

## 第 18 讲 二次函数中的线段相等与和差倍半问题（核心考点讲与练）

### 【考点剖析】

1. （2022•黄浦区二模）在平面直角坐标系  $xOy$  中，抛物线  $y = -x^2 + mx + n$  经过点  $A(5, 0)$ ，顶点为点  $B$ ，对称轴为直线  $x = 3$ ，且对称轴与  $x$  轴交于点  $C$ 。直线  $y = kx + b$  经过点  $A$ ，与线段  $BC$  交于点  $E$ 。
- （1）求抛物线  $y = -x^2 + mx + n$  的表达式；
- （2）联结  $BO$ 、 $EO$ 。当  $\triangle BOE$  的面积为 3 时，求直线  $y = kx + b$  的表达式；
- （3）在（2）的条件下，设点  $D$  为  $y$  轴上的一点，联结  $BD$ 、 $AD$ 。当  $BD = EO$  时，求  $\angle DAO$  的余切值。

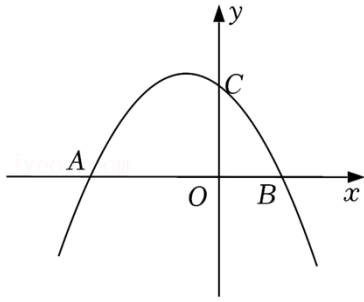
2. （2021 闵行区二模 24）（12 分）在平面直角坐标系  $xOy$  中，抛物线  $y = -x^2 + mx + n$  经过点  $A(5, 0)$ ，顶点为点  $B$ ，对称轴为直线  $x = 3$ ，且对称轴与  $x$  轴交于点  $C$ 。直线  $y = kx + b$ ，经过点  $A$ ，与线段  $BC$  交于点  $E$ 。
- （1）求抛物线  $y = -x^2 + mx + n$  的表达式；
- （2）联结  $BO$ 、 $EO$ 。当  $\triangle BOE$  的面积为 3 时，求直线  $y = kx + b$  的表达式；
- （3）在（2）的条件下，设点  $D$  为  $y$  轴上的一点，联结  $BD$ 、 $AD$ ，当  $BD = EO$  时，求  $\angle DAO$  的余切值。

3. (2022 春·徐汇区校级期中) 如图, 二次函数  $y = -\frac{1}{3}x^2 + bx + 2$  的图象与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点, 与  $y$  轴相交于点  $C$ , 点  $A$  的坐标为  $(-4, 0)$ ,  $P$  是抛物线上一点 (点  $P$  与点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  都不重合).

(1) 求抛物线解析式;

(2) 求点  $B$  的坐标;

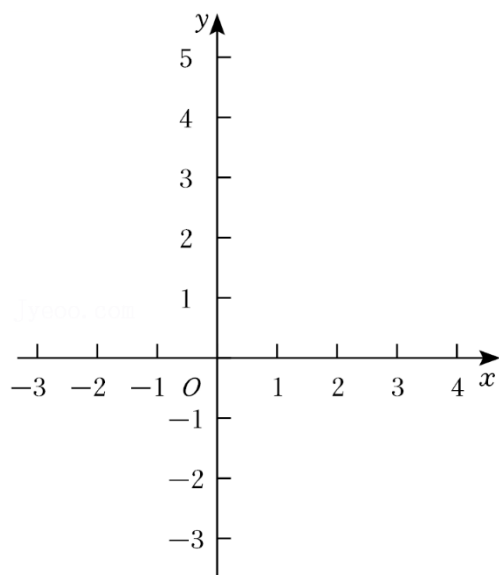
(3) 设直线  $PB$  与直线  $AC$  相交于点  $M$ , 且存在这样的点  $P$ , 使得  $PM:MB=1:2$ , 试确定点  $P$  的横坐标.



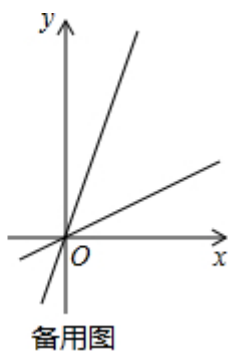
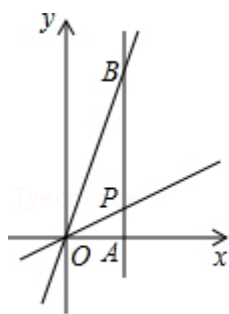
4. 如图，抛物线  $y = -\frac{4}{3}x^2 + bx + c$  过点  $A(3, 0)$ ， $B(0, 2)$ 。  $M(m, 0)$  为线段  $OA$  上一个动点（点  $M$  与点  $A$  不重合），过点  $M$  作垂直于  $x$  轴的直线与直线  $AB$  和抛物线分别交于点  $P$ 、 $N$ 。
- （1）求直线  $AB$  的解析式和抛物线的解析式；
  - （2）如果点  $P$  是  $MN$  的中点，那么求此时点  $N$  的坐标；
  - （3）如果以  $B$ ， $P$ ， $N$  为顶点的三角形与  $\triangle APM$  相似，求点  $M$  的坐标。

