

2025 年大学生数学建模全国一等奖论文

学员： 吴成映王聿磊曹霞斌 指导老师： 朱家明

露天矿生产车辆安排方案的优化模型

摘 要

本文建立了露天矿生产车辆安排方案的优化模型,为提高设备的利用率以增加露天矿经济效益,在卡车不等待条件下且满足产量和品位要求的基础上,依据所给的两条原则分别建模制定了一个班次的生产计划:铲车的定辆定位和卡车定辆定线定次,并相应给出各生产计划的快速算法、总运量及岩矿石的产量,最终在讨论分析后,对模型做出了评价和改进。

模型 I 对问题 1 建立了求路段车次上限、卸点车次下限、铲位矿与岩最大整车数等模型,并依据原则一 分步建立了若干个线性规划模型,运用 Mathematica 软件求解,综合给出了生产计划:出动 6 辆铲车;出动 13 辆卡车;相应的总运量 88496.1 吨公里,岩石产量 32186 吨,矿石产量 38192 吨。

模型 II 对问题 1 建立整数规划模型,采用 lingo 编程法,给出了一个班次的生产计划:出动 7 辆铲车,铲位 1、2、3、4、8、9、10 各安排一辆;出动 13 辆卡车,具体方案为:铲位 1→岩石漏 81 车次,2 辆;铲位 3→岩石漏 43 车次,1 辆;铲位 9→岩场 70 车次,2 辆;铲位 4→倒装场 I 45 车次,2 辆;铲位 8→矿石漏 54 车次,2 辆;铲位 2 →倒装场 I 40 车次,→矿石漏 13 车次,→倒装场 II 15 车次,3 辆;铲位 10 →岩场 15 车次,→矿石漏 11 车次,→倒装场 II 70 车次,2 辆。相应的总运量 85714.86 吨公里,岩石产量 32186 吨,矿石产量 38192 吨。结果总运量优于模型 I,产量相同。

模型 III 对问题 2 建立最优化模型,利用 lingo 编程法,给出生产计划:出动全部 7 辆,铲位 1、2、3、7、8、9、10 各安排一辆;出动 20 辆卡车,具体方案为:铲位 1→倒装场 I 15 车,岩石漏 81 车;铲位 2→倒装场 I 66 车,→岩石漏 28 车,→倒装场 II 2 车;铲位 3→矿石漏 20 车,→岩石漏 51 车,→倒装场 II 25 车;铲位 7→倒装场 I 68 车,→岩场 28 车;铲位 8→矿石漏 60 车,→倒装场 I 2 车,→岩场 12 车,→倒装场 II 22 车;铲位 9→倒装场 I 9 车,→岩场 87 车;铲位 10→岩场 33 车,→倒装场 II 63 车。相应的总运量 149033.5 吨公里,岩石产量 49280 吨,矿石产量 54208 吨。

模型 IV 建立快速算法模型,在尽量不影响模型结果的前提下,分析了原则一和原则二的简化方向,对其进行了简化,分别得到了满足原则一和原则二的快速算法。

本文还从卡车数量、铲车数量、品位限制的变化分别对模型的灵敏性进行了准确的分析。最后,我们考虑到卸点可以移动的情况,对模型进行了进一步讨论,并给出了改进的目标函数。

关键词： 露天矿 线性规划 整数规划 lingo 灵敏度分析

§ 1 问题的提出

钢铁工业是国家工业的基础之一，铁矿是钢铁工业的主要原料基地。许多现代化铁矿是露天开采的，它的生产主要是由电动铲车（以下简称电铲）装车、电动轮自卸卡车（以下简称卡车）运输来完成。提高这些大型设备的利用率是增加露天矿经济效益的首要任务。

一、已知某露天矿的基本情况与要求如下：

1、**铲位**：有 10 个爆破生成的石料堆，每堆称为一个铲位，每个铲位已预先根据铁含量将石料分成矿石和岩石。一般来说，平均铁含量不低于 25%的为矿石，否则为岩石。每个铲位的矿石、岩石数量，以及矿石的平均铁含量（即品位）都是已知的（见附表 1）。

2、**铲车**：现有铲车 7 台，每个铲位至多能安置一台电铲，电铲的平均装车时间为 5 分钟。

3、**卸点**：卸货地点的简称，有卸矿石的 1 个矿石漏、2 个倒装场和卸岩石的 1 个岩石漏、1 个岩场，每个卸点都有各自的产量要求：矿石漏 1.2 万吨、倒装场 I 1.3 万吨、倒装场 II 1.3 万吨、岩石漏 1.9 万吨、岩场 1.3 万吨。从保护国家资源的角度及矿山的经济效益考虑，应该尽量把矿石按矿石卸点需要的铁含量（假设要求都为 29.5% 1%，称为品位限制）搭配起来送到卸点，搭配的量在一个班次（8 小时）内满足品位限制即可。从长远看，卸点可以移动，但一个班次内不变。铲位和卸点位置的示意

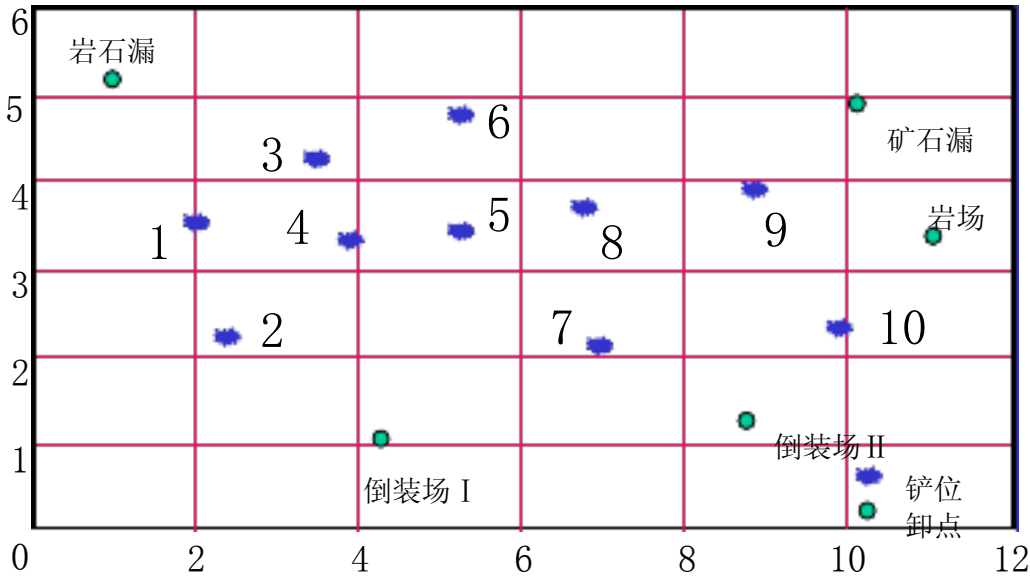


图 1 铲位和卸点位置的二维示意图

图(如图 1)。

4、**卡车**：现有卡车 20 辆，卡车的平均卸车时间为 3 分钟。所用卡车载重量为 154 吨，平均时速 28 km/h。卡车的耗油量很大，每个班次每台车消耗近1 吨柴油。发动机点火时需要消耗相当多的电瓶能量，故一个班次中只在开始工作时点火一次。卡车在等待时所耗费的能量也是相当可观的，原则上在安排时不应发生卡车等待的情况。电铲和卸点都不能同时为两辆及两辆以上卡车服务。卡车每次都是满载运输。

