

四川省遂宁中学校高新校区 2023-2024 学年高二下学期 7 月

月考数学试卷

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

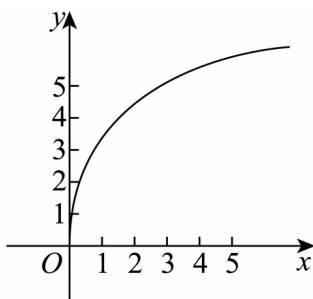
1. 若 $\left(x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为 1024 ，则第四项与第五项的系数之比为 ()

A. $\frac{3}{14}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $-\frac{5}{18}$ D. $-\frac{4}{21}$

2. 已知函数 $f(x) = ax^{a+b}$ 的导函数为 $f'(x) = 12x^3$ ，则 ()

A. $b(a+b) = 12$ B. $a(a+b) = 36$ C. $a = 3, b = 1$ D. $a = 1, b = 3$

3. 函数 $f(x)$ 的图象如图所示，下列数值排序正确的是 ()



A. $0 < f'(2) < f'(3) < f(3) - f(2)$ B. $0 < f'(3) < f(3) - f(2) < f'(2)$
C. $0 < f'(3) < f'(2) < f(3) - f(2)$ D. $0 < f(3) - f(2) < f'(2) < f'(3)$

4. 现将《西游记》、《红楼梦》、《水浒传》、《三国演义》、《史记》、《资治通鉴》6 本不同的书籍分发给甲乙丙 3 人，每人至少分得 1 本，已知《西游记》分发给了甲，则不同的分发方式种数是 ()

A. 180 B. 150 C. 120 D. 210

5. 某地为响应“扶贫必扶智，扶智就扶知识、扶技术、扶方法”的号召，建立了农业科技

图书馆，供农民免费借阅．现收集了该图书馆五年的借阅数据如下表：

年份	2016	2017	2018	2019	2020
年份代码 x	1	2	3	4	5
年借阅量 y （万册）	4.9	5.1	5.5	5.7	5.8

根据上表，可得 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 0.24x + \hat{b}$ ，则下列说法中错误的是（ ）．

A. $\hat{b} = 4.68$

B. 借阅量 4.9, 5.1, 5.5, 5.7, 5.8 的第 75 百分位数为 5.7

C. y 与 x 的线性相关系数 $r > 0$

D. 2021 年的借阅量一定少于 6.12 万册

6. 已知函数 $f(x) = (x+a)^2 + \ln x$ 的图象上存在不同的两点 A, B ，使得曲线 $y = f(x)$ 在点

A, B 处的切线都与直线 $x + 2y = 0$ 垂直，则实数 a 的取值范围是（ ）

A. $(-\infty, 1 - \sqrt{2})$ B. $(1 - \sqrt{2}, 0)$ C. $(-\infty, 1 + \sqrt{2})$ D. $(0, 1 + \sqrt{2})$

7. 已知函数 $f(x) = (x+1)e^x - a$ ，若函数 $f(x)$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围是（ ）

A. $\left(-\frac{1}{e^2}, 0\right)$ B. $\left[0, \frac{1}{e^2}\right]$ C. $\left(-\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$ D. $\left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$

8. 已知红箱内有 5 个红球和 3 个白球，白箱内有 3 个红球和 5 个白球，所有小球形状大小完全相同.第一次从红箱内取出一球后再放回去，第二次从与第一次取出的球颜色相同的箱子

内取出一球，然后再放回去，依次类推，第 $k+1$ 次从与第 k 次取出的球颜色相同的箱子

内取出一球，然后再放回去.记第 n 次取出的球是白球的概率为 P_n ，则（ ）

$$A. P_{n+1} = \frac{1}{4}P_n + \frac{3}{8}$$

$$B. P_{n+1} = \frac{9}{16} - \frac{1}{4}P_n$$

$$C. P_{n+1} = \frac{1}{4}P_n + \frac{5}{8}$$

$$D. P_{n+1} = \frac{1}{4}P_n + \frac{1}{2}$$

二、多选题

9. 甲箱中有 3 个红球和 2 个白球，乙箱中有 2 个红球和 2 个白球（两箱中的球除颜色外没有其他区别），先从甲箱中随机取出一球放入乙箱，分别用事件 A_1 和 A_2 表示从甲箱中取出的球是红球和白球；再从乙箱中随机取出两球，用事件 B 表示从乙箱中取出的两球都是红球，则（ ）