### 【过关检测】

1. (2022 杨浦一模 24) 已知在平面直角坐标系  $xOy$  中, 抛物线  $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于点  $A(-1, 0)$  和点  $B$ , 与  $y$  轴交于点  $C(0, 2)$ , 点  $P$  是该抛物线在第一象限内一点, 联结  $AP$ 、 $BC$ ,  $AP$  与线段  $BC$  相交于点  $F$ .
- (1) 求抛物线的表达式;
- (2) 设抛物线的对称轴与线段  $BC$  交于点  $E$ , 如果点  $F$  与点  $E$  重合, 求点  $P$  的坐标;
- (3) 过点  $P$  作  $PG \perp x$  轴, 垂足为点  $G$ ,  $PG$  与线段  $BC$  交于点  $H$ , 如果  $PF = PH$ , 求线段  $PH$  的长度.



2. (2019•杨浦区三模) 在平面直角坐标系  $xOy$  中，第一象限内的点  $P$  在直线  $y = \frac{1}{2}x$  上，过点  $P$  的直线交  $x$  轴正半轴于点  $A$ ，交直线  $y = 3x$  于点  $B$ ，点  $B$  在第一象限内.
- (1) 如图 1，当  $\angle OAB = 90^\circ$  时，求  $\frac{BP}{AP}$  的值；
  - (2) 当点  $A$  的坐标为  $(6, 0)$ ，且  $BP = 2AP$  时，将过点  $A$  的抛物线  $y = -x^2 + mx$  上下方平移，使它过点  $B$ ，求平移的方向和距离.



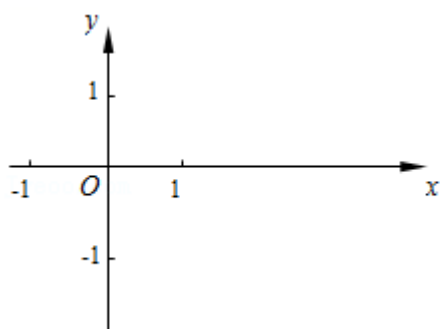
3. （2021 秋•金山区期末）已知：抛物线  $y = -x^2 + bx + c$  经过点  $A(0, 1)$  和  $B(1, 4)$ ，顶点为点  $P$ ，抛物线的对称轴与  $x$  轴相交于点  $Q$ .
- （1）求抛物线的解析式；
  - （2）求  $\angle PAQ$  的度数；
  - （3）把抛物线向上或者向下平移，点  $B$  平移到点  $C$  的位置，如果  $BQ = CP$ ，求平移后的抛物线解析式.

4. (2019•闵行区二模) 已知抛物线  $y = -x^2 + bx + c$  经过点  $A(1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ ，且与  $y$  轴的公共点为点  $C$ .

(1) 求抛物线的解析式，并求出点  $C$  的坐标；

(2) 求  $\angle ACB$  的正切值；

(3) 点  $E$  为线段  $AC$  上一点，过点  $E$  作  $EF \perp BC$ ，垂足为点  $F$ . 如果  $\frac{EF}{BF} = \frac{1}{4}$ ，求  $\triangle BCE$  的面积.