5、**车道**：每个铲位到每个卸点的道路都是专用的宽 60m 的双向车道，不会出现堵车现象，每段道路的里程都是已知的（见附表 2）。

二、一个班次的生产计划的内容、要求和原则如下：

1、**内容**：①出动几台电铲，分别在哪些铲位上；②出动几辆卡车，分别在哪些路线上各运输多少次（因为随机因素影响，装卸时间与运输时间都不精确，所以排时计划无效，只求出各条路线上的卡车数及安排即可）。

2、**要求**：一个合格的计划要在卡车不等待条件下满足产量和质量（品位）要求。

3、**原则**：一个好的计划应该考虑下面两条原则之一。

①总运量（吨公里）最小，同时出动最少的卡车，从而运输成本最小；

②利用现有车辆运输，获得最大的产量（岩石产量优先；在产量相同的情况下，取总运量最小的解）。

三、解决问题：

1、问题一：满足要求，依据原则一建立数学模型，并给出一个班次生产计划的快速算法、具体的生产计划、相应的总运量及岩石和矿石产量；

2、问题二：满足要求，依据原则二建立数学模型，并给出一个班次生产计划的快速算法、具体的生产计划、相应的总运量及岩石和矿石产量。

§ 2 问题的分析^[1]

露天矿生产车辆安排问题是一类带复杂约束条件的优化与规划类问题。对本问题处理的难点是要同时考虑满足卡车不等待、各卸点矿或岩的产量要求、品位限制等诸多因素，再针对各问题的目标原则来分别建立模型。由于卡车为满载运输，故露天矿生产车辆安排问题应属于整数规划问题。

按照上述思路要提出目标函数，要建立各个约束条件，要找到众多变量之间的数量关系。因而，对约束条件和问题作出分析都是解决问题的关键。

一、条件分析：

1、卡车不等待。由于发动机点火时需要消耗电瓶能量和卡车在等待时耗费的能量都相当大，故在一个班次中卡车只在开始工作时点火一次，原则上在安排时不应发生卡车等待的情况。卡车的装货需 5 分钟、卸货需 3 分钟，要满足卡车不等待的情况，就要先求出各个铲位到各个卸点单程运输时间和运行周期，由此可求得每段路程单程运行的车次数上限。满足卡车不等待车次数上限为单程运行车次数上限的两倍，事实上，由装车时间 5 分钟与卸车时间 3 分钟，且所有单程运输时间的最小值 1.221431 分钟，显然其 2 倍加 3 大于 5，即铲车可循环接待 2 辆以上卡车装货。同时，卸车比装车少 2 分钟，加上单程运输时间多于 1 分钟，故卸点可循环接待 3 辆以上卡车卸货。

2、产量要求。产量要求是对一个方案的基本要求。满足各个卸点的矿石和岩石的产量要求，就需要我们先求出各个卸点所需的车次数下限，所有卸点的到达车次都必须大于这个量才能满足产量要求。

3、品位要求。就保护国家资源及矿山的经济效益而言（即有效利用矿石以延长矿山的开采时限），要求把矿石按矿石卸点需要的铁含量的品位限制（29.5% 1%）搭配起来送到卸点，由于只有铲位 1、2、3 的铁含量低于 30.5%，故每个矿石卸点在生产计划中后七个铲位运矿要与前三个铲位搭配才能符合品位要求。这也是我们要先解决的问题。

4、装卸点时限。由于各卸点和电铲都不能同时为两辆及两辆以上卡车服务，电铲的平均装车时间为 5 分钟，卡车的平均卸车时间为 3 分钟，而一个班次总的工作时间为 480 分钟，故单个铲位的车次上限为 $480 \div 5 = 96$ ，单个卸点的车次上限为 $480 \div 3 = 160$ 。对现有各铲位的矿石、岩石数量对卡车运输车次的限制，就要求出各铲位运矿和运岩的最大整车数。

二、问题分析：

1、对问题 1。就第一条原则，总运量（吨公里）最小包括两层含义，一是产量低，只要满足各个卸点对产量的要求即可；二是总运程少。在总运量变化不大的情况下，我们对卡车的运输进行调配，实现在总运量最小的基础上，出动最少的卡车。

2、对问题 2。就第二条原则，获得最大产量，是运筹学中的目标规划问题，即在现

有 20 辆卡车和 7 台铲车全部利用，如何获得最大的产量。我们可以在矿石的卸点品位限制和卡车不等待条件下，依次考虑以下生产计划目标：

- ①考虑岩石和矿石的运输总量满足产量要求。
- ②剩下的车先考虑岩石的产量，当满足岩石的充分运输后，再考虑矿石产量，得到一个最大产量。
- ③以这个最大产量为约束条件，使总运量最小。

§ 3 模型的假设

- 1、为了方便起见，规定卸点按矿石漏、倒装场 I、倒装场 II、岩石漏、岩场秩序编排序号 1、2、3、4、5；铲位则按所给铲位号排序；
- 2、所给的各个卸点产量为产量下限，卸点存贮上限不受限制；
- 3、在一个班次中，不考虑卡车铲车因故障、天气等原因停工；
- 4、卡车、铲车在一个班次中工作时间不多于 8 个小时；
- 5、铲车在一个班次中原则上固定在一个铲位工作，可交互对岩石和矿石的装车。