$$A. P(A_1) = \frac{3}{5}$$

$$B. P(B) = \frac{11}{50}$$

$$C. P(B|A_1) = \frac{9}{50}$$

$$D. P(A_2|B) = \frac{2}{11}$$

10. （多选题）下列说法正确的是（ ）

A. 已知随机变量 $X \sim B(n, p)$ ，若 $E(X) = 30, D(X) = 10$ ，则 $p = \frac{1}{3}$

B. 两位男生和两位女生随机排成一列，则两位女生不相邻的概率是 $\frac{1}{2}$

C. 已知 $A_n^2 = C_n^3$ ，则 $n = 8$

D. 从一批含有 10 件正品、4 件次品的产品中任取 3 件，则取得 2 件次品的概率为 $\frac{45}{91}$

11. 若函数 $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) + \frac{2}{x}$ ，则（ ）

- A. $f(x)$ 的图象关于 $(0,0)$ 对称
- B. $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递增
- C. $f(x)$ 的极小值点为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- D. $f(x)$ 有两个零点

三、填空题

12. $2^{33} - 1$ 除以 9 的余数为____.
13. 有 11 名演员, 其中 9 人会唱歌, 5 人会跳舞, 现要表演一个 2 人唱歌 2 人伴舞的节目, 则不同的选派方法共有____种 (写出具体数字结果).
14. 若 $e^x - ax \geq -x + \ln(ax)$, 则实数 a 的取值范围为____

四、解答题

15. 已知 $(2x-1)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$.

(1) 求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$ 的值;

(2) 求 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ 的值. (参考数据: $3^{10} = 59049$)

16. 已知函数 $f(x) = x^2 e^x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 若对 $\forall x \in [-1, 2]$, $f(x) - m > 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

17. 某学校工会组织趣味投篮比赛, 每名选手只能在下列两种比赛方式中选择一种.

方式一: 选手投篮 3 次, 每次投中可得 1 分, 未投中不得分, 累计得分;

方式二: 选手最多投 3 次. 如第 1 次投中可进行第 2 次投篮, 如第 2 次投中可进行第 3 次投篮. 如某次未投中, 则投篮中止. 每投中 1 次可得 2 分, 未投中不得分, 累计得分;

若甲乙两位老师参加比赛, 已知甲选择方式一参加比赛, 乙选择方式二参加比赛.

假设甲，乙每次投中的概率均为 $\frac{1}{2}$ ，且每次投篮相互独立.

- (1)求甲得分不低于 2 分的概率；
- (2)求乙得分的分布列及期望；
- (3)求甲胜出的概率.

18. 吉林省从 2021 年开始，高考取消文理分科，实行“ $3+1+2$ ”的模式，其中的“1”表示每位学生必须从物理、历史中选择且只能选择一个科目. 某校高一年级有 2000 名学生（其中女生 900 人），该校为了解高一年级学生对物理、历史的选科情况，采用比例分配的分层抽样的方法抽取了 200 名学生进行问卷调查，其中选择历史的男生有 40 人，选择物理的女生有 30 人.

- (1)利用以上信息完成下面的 2×2 列联表，根据小概率值 $\alpha = 0.005$ 的独立性检验，能否认为学生性别与选择科目有关？

性别	选择物理	选择历史	总计
男生			
女生			
总计			

- (2)某个外语学习小组共有 7 人，其中有 3 人选择了历史，4 人选择了物理，随机抽取 4 人

进行对话练习，用 X 表示抽中的 4 人中，选择历史的同学人数，求 X 的分布列及期望.

附： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$

α	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

- 19. 已知 $f(x) = x + k\ln(1+x)$ 在 $(t, f(t))(t > 0)$ 处切线为 l .