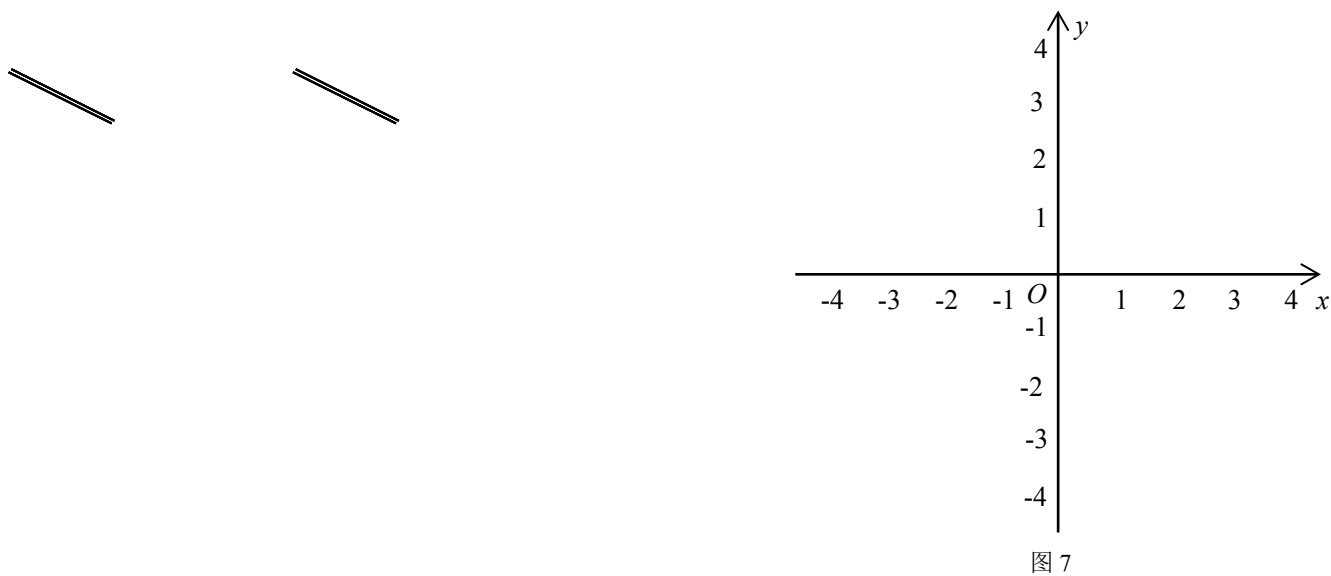
5. (2020 长宁二模) 如图 7，在平面直角坐标系  $xOy$  中，已知抛物线  $y = x^2 + mx + n$  经过点  $A(2, -2)$ ，对称轴是直线  $x = 1$ ，顶点为点  $B$ ，抛物线与  $y$  轴交于点  $C$ .

(1) 求抛物线的表达式和点  $B$  的坐标；

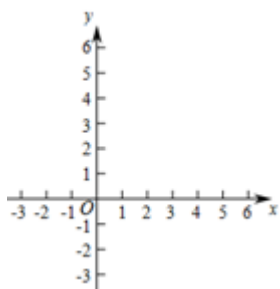
(2) 将上述抛物线向下平移 1 个单位，平移后的抛物线与  $x$  轴正半轴交于点  $D$ ，求  $\triangle BCD$  的面积；

(3) 如果点  $P$  在原抛物线上，且在对称轴的右侧，联结  $BP$  交线段  $OA$  于点  $Q$ ， $\frac{BQ}{PQ} = \frac{1}{5}$ ，求点  $P$  的

坐标.



6. (2020 浦东二模) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知抛物线  $y = -x^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于点  $A$  和点  $B$  (点  $A$  在点  $B$  的左侧), 与  $y$  轴交于点  $C(0,3)$ , 对称轴是直线  $x=1$ .





(1) 求抛物线的表达式;

(2) 直线  $MN$  平行于  $x$  轴, 与抛物线交于  $M$ 、 $N$  两点 (点  $M$  在点  $N$  的左侧), 且  $MN = \frac{3}{4}AB$ , 点  $C$  关于直线  $MN$  的对称点为  $E$ , 求线段  $OE$  的长;

(3) 点  $P$  是该抛物线上一点, 且在第一象限内, 联结  $CP$ 、 $EP$ ,  $EP$  交线段  $BC$  于点  $F$ , 当  $S_{\triangle CPF} : S_{\triangle CEF} = 1:2$  时, 求点  $P$  的坐标.



## 第18讲 二次函数中的线段相等与和差倍半问题（核心考点讲与练）

### 【考点剖析】

1. （2022•黄浦区二模）在平面直角坐标系  $xOy$  中，抛物线  $y = -x^2 + mx + n$  经过点  $A(5, 0)$ ，顶点为点  $B$ ，对称轴为直线  $x = 3$ ，且对称轴与  $x$  轴交于点  $C$ 。直线  $y = kx + b$  经过点  $A$ ，与线段  $BC$  交于点  $E$ 。
- (1) 求抛物线  $y = -x^2 + mx + n$  的表达式；
- (2) 联结  $BO$ 、 $EO$ 。当  $\triangle BOE$  的面积为 3 时，求直线  $y = kx + b$  的表达式；
- (3) 在 (2) 的条件下，设点  $D$  为  $y$  轴上的一点，联结  $BD$ 、 $AD$ 。当  $BD = EO$  时，求  $\angle DAO$  的余切值。