§ 4 定义与符号说明

- 1、 K_i ——第 i 铲位的矿石量；
- 2、 k_i ——第 i 铲位的矿石量的整车次数；
- 3、 Y_i ——第 i 铲位的岩石量；
- 4、 y_i ——第 i 铲位的岩石量的整车次数；
- 5、 h_i ——第 i 铲位的矿石中的平均铁含量；
- 6、 x_{ij} ——第 i 个铲位到第 j 个卸点运输次数；
- 7、 $\overline{x_{ij}}$ ——第 i 铲位到第 j 卸点的整车数；
- 8、 d_{ij} ——第 i 铲位到第 j 卸点的距离；
- 9、 t_{ij} ——第 i 铲位到第 j 卸点的单程时间；
- 10、 T_{ij} ——第 i 铲位到第 j 卸点的单程周期；
- 11、 D_{ij} ——第 i 铲位到第 j 卸点的单程车次上限；
- 12、 Q_j ——第 j 卸点矿或岩的产量；
- 13、 m_j ——第 j 卸点所需整车次数的下限；
- 14、 f_j ——第 j 卸点所需的吨公里数；
- 15、 $d_{\frac{1}{2}j}$ ——平均单位距离；
- 16、 $b_{\frac{1}{2}}$ ——中和比率；
- 17、 n_i ——第 i 铲位车辆数。

§ 5 模型的建立与求解

从所要解决的问题和对问题所做的假设出发，我们就原则一建立了模型 I 和模型 II，就原则二建立了模型 III。

模型 I 分步线性规划模型^[2]

本模型从矿石的品位限制考虑，首先对三个卸矿点分别建立了线性规划模型，给出了各卸矿点满足限制的最小运量（吨公里）条件下的矿石来源，然后对两个卸岩点也分别建立了线性规划模型，得出了卸岩点岩石的各来处及车次数。由相关量与模型结果，可以解决问题一。

模型 II 整数规划模型^[2]

本模型综合考虑了影响车辆安排的各种因素，建立了整数规划模型，并运用了 Lingo 编程法一次得出了所有卸点的车次数与来处，由相关量与模型结果，可以解决问题一。比较结果可发现：整数规划模型结果产量相同，但总运量优于模型 I 的结果。

模型 III 最优化模型

本模型综合考虑了影响车辆安排的各种因素及现有铲卡车的数量，首先确定了最大生产量，在此条件限制下，建立最优化了模型，并运用了 Lingo 编程法得出了所有卸点的车次数与来处，由相关量与模型结果，可以解决问题二。

§ 5.1 问题一的分析与求解

一、对约束条件和原则一的分析

对问题 1，在卡车不等待条件下满足产量和质量（品位）要求基础上，我们要建立满足总运量（吨公里）最小，同时出动最少的卡车。依据前面对问题所做的分析，为了设计便于操作的生产计划，我们可根据各铲位与卸点的距离 d_{ij} 、各铲位矿石和岩石的数量 K_{ij} 和 Y_{ij} 、以及各卸点一个班次对产量的要求吨数 Q_j ，建立以下各模型来求其相关量，针对第一原则的生产计划，首先可建立以下各模型来求相关量：

1、每段路程的单程运输时间与运行周期：建立模型如下：

$$t_{ij} = \frac{d_{ij}}{28} \times 60 \text{ (分钟)}, \quad i = 1, 2, \dots, 10; \quad j = 1, 2, \dots, 5.$$
$$T_{ij} = 2 \times t_{ij} + 5 + 3 \text{ (分钟)}, \quad i = 1, 2, \dots, 10; \quad j = 1, 2, \dots, 5.$$

运用以上两式和表 2 可求得单程运输时间与运行周期（见表 5），可比较出单程运输时间确定总运量最小值。其中为铲位到

2、路段的车次上限：由单程运行周期和一个班次的总工作时间，建立如下模型：

$$D_{ij} = \frac{480}{T_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, 10; \quad j = 1, 2, \dots, 5$$

由此可求得每段路程上的单车运行的车次数的上限简称单车上限，见表 5)。

当每段路上同时运行两辆卡车时，车次数上限为 $2D_{ij}$ ， $i = 1, 2, \dots, 10; j = 1, 2, \dots, 5$ ，事实上，由电铲装车时间 5 分钟与卡车卸车时间 3 分钟，且所有的单程运输时间最小值为 $t_{3,10} = 1.22143$ 分钟，显然其 2 倍加 3 大于 5，即满足卡车不等待。

当每段路上同时运行三辆或三辆以上卡车时，装点与卸点的车次上限的求解则比较

复杂，一般在调度安排时要少用，

3、卸点车次下限：由各卸点矿或岩的产量 Q_j ， $j=1,2,3,5$ ，结合卡车载重量 154 吨，可建立如下模型以求得卸点所需车次的下限：

$$m_j = \left\lceil \frac{Q_j}{0.0154} \right\rceil, j=1,2,3,5;$$

所需车次的下限依次如下：

矿石漏：78；倒装场 I：85；岩场 85；岩石漏：124；倒装场 II：85。

显然，结果都小于单个卸点的车次上限 60。对上述所需车次求和可得一个班次所需的理论上的总车次下限数： $M = \sum_{j=1}^5 m_j = 457$ （车次）。

4、各铲位矿与岩的最大整车数：由各铲位矿与岩的吨数 K_i 与 Y_i ， $i=1,2,3,10$ ，结合卡车载重量 154 吨，可建立如下模型以求得各铲位矿与岩的最大整车数

$$k_i = \left\lceil \frac{K_i}{0.0154} \right\rceil, i=1,2,3,10; y_i = \left\lceil \frac{Y_i}{0.0154} \right\rceil, i=1,2,3,10;$$

结果如下：

铲位 1：矿 61, 岩 81； 铲位 2：矿 68, 岩 79； 铲位 3：矿 64, 岩 87；
铲位 4：矿 68, 岩 68； 铲位 5：矿 71, 岩 74； 铲位 6：矿 81, 岩 87；
铲位 7：矿 68, 岩 68； 铲位 8：矿 84, 岩 74； 铲位 9：矿 87, 岩 87；
铲位 10：矿 81, 岩 87。

二、模型 I：分步线性规划模型^[2]

1、各卸矿点的车辆安排

在卡车不等待条件下满足产量和质量（品位）要求时，由于从保护国家资源的角度及矿山的经济效益考虑，应该尽量把矿石按矿石卸点需要的铁含量（假设要求都为 29.5% ± 1%，称为品位限制）搭配起来送到卸点，搭配的量在一个班次（8 小时）内满足品位限制即可。故优先考虑各卸矿点的车辆安排。

1) 到矿石漏的方案：从铲位到矿石漏距离的远近和矿石铁含量双方面考虑，可采用铲位 3 与铲位 9 或铲位 3 与铲位 8 两种搭配方案，以满足吨公里最小，运用如下模型：

①模型

目标函数： $\min f = 154 \cdot \min(d_{31} \bar{x}_{31}, d_{81} \bar{x}_{81}, d_{31} \bar{x}_{31}, d_{91} \bar{x}_{91})$