(1)若切线 l 的斜率 $k = -1$ ，求 $f(x)$ 单调区间；

(2)证明：切线 l 不经过 $(0,0)$ ；

(3)已知 $k = 1$ ， $A(t, f(t))$ ， $C(0, f(t))$ ， $O(0,0)$ ，其中 $t > 0$ ，切线 l 与 y 轴交于点 B 时．当

$2S_{\triangle ACO} = 15S_{\triangle ABO}$ ，符合条件的 A 的个数为？

(参考数据： $1.09 < \ln 3 < 1.10$ ， $1.60 < \ln 5 < 1.61$ ， $1.94 < \ln 7 < 1.95$)

参考答案:

1. D

【分析】先令 $x=1$ ，根据各项系数之和解得 $n=10$ ，再求对应项系数计算比值即可.

【详解】 $\left(x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的各项系数和：令 $x=1$ ，则 $(-2)^n = 1024$ ，

所以 $n=10$ ，所以 $\left(x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ 的通项 $T_{r+1} = C_{10}^r (x^2)^{10-r} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^r = C_{10}^r (-3)^r \cdot x^{20-\frac{5}{2}r}$ ，第四项的

系数：令 $r=3$ ，得 $C_{10}^3 \cdot (-3)^3$ ，

第五项的系数：令 $r=4$ ，得 $C_{10}^4 \cdot (-3)^4$ ，

$$\text{所以 } \frac{C_{10}^3 \cdot (-3)^3}{C_{10}^4 \cdot (-3)^4} = -\frac{4}{21}.$$

故选：D.

2. C

【分析】根据题意，求得 $f'(x) = a(a+b)x^{a+b-1}$ ，列出方程组，即可求解.

【详解】由函数 $f(x) = ax^{a+b}$ ，可得 $f'(x) = a(a+b)x^{a+b-1}$ ，

因为 $f'(x) = 12x^3$ ，可得 $f'(x) = a(a+b)x^{a+b-1}$ ，

$$\text{所以 } \begin{cases} a(a+b) = 12 \\ a+b-1 = 3 \end{cases}, \text{ 解得 } a=3, b=1.$$

故选：C.

3. B

【分析】由已知函数 $f(x)$ 的图象，先判断它的单调性，然后根据函数图象斜率的变化，从而求解.

【详解】观察函数 $f(x)$ 的图象知：当 $x \geq 0$ 时， $f(x)$ 单调递增，且当 $x=0$ 时， $f(0) > 0$ ，

随着 x 逐渐增大，函数图象由陡逐渐变缓， $f'(2) > 0$ ， $f'(3) > 0$ ， $f(3) - f(2) > 0$ ，

而 $x=3$ （即点 B ）处切线的倾斜角比 $x=2$ （即点 A ）处的倾斜角小，且均为锐角，

$f'(2) > f'(3)$ ，又 $\frac{f(3)-f(2)}{3-2} = f(3) - f(2)$ 是割线 AB 的斜率，显然

$$f'(3) < f(3) - f(2) < f'(2),$$

所以 $0 < f'(3) < f(3) - f(2) < f'(2)$ 。

故选：B

4. A

【分析】根据题意，分2步进行分析：①将6本不同的书籍分为3组，每组至少1本，②将《西游记》所在的组分发给了甲，剩下2组任意分配，由分步计数原理计算可得答案。

【详解】根据题意，分2步进行分析：

①将6本不同的书籍分为3组，每组至少1本，

若分为4、1、1的三组，有 $C_6^4 = 15$ 种分组方法，

若分为3、2、1的三组，有 $C_6^3 C_3^2 = 60$ 种分组方法，

若分为2、2、2的三组，有 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3} = 15$ 种分组方法，

共有 $15 + 60 + 15 = 90$ 种分组方法，

②将《西游记》所在的组分发给了甲，剩下2组任意分配，有2种情况，

则有 $90 \times 2 = 180$ 种分发方式。

故选：A.

5. D

【分析】对于A：根据线性回归方程必过样本中心点运算求解；对于B：根据百分位的定

义运算求解；对于 C：根据相关系数的定义分析判断；对于 D：根据回归方程的进行预测.