【分析】(1) 利用待定系数法和抛物线对称轴公式即可求解；

(2) 先求出顶点  $B$  坐标，根据  $\triangle BOE$  的面积为 3 求出  $BE$ ，进而求出点  $E$  坐标，利用待定系数法即可求解；

(3) 分  $BD \parallel OE$  和  $BD$  与  $OE$  不平行两种情况，分别求出  $D$  坐标，利用余切定义即可求解。

【解答】解：(1)  $\because$  抛物线  $y = -x^2 + mx + n$  经过点  $A(5, 0)$ ，对称轴为直线  $x = 3$ ，

$$\therefore \begin{cases} -\frac{m}{-2} = 3 \\ -25 + 5m + n = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} m = 6 \\ n = -5 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线表达式为  $y = -x^2 + 6x - 5$ ；

(2) 把  $x = 3$  代入  $y = -x^2 + 6x - 5$  得  $y = 4$ ，

$\therefore$  抛物线顶点  $B$  坐标为  $(3, 4)$ ，

由  $\triangle BOE$  的面积为 3 得  $\frac{1}{2}BE \times 3 = 3$ ，

$\therefore BE = 2$ ，

$\because$  点  $E$  在线段  $BC$  上，

$\therefore$  点  $E$  坐标为  $E(3, 2)$ ，

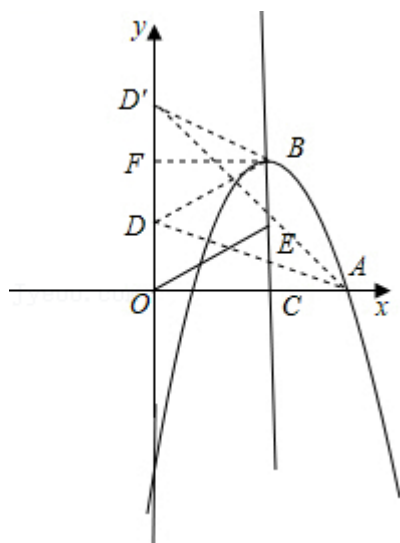
把点  $E(3, 2)$  和点  $A(5, 0)$  代入  $y = kx + b$  得，

$$\begin{cases} 5k + b = 0 \\ 3k + b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -1 \\ b = 5 \end{cases},$$

∴直线的表达式为  $y = -x + 5$ ;

(3) 如图, ①若  $BD \parallel OE$ ,



∵  $BD = EO$ ,

∴ 四边形  $OEBD$  为平行四边形,

则点  $D$  坐标为  $(0, 2)$ ,

连接  $DA$ ,

$$\therefore \cot \angle DAO = \frac{OA}{DO} = \frac{5}{2};$$

②若  $BD$  不平行  $OE$ , 如图  $D'$ ,

则四边形  $OEBD'$  为等腰梯形,

做  $BF \perp y$  轴于  $F$ , 则  $D'F = DF = 2$ ,

∴ 点  $D'$  坐标为  $(0, 6)$ ,

连接  $D'A$ ,

$$\therefore \cot \angle D'AO = \frac{AO}{D'O} = \frac{5}{6},$$

综上所述, 此时  $\angle DAO$  的余切值为  $\frac{5}{2}$  或  $\frac{5}{6}$ .

【点评】本题为二次函数综合题, 考查了二次函数性质, 求一次函数解析式, 余切定义等知识, 熟练掌握各知识点是解题关键, 解第(3)步时要注意分类讨论思想应用.

2. (2021 闵行区二模 24) (12 分) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 抛物线  $y = -x^2 + mx + n$  经过点  $A(5, 0)$ , 顶点为点  $B$ , 对称轴为直线  $x = 3$ , 且对称轴与  $x$  轴交于点  $C$ . 直线  $y = kx + b$ , 经过点  $A$ , 与线段  $BC$  交于点  $E$ .

(1) 求抛物线  $y = -x^2 + mx + n$  的表达式;

(2) 联结  $BO$ 、 $EO$ . 当  $\triangle BOE$  的面积为 3 时, 求直线  $y = kx + b$  的表达式;

(3) 在(2)的条件下, 设点  $D$  为  $y$  轴上的一点, 联结  $BD$ 、 $AD$ , 当  $BD=EO$  时, 求  $\angle DAO$  的余切值.

【分析】(1) 利用待定系数法和抛物线对称轴公式即可求解;

(2) 先求出顶点  $B$  坐标, 根据  $\triangle BOE$  的面积为 3 求出  $BE$ , 进而求出点  $E$  坐标, 利用待定系数法即可求解;

(3) 分  $BD \parallel OE$  和  $BD$  与  $OE$  不平行两种情况, 分别求出  $D$  坐标, 利用余切定义即可求解.