约束条件： $\frac{h_{31} x_{31} + h_{i1} x_{i1}}{x_{31} + x_{i1}} = 0.305, m_1$

$x_{31} \leq k_{31}, x_{i1} \leq k_{i1} \quad (i=8,9)$

$x_{31}, x_{i1} \geq 0$

$\bar{x}_{31} = \left\lceil \frac{x_{31}}{154} \right\rceil, \bar{x}_{i1} = \left\lceil \frac{x_{i1}}{154} \right\rceil$

②算法流程图 (如图 2)

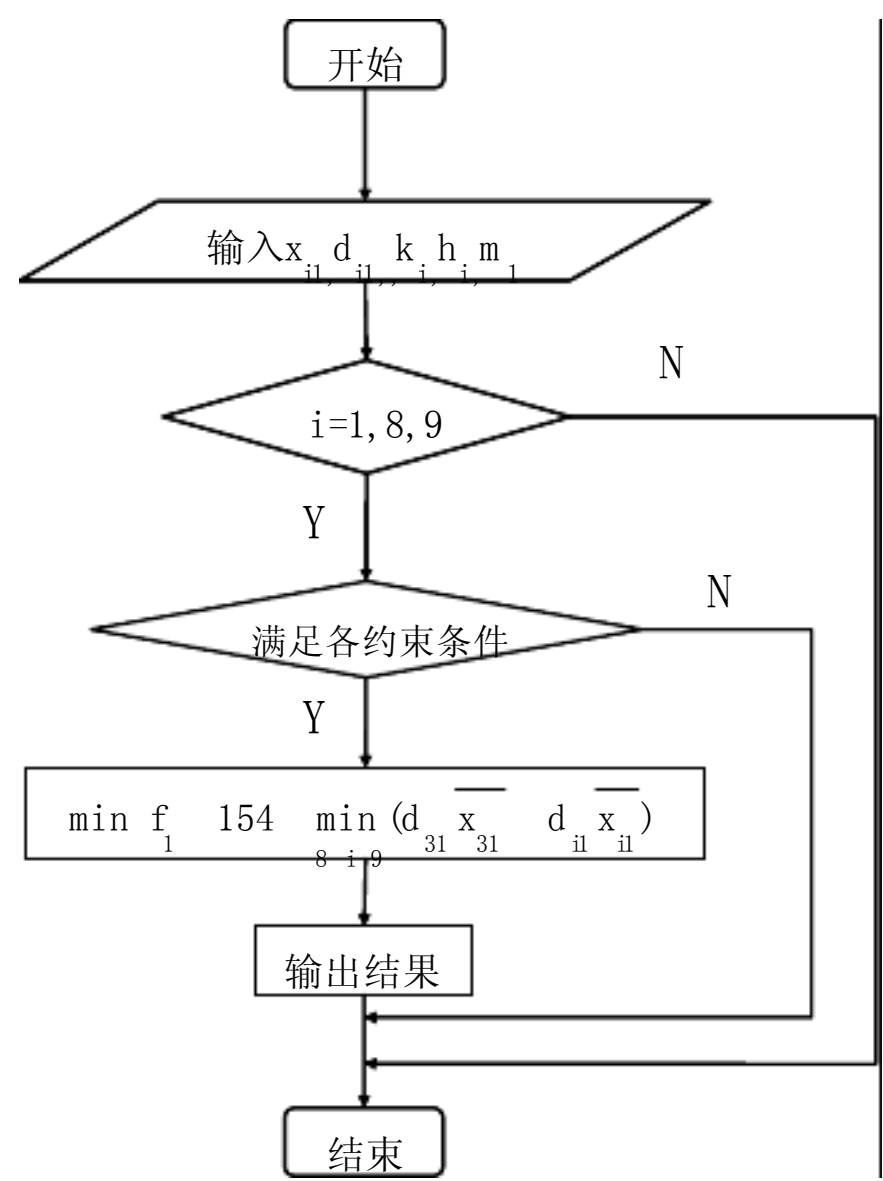


图 2 算法流程图

③求解：由 Mathematica 易求得到矿石漏最小吨公里数为

$$\min C_1 \quad 154 \quad d_{31} \overline{x_{31}} \quad d_{81} \overline{x_{81}} \quad 29937.6$$

此时，搭配方案为铲位 3 到矿石漏车次数为 $\overline{x_{31}}$ 20，铲位 8 到矿石漏车次数为 $\overline{x_{81}}$ 58。

2) 到倒装场 I 的方案：从铲位到倒装场 I 距离的远近和矿石铁含量双方面考虑，可采用铲位 2 与铲位 4 或铲位 2 与铲位 5 两种搭配方案，以满足吨公里最小，运用如下模型：

目标函数： $\min f_2 \quad 154 \quad \min (d_{22} \overline{x_{22}} \quad d_{42} \overline{x_{42}}, d_{22} \overline{x_{22}} \quad d_{52} \overline{x_{52}})$

$$h_2 x_{22} \quad h_{i2} x_{i2} \quad 0.285 \quad m_2$$

$$x_{22} \quad x_{i2} \quad m_2$$

约束条件： $x_{22} \geq 68, x_{i2} \leq K_{i2} \quad (i=4,5)$

$$x_{22}, x_{i2} \geq 0$$

$$x_{22} \leq \min(68, [x_{22}]) \quad x_{i2} \leq \max(m_2, x_{i2}, [x_{i2}] - 1)$$

易求得到倒装场 I 最小吨公里数为 $\min f_2 \quad 154 \quad d_{22} \overline{x_{22}} \quad d_{42} \overline{x_{42}} \quad 13325.6$ ；此时，搭配方案为铲位 2 到倒装场 I 的车次数为 $x_{22} \quad 68$ ，铲位 4 到倒装场 I 车次数为 $x_{42} \quad 17$ 。

3) 到倒装场 II 的方案：从铲位到倒装场 II 距离的远近和矿石铁含量双方面考虑，要满足吨公里最小，只需铲位 10 与铲位 3 搭配方案搭配即可，运用如下模型：

目标函数： $\min f_5 \quad 154 \quad (d_{10,5} x_{10,5} \quad d_{35} x_{35})$

约束条件：
$$\begin{aligned} &h_{3,35}x_{35} + h_{10,10,5}x_{10,5} = 0.305m_5 \\ &x_{35} \leq 87, x_{10,5} \leq 87 \\ &x_{35}, x_{10,5} \geq 0 \\ &\overline{x_{35}} \in [x_{35}], 1, \overline{x_{10,5}} \in [x_{10,5}] \end{aligned}$$

