题主要考查了复数的除法运算，其中解答中熟记复数的除法运算法则是解答的关键，着重考查了运算与求解能力，属于基础题.

5、B

【解析】

连接CD、OD，即可得到$\angle CAB=\angle DOB=60^{\circ}$，$AC=1$，再根据平面向量的数量积及运算律计算可得；

【详解】

解：连接CD、OD，

$\because C$，D是半圆弧的两个三等分点，$\therefore CD//AB$，且$AB=2CD$，$\angle CAB=\angle DOB=60^{\circ}$

所以四边形$AODC$为棱形，

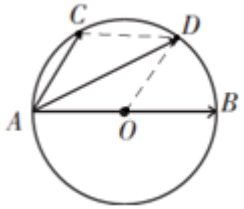
$$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\angle BAC=1\times2\times\frac{1}{2}=1$$

$$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\left[\overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\right]=\overrightarrow{AB}\cdot\left(2\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^{2}.$$

$$=2\times1+\frac{1}{2}\times2^{2}=4$$

故选：B



【点睛】

本题考查平面向量的数量积及其运算律的应用，属于基础题.

6、D

【解析】

根据题意，对于函数分 2 段分析：当$x<1, f(x)=a^x$，由指数函数的性质分析可得$a>1$①，当$x\geq 1, f(x)=x^2+\frac{4}{x}+a\ln x$，由导数与函数单调性的关系可得$f'(x)=2x-\frac{4}{x^2}+\frac{a}{x}\geq 0$，在$[1,+\infty)$上恒成立，变形可得$a\geq 2$②，再结合函数的单调性，分析可得$a\leq 1+4$③，联立三个式子，分析可得答案.

【详解】

解：根据题意，函数$f\left(x\right)=\begin{cases}a^x, x<1\\ x^2+\frac{4}{x}+a\ln x, x\geq 1\end{cases}$在$R$上单调递增，

当$x<1, f(x)=a^x$，若$f\left(x\right)$为增函数，则$a>1$①，

当$x\geq 1, f(x)=x^2+\frac{4}{x}+a\ln x$，

若$f\left(x\right)$为增函数，必有$f'(x)=2x-\frac{4}{x^2}+\frac{a}{x}\geq 0$在$[1,+\infty)$上恒成立，

变形可得：$a\geq \frac{4}{x}-2x^2$，

又由$x\geq 1$，可得$g\left(x\right)=\frac{4}{x}-2x^2$在$[1,+\infty)$上单调递减，则$\frac{4}{x}-2x^2\leq \frac{4}{1}-2=2$，

若$a\geq \frac{4}{x}-2x^2$在$[1,+\infty)$上恒成立，则有$a\geq 2$②，

若函数$f\left(x\right)$在R上单调递增，左边一段函数的最大值不能大于右边一段函数的最小值，

则需有$a\leq 1+4=5$，③

联立①②③可得：$2\leq a\leq 5$.

故选：D.

【点睛】

本题考查函数单调性的性质以及应用，注意分段函数单调性的性质.

7、B

【解析】

求得直线PQ的方程，联立直线的方程和双曲线的方程，求得P,Q两点坐标的关系，根据$FQ\perp FP$列方程，化简后求得离心率.

【详解】

设$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，依题意直线$PQ$的方程为$y=\sqrt{3}x$，代入双曲线方程并化简得

$x^2=\frac{a^2b^2}{b^2-3a^2},y^2=3x^2=\frac{3a^2b^2}{b^2-3a^2}$，故$x_1+x_2=0,x_1\cdot x_2=\frac{-a^2b^2}{b^2-3a^2}$，$y_1\cdot y_2=3x_1\cdot x_2=\frac{-3a^2b^2}{b^2-3a^2}$，设焦点坐标为$F\left(c,0\right)$，由于以$PQ$为直径的圆经过点$F$，故$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=0$，即$\left(x_1-c,y_1\right)\cdot\left(x_2-c,y_2\right)=0$，即$4x_1x_2+c^2=0$，即$b^4-6a^2b^2-3a^4=0$，两边除以$a^4$得$\left(\frac{b}{a}\right)^4-6\left(\frac{b}{a}\right)^2-3=0$，解得$\left(\frac{b}{a}\right)^2=3+2\sqrt{3}$.故

$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$，故选 B.

【点睛】

本小题主要考查直线和双曲线的交点，考查圆的直径有关的几何性质，考查运算求解能力，属于中档题.

8、B

【解析】

由图象的顶点坐标求出A，由周期求出ω，通过图象经过点$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$，求出$\varphi$，从而得出函数解析式.

【详解】

解：由图象知$A=3$，$T=4\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)=4\pi$，则$\omega=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$，

图中的点$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$应对应正弦曲线中的点$(\pi,0)$，

所以$\frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{2}+\varphi=\pi$，解得$\varphi=\frac{\pi}{4}$，

故函数表达式为$f\left(x\right)=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查三角函数图象及性质，三角函数的解析式等基础知识；考查考生的化归与转化思想，数形结合思想，属于基础题.

9、C

【解析】

先利用等比数列的性质得到a_3的值，再根据a_2,a_4的方程组可得a_2,a_4的值，从而得到数列的公比，进而得到数列的通项和前n项和，根据后两个公式可得正确的选项.

【详解】

因为$\{a_n\}$为等比数列，所以$a_3^2=a_2a_4$，故$a_3^3=64$即$a_3=4$，

由$\begin{cases}a_2+a_4=10\\a_2a_4=16\end{cases}$可得$\begin{cases}a_2=2\\a_4=8\end{cases}$或$\begin{cases}a_2=8\\a_4=2\end{cases}$，因为$\{a_n\}$为递增数列，故$\begin{cases}a_2=2\\a_4=8\end{cases}$符合.

此时$q^2=4$，所以$q=2$或$q=-2$（舍，因为$\{a_n\}$为递增数列）.

故$a_n=a_3q^{n-3}=4\times2^{n-3}=2^{n-1}$，$S_n=\dfrac{1\times\left(1-2^n\right)}{1-2}=2^n-1$.

故选C.

【点睛】

一般地，如果$\{a_n\}$为等比数列，S_n为其前n项和，则有性质：

（1）若$m,n,p,q\in N^*,m+n=p+q$，则$a_ma_n=a_pa_q$；

（2）公比$q\neq1$时，则有$S_n=A+Bq^n$，其中A,B为常数且$A+B=0$；

（3）$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n},\cdots$为等比数列（$S_n\neq0$）且公比为$q^n$.

10、D

【解析】

根据正态分布、空间中点线面的位置关系、充分条件与必要条件的判断、二项分布及不等式的性质等知识，依次对四个选项加以分析判断，进而可求解.

【详解】

对于A选项，若随机变量ξ服从正态分布$N\left(1,\sigma^2\right),P\left(\xi\leq4\right)=0.78$，根据正态分布曲线的对称性，有

$P\left(\xi\leq-2\right)=P\left(\xi\geq4\right)=1-P\left(\xi\leq4\right)=1-0.78=0.22$，故$A$选项正确，不符合题意；

对于B选项，已知直线$l\perp$平面α，直线$m//$平面β，则当$\alpha//\beta$时一定有$l\perp m$，充分性成立，而当$l\perp m$时，不

一定有$\alpha//\beta$，故必要性不成立，所以“$\alpha//\beta$”是“$l\perp m$”的充分不必要条件，故B选项正确，不符合题意；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/528106126120006075