【解答】解: (1)  $\because$  抛物线  $y = -x^2 + mx + n$  经过点  $A(5, 3)$ ,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{m}{-2} = 3 \\ -25 + 5m + n = 0 \end{cases},$$
$$\therefore \begin{cases} m = 6 \\ n = -5 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线表达式为  $y = -x^2 + 6x - 5$ ;

(2) 把  $x=3$  代入  $y = -x^2 + 6x - 5$  得  $y=4$ ,

$\therefore$  抛物线顶点  $B$  坐标为  $(3, 4)$ ,

由  $\triangle BOE$  的面积为 3 得  $\frac{6}{2}BE \times 3 = 3$ ,

$\therefore BE = 2$ ,

$\because$  点  $E$  在线段  $BC$  上,

$\therefore$  点  $E$  坐标为  $E(3, 3)$ ,

把点  $E(3, 3)$  和点  $A(8, 2)$

$$\begin{cases} 5k + b = 0 \\ 8k + b = 2 \end{cases},$$
$$\therefore \begin{cases} k = -1 \\ b = 8 \end{cases},$$

$\therefore$  直线表达式为  $y = -x + 8$ ;

(3) 如图, ①若  $BD \parallel OE$ ,

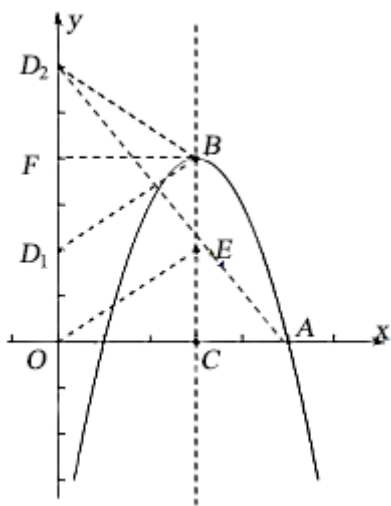
则四边形  $OEBD_1$  为平行四边形,

则点  $D_1$  坐标为  $(0, 2)$ ,

连接  $D_1A$ ,

$$\therefore \cot \angle D_1AO = \frac{5}{6},$$

综上所述, 此时  $\angle DAO$  的余切值为  $\frac{5}{6}$  或  $\frac{5}{6}$ .



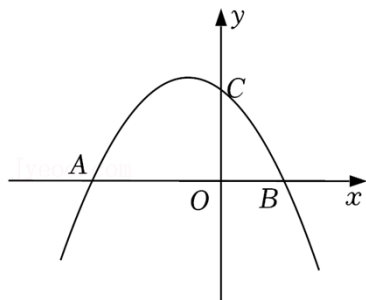
【点评】本题为二次函数综合题，考查了二次函数性质，求一次函数解析式，余切定义等知识，熟练掌握各知识点是解题关键，解第（3）步时要注意分类讨论思想应用．

3. （2022 春•徐汇区校级期中）如图，二次函数  $y = -\frac{1}{3}x^2 + bx + 2$  的图象与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点，与  $y$  轴相交于点  $C$ ，点  $A$  的坐标为  $(-4, 0)$ ， $P$  是抛物线上一点（点  $P$  与点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  都不重合）．

（1）求抛物线解析式；

（2）求点  $B$  的坐标；

（3）设直线  $PB$  与直线  $AC$  相交于点  $M$ ，且存在这样的点  $P$ ，使得  $PM:MB=1:2$ ，试确定点  $P$  的横坐标．



【分析】（1）由点  $A$  的坐标，利用二次函数图象上点的坐标特征可求出  $b$  的值，即可得到抛物线的解析式；

（2）代入  $y=0$  求出  $x$  值，可得出点  $B$  的坐标；

（3）（解法一）代入  $x=0$  求出  $y$  值，进而可得出点  $C$  的坐标，由点  $A$ 、 $C$  的坐标利用待定系数法可求出直线  $AC$  的解析式，假设存在，设点  $M$  的坐标为  $(m, \frac{1}{2}m+2)$ ，分  $B$ 、 $P$  在直线  $AC$  的同侧和异侧两种情况考虑，由点  $B$ 、 $M$  的坐标结合  $PM:MB=1:2$  即可得出点  $P$  的坐标，再利用二次函数图象上点的坐标特征可得出关于  $m$  的一元二次方程，解之即可得出结论；

（解法二）代入  $x=0$  求出  $y$  值，进而可得出点  $C$  的坐标，由点  $A$ 、 $C$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。  
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/535111313144011221>