易求得到倒装场 II 最小吨公里数为 $\min f_5 = 17454.4$ 此时，铲位 10 到倒装场 II 的车次数为 $\overline{x_{10,5}} = 63$ ，铲位 3 到倒装场 II 车次数为 $\overline{x_{35}} = 22$ 。

2、各卸岩点的车辆安排

由于到卸岩点无品位限制，要在卡车不等待条件下满足产量的要求，只要考虑铲位到卸岩距离的远近和铲位一个班次所允许的最多车次数即可，此时易建立模型来求满足吨公里最小的方案。

1) 到岩石漏的方案：运用如下模型：

目标函数：
$$\min f_4 = 154 (d_{14,14}\overline{x_{14}} + d_{34,34}\overline{x_{34}})$$

约束条件：
$$\begin{aligned} &x_{14} + x_{34} = m_4 \\ &x_{14} \leq 81, x_{34} \leq 87 \\ &x_{14}, x_{34} \geq 0 \\ &\overline{x_{14}} \in [x_{14}], \overline{x_{34}} \in [x_{34}], \overline{m_4} \in [m_4], \overline{x_{14}} \in [x_{14}] \end{aligned}$$

易求得到岩石漏最小吨公里数为 $\min f_4 = 16393.3$ 此时，铲位 1 到岩石漏的车次数为 $\overline{x_{14}} = 81$ ，铲位 3 到岩石漏的车次数为 $x_{34} = m_4 - 81 = 43$ 。

2) 到岩场的方案：首先，铲位 10 到岩场的距离最近，但是由于受装车时间限制，故最多只能从铲位 10 运送 $\overline{x_{10,3}} = 96 - \overline{x_{10,5}} = 33$ 车，而剩余的为 $\overline{x_{93}} = 85 - 33 = 52$ 车则由距离岩场次近的铲位 9 运送来。这样所得的方案即为最小吨公里数的方案，由模型：

$$\min f_3 = 154 (d_{10,3}\overline{x_{10,3}} + d_{93,93}\overline{x_{93}})$$

易求得到岩场的最小吨公里数为 $M \inf_3 = 11385.2$;

3、一个班次的生产计划的安排：

把以上结果整理可得以下实际车次安排方案：

车次 卸点 \ 铲位	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
矿石漏	×	×	20	×	×	×	×	58	×	×
倒装场 I	×	68	×	17	×	×	×	×	×	×
岩 场	×	×	×	×	×	×	×	×	52	33
岩石漏	81	×	43	×	×	×	×	×	×	×
倒装场 II	×	×	22	×	×	×	×	×	×	63

由上表和相关量可给出一个班次的生产计划：

1) 铲车的安排：出动 6 辆铲车，铲位 1、3、8、9、10 各安排一辆铲车，由于铲位 2 与铲位 4 较近，又两者发车总次数为 85，小于装车下限 96，故可安排一辆铲车，当完

成一处任务后再转移到另一处。

- 2) 卡车的安排：出动 12 辆卡车：
- 铲位 1→岩石漏 81 车次，2 辆；
 - 铲位 3→岩石漏 43 车次，1 辆；
 - 铲位 2→倒装场 I 68 车次，铲位 4→倒装场 I 17 车次，2 辆；
 - 铲位 3→矿石漏 20 车次，→倒装场 II 22 车次，1 辆；
 - 铲位 8→矿石漏 58 车次，2 辆；
 - 铲位 9→岩场 52 车次，2 辆；
 - 铲位 10→岩场 33 车次，→倒装场 II 63 车次，2 辆。