【详解】对于选项 A：年份代码 x 的平均数 $\bar{x} = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$,

年借阅量 y 的平均数 $\bar{y} = \frac{1}{5}(4.9+5.1+5.5+5.7+5.8) = 5.4$ (万册),

则 $5.4 = 0.24 \times 3 + \hat{b}$, 解得 $\hat{b} = 4.68$, 故 A 正确;

对于选项 B：因为 $5 \times 0.75 = 3.75$, 所以借阅量的第 75 百分位数为 5.7, 故 B 正确;

对于选项 C：因为 $0.24 > 0$, 所以 y 与 x 的线性相关系数 $r > 0$, 故 C 正确;

对于选项 D：由选项 A 可得: $\hat{y} = 0.24x + 4.68$,

令 $x = 6$, 可得 $\hat{y} = 0.24 \times 6 + 4.68 = 6.12$,

预计 2021 年的借阅量为 6.12 万册, 但并不能确定具体结果, 故 D 错误;

故选: D.

6. A

【分析】根据题意知 $f'(x) = 2$ 有两个不相等的正实数根, 结合一元二次方程根的分布即可求得参数的范围.

【详解】由题意知 $f'(x) = 2x + 2a + \frac{1}{x}$, 因为切线与直线 $x + 2y = 0$ 垂直,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 A, B 处的切线斜率都是 2,

即关于 x 的方程 $f'(x) = 2x + 2a + \frac{1}{x} = 2$ 有两个不相等的正实数根,

化简得, $x^2 - (1-a)x + \frac{1}{2} = 0$ 有两个不相等的正实数根,

$$\text{则} \begin{cases} 1-a > 0 \\ \Delta = (-a)^2 - 4 \times \frac{1}{2} > 0 \end{cases}, \text{解得} a < 1 - \sqrt{2}.$$

故选：A.

7. A

【分析】函数 $f(x)$ 有两个零点，即函数 $g(x) = (x+1)e^x$ 的图象与 $y=a$ 的图象有两个交点，

由导数判断函数 $g(x)$ 的单调性、极值，由函数图象的交点个数得 a 的范围.

【详解】函数 $f(x)$ 有两个零点，即函数 $g(x) = (x+1)e^x$ 的图象与 $y=a$ 的图象有两个交点，

函数 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ，

$$g'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x,$$

令 $g'(x) = 0$ ，解得 $x = -2$ ，

$g'(x), g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
g'	$-$	0	$+$
g	单调递减	$-\frac{1}{e^2}$	单调递增

所以，函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, -2)$ 上单调递减，在区间 $(-2, +\infty)$ 上单调递增，

故当 $x = -2$ 时，有极小值 $g(-2) = -\frac{1}{e^2}$ ，

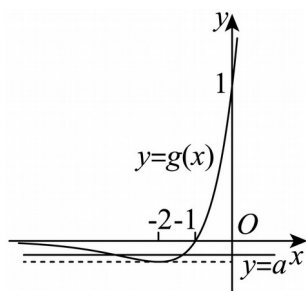
令 $g'(x) = 0$ ，解得 $x = -1$ ，

当 $x < -1$ 时， $g'(x) < 0$ ；当 $x > -1$ 时， $g'(x) > 0$ ，

当 x 无限趋向于负无穷大时， $g(x)=(x+1)e^x=\frac{x+1}{e^{-x}}$ 无限趋向于0；当 x 无限趋向于正无

穷大时时， $g(x)$ 无限趋向于正无穷大，

由此作出函数 $g(x)$ 的大致图象：



由图象得：当 $a < -\frac{1}{e^2}$ 时，交点为0个；

当 $a = -\frac{1}{e^2}$ 或 $a \geq 0$ 时，交点为1个；

当 $-\frac{1}{e^2} < a < 0$ 时，交点为2个.

若函数 $g(x)=(x+1)e^x$ 的图象与 $y=a$ 的图象有两个交点，

则由图可知，实数 a 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{e^2}, 0\right)$.

故选：A.

8. A

【分析】由题意可知第 $n+1$ 次取出白球，包括“第 n 取出是红球”和“第 n 次取出是白球”两种情况，然后根据独立事件和互斥事件的概率公式求解即可.

【详解】由题意可知在红箱内取到红球的概率为 $\frac{5}{8}$ ，取到白球的概率为 $\frac{3}{8}$ ，在白箱内取到

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/535201212324011311>