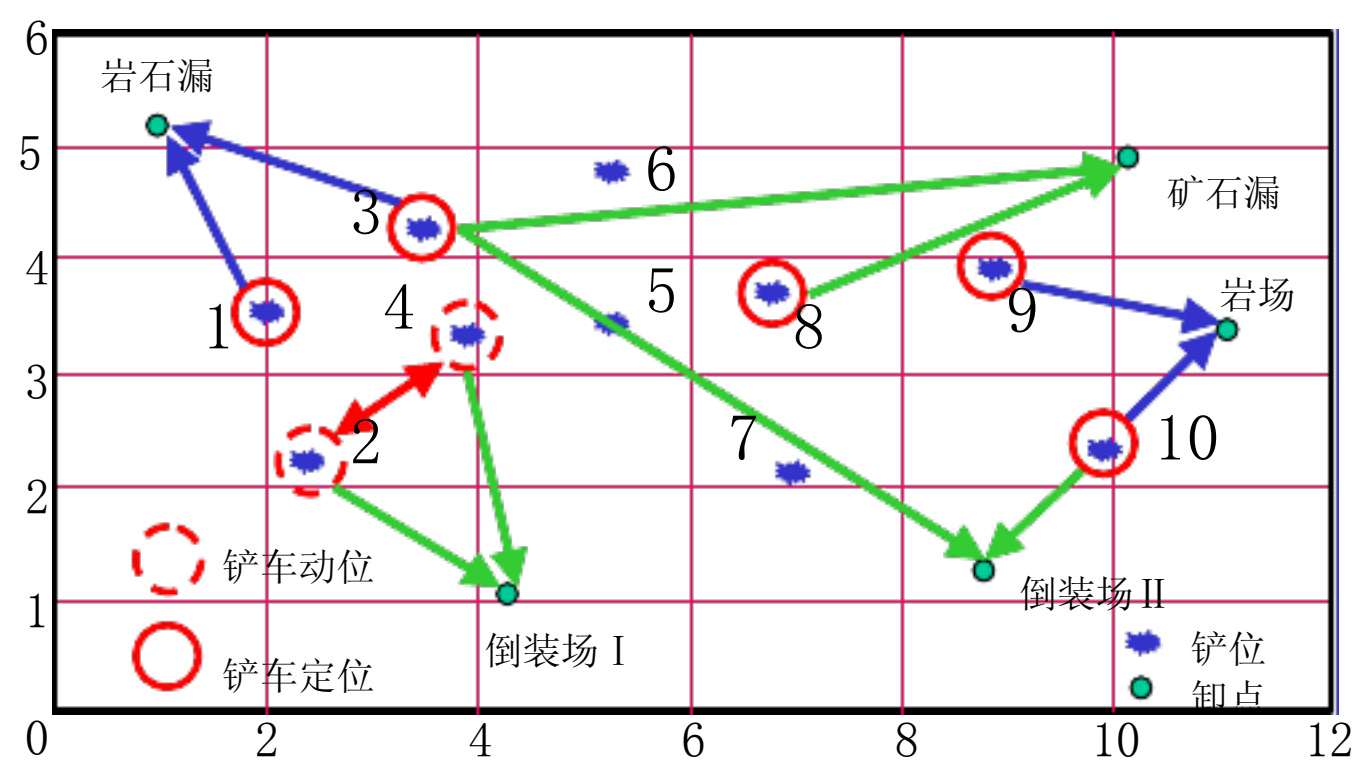


图 3 铲车定位与卡车运输供给关系图

4、模型 I 的总运量与产量

1) 总运量：由以上各分目标的最小吨公里数求和，可得出总的方案的最小吨公里数：

$$\min \sum_{j=1}^5 f_j \quad 88496.1 \text{ (吨公里)}。$$

2) 岩石和矿石的产量：由上述一个班次的生产计划模型中的实际车次安排方案，很易得出岩石和矿石的车次数：

岩石的车次数：81+43++52+33=209；故岩石的总产量为 209×154=32186 吨；

矿石的车次数：68+20+22+17+58+63=248；故矿石的总产量为 248×154=38192 吨。

可见两个量分别高于原来各自要求的总产量 3.2 万吨和 3.8 万吨。

三、模型 II：整数规划模型^[3]

1、模型的建立与求解：

同上所述，我们在考虑卡车不等待、满足产量和质量要求的情况下，以总运量位目标函数，建立规划模型对原则一进行求解。

1) 模型

$$\text{目标函数：} \min f = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^5 x_{ij} y_{ij} d_{ij}$$

约束条件：

$$\sum_{i=1}^{10} y_{ij} \overline{x_{ij}} = 78 \quad (j=1)$$
$$\sum_{i=1}^{10} y_{ij} \overline{x_{ij}} = 85 \quad (j=2,4,5)$$
$$\sum_{i=1}^{10} y_{ij} \overline{x_{ij}} = 124 \quad (j=3)$$
$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} y_i, \sum_{j=3}^5 x_{ij} k_i \quad (i=1, \dots, 10)$$
$$\sum_{i=1}^{10} x_{ij} = 96 \quad (j=1, \dots, 5)$$
$$0.285 \leq \frac{\sum_{i=1}^{10} y_{ij} \overline{x_{ij}} h_i}{\sum_{i=1}^{10} y_{ij} \overline{x_{ij}}} \leq 0.305 \quad (j=1,2,5)$$

2) 算法流程图（如图 4）

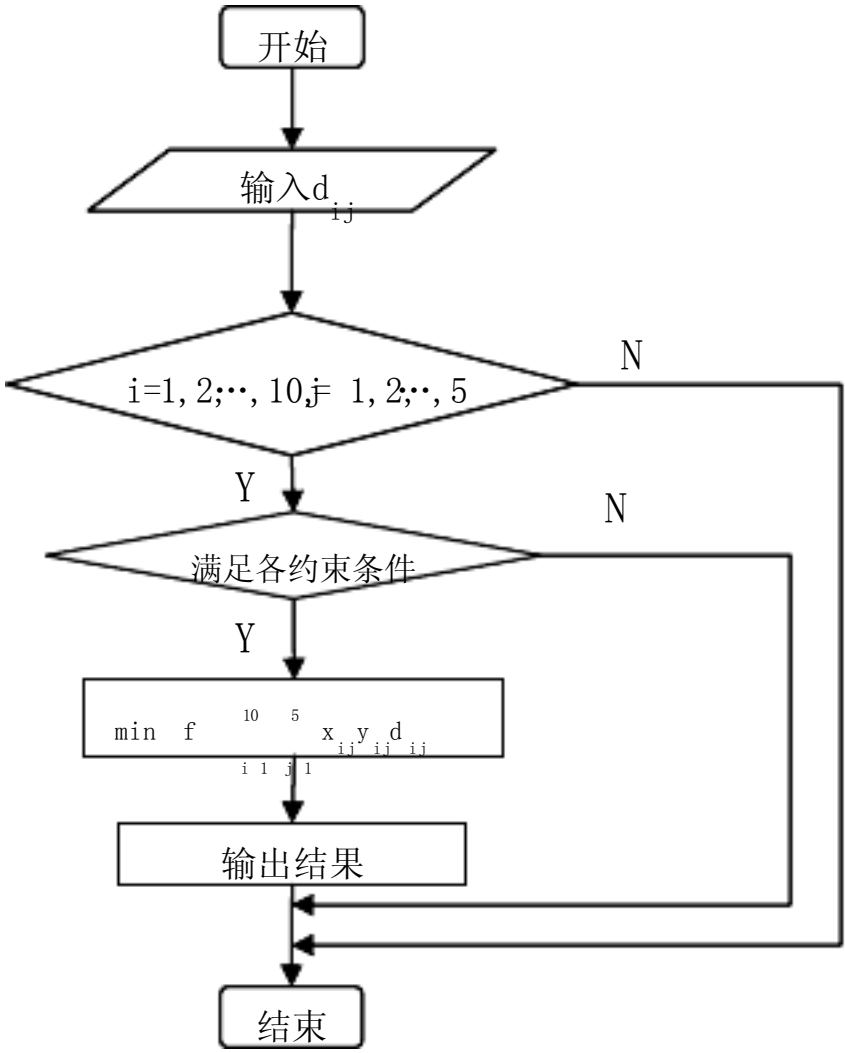


图 4 算法流程图

3) 计算结果
用 lingo 编程结果可得实际车次安排方案为：

车次 卸点 \ 铲位	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
矿石漏	×	13	×	×	×	×	×	54	×	11
倒装场 I	×	40	45	17	×	×	×	×	×	×
岩 场	×	×	×	×	×	×	×	×	70	15
岩石漏	81	×	43	×	×	×	×	×	×	×
倒装场 II	×	15	×	×	×	×	×	×	×	70

2、一个班次的生产计划：

1) 铲车的安排：出动 7 辆铲车：铲位 1、2、3、4、8、9、10 各安排一辆铲车。

2) 卡车的安排：因为所求解的卡车总的工作时间（包括运输、装车和卸车）为 6041.386 分钟，而 12 辆卡车的完全工作时间为 5760 分钟，不能满足要求，13 辆卡车的完全工作时间为 6240 分钟，大于实际工作时间，而己知要求卡车不等待，所以出动 13 辆卡车就能满足运输。结合表中的单车上限，可给出如下具体方案：

- 铲位 1→岩石漏 81 车次，2 辆；
- 铲位 2→倒装场 I 40 车次，→矿石漏 13 车次，→倒装场 II 15 车次，3 辆；
- 铲位 3→岩石漏 43 车次，1 辆；
- 铲位 4→倒装场 I 45 车次，1 辆；
- 铲位 8→矿石漏 54 车次，2 辆；
- 铲位 9→岩场 70 车次，2 辆；
- 铲位 10→岩场 15 车次，→矿石漏 11 车次，→倒装场 II 70 车次，2 辆。

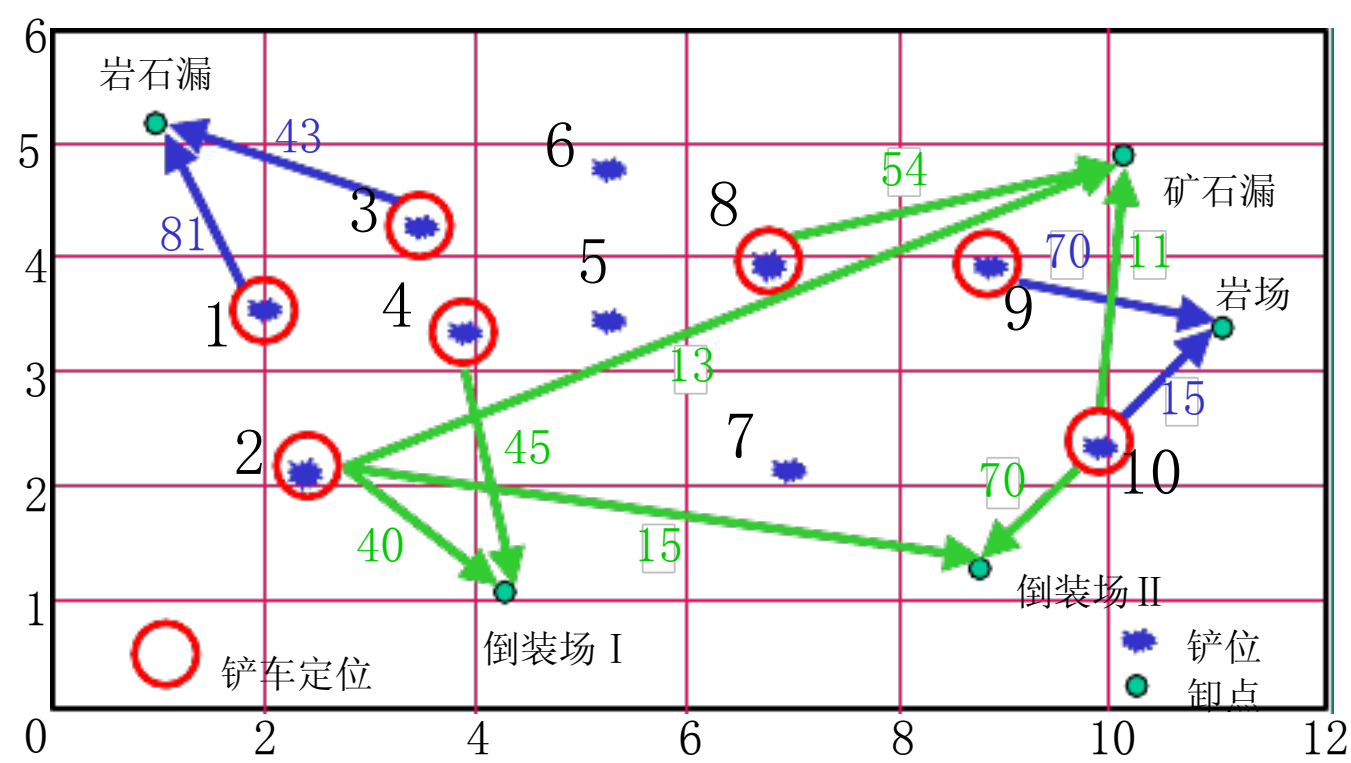


图 5 铲车定位与卡车运输供给关系图

3、模型 II 中的总运量与产量：

1) 总运量：由生产计划易求得总运量：

$$\min_{j=1}^5 f_j \quad 85714.86 \text{ (吨公里)}。$$

2) 岩矿石的产量：

由生产计划方案，很易得出岩石和矿石的车次数：

岩石车次数：70+15+81+43=209；故岩石总产量为 209×154=32186 吨；

矿石车次数：13+54+11+40+45+15+70=248；故矿石总产量为 248×154=38192 吨。

可见结果总运量优于模型 I，产量与模型 I 相同。

四、模型 I 和模型 II 结果的比较：

模型 I 求得的结果为①出动铲车 6 辆②出动卡车 12 辆③相应的总运量为 88496.1 吨公里。

模型 II 求得的结果为①出动铲车 7 辆②出动卡车 13 辆③相应的总运量为 85714.86 吨公里。

我们对模型一和二的结果进行分析：虽然模型 I 出动的铲车和卡车都比模型 II 少了一辆，但模型 I 所求得的总运量比模型 II 多了 2781.24 吨公里。

又由于模型 I 的算法是通过对制定各个铲位的生产计划进行分步分析求解，分步求解到各个卸货点的车次安排和总运量，过程比较繁琐，而且计算推导中容易出错，得到的总运量也比模型 II 的总运量大，与原则一要求总运量最小不符，可以看出模型 II 的结果优于模型 I 的结果。

五、就模型 II 增加铲车数的限制

(一) 5 辆铲车时的情况模型结果

1、模型建立与求解

对模型 II 增加铲车为 5 辆的条件，用 lingo 编程可得实际车次安排方案：

车次 卸点 \ 铲位	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
矿石漏	15	1	42	×	×	×	×	×	24	11
倒装场 I	×	54	16	×	×	×	×	×	×	×
岩 场	×	×	×	×	×	×	×	×	70	15
岩石漏	81	7	36	×	×	×	×	×	×	×
倒装场 II	×	13	2	×	×	×	×	×	×	70

2、一个班次的生产计划：

1) 铲车的安排：出动 5 辆铲车：铲位 1、2、3、9、10 各安排一辆铲车。

2) 卡车的安排：因为所求解的卡车总的工作时间（包括运输、装车和卸车）为 6041.386 分钟，而 12 辆卡车的完全工作时间为 5760 分钟，不能满足要求，13 辆卡车的完全工作时间为 6240 分钟，大于实际工作时间，而已知要求卡车不等待，所以出动 13 辆卡车就能满足运输。结合表 中的单车上限，可给出如下具体方案：

铲位 1→岩石漏 81 车次，2 辆；

铲位 2→倒装场 I 40 车次，→矿石漏 13 车次，→倒装场 II 15 车次，3 辆；

铲位 3→岩石漏 43 车次，1 辆；

铲位 4→倒装场 I 45 车次，1 辆；

铲位 8→矿石漏 54 车次，2 辆；

铲位 9→岩场 70 车次，2 辆；

铲位 10→岩场 15 车次，→矿石漏 11 车次，→倒装场 II 70 车次，2 辆。

3、总运量与产量：

1) 总运量：由生产计划易求得总运量：93778.3 吨公里

2) 岩矿石的产量：岩石产量 32186 吨；矿石产量为 38192 吨。

铲车出动 5 辆时，总运量比原模型 II 大，产量相同。

(二) 6 辆铲车时的情况模型结果

1、模型建立与求解

对模型 II 增加铲车为 6 辆的条件，用 lingo 编程可得实际车次安排方案：

车次 卸点 铲位	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
矿石漏	25		20	×	×	×	×	47	×	11
倒装场 I	15	55	15	×	×	×	×	×	×	×
岩 场	×	×	×	×	×	×	×	×	70	15
岩石漏	81	×	43	×	×	×	×	×	×	×
倒装场 II	×	13	2	×	×	×	×	×	×	70

2、一个班次的生产计划：

1) 铲车的安排：出动 6 辆铲车:铲位 1、2、3、8、9、10 各安排一辆铲车。

2) 卡车的安排：因为所求解的卡车总的工作时间（包括运输、装车和卸车）为 6041.386 分钟，而 12 辆卡车的完全工作时间为 5760 分钟，不能满足要求,13 辆卡车的完全工作时间为 6240 分钟，大于实际工作时间，而已知要求卡车不等待，所以出动 13 辆卡车就能满足运输。结合表中的单车上限，可给出如下具体方案：

- 铲位 1→岩石漏 81 车次，2 辆；
- 铲位 2→倒装场 I 40 车次，→矿石漏 13 车次，→倒装场 II 15 车次，3 辆；
- 铲位 3→岩石漏 43 车次，1 辆；
- 铲位 4→倒装场 I 45 车次，1 辆；
- 铲位 8→矿石漏 54 车次，2 辆；
- 铲位 9→岩场 70 车次，2 辆；
- 铲位 10→岩场 15 车次，→矿石漏 11 车次，→倒装场 II 70 车次，2 辆。

3、总运量与产量：

- 1) 总运量：由生产计划易求得总运量：85714.86 吨公里；
 - 2) 岩矿石的产量：岩石产量 32186 吨；矿石产量为 38192 吨。
- 铲车出动 6 辆时，总运量、产量与原模型 II 相同。

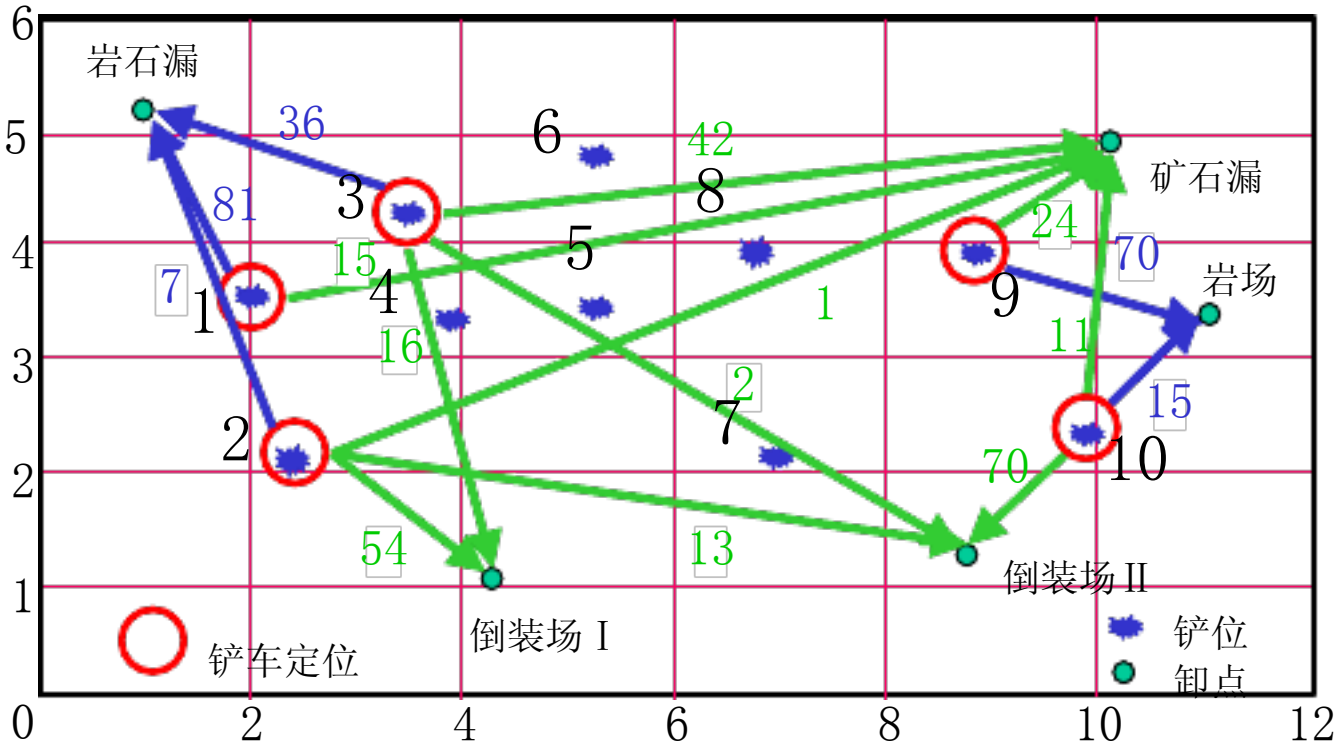


图 6 铲车定位与卡车运输供给关系图

3、模型 II 中岩石和矿石的产量：

由上述一个班次的生产计划模型中的实际车次安排方案，很易得出岩石和矿石的车

次数：

岩石车次数：70+15+81+43=209；故岩石总产量为 209×154=32186 吨；

矿石车次数：13+54+11+40+45+15+70=248；故矿石总产量为 248×154=38192 吨。

可见两个量结果与模型 I 相同。

对模型 II，当铲车设定为 5 辆时，要满足原则一及产量的要求，需最少出动 14 辆卡车，总运量为 93778.3 吨公里；

当铲车设定为 6 辆时，要满足原则一及产量的要求，需最少出动 13 辆卡车，总运量为 89433.96 吨公里；

当铲车设定为 7 辆时，要满足原则一及产量的要求，仍需最少出动 13 辆卡车，总运量为 85628.62 吨公里。

从以上结果表明，要满足原则一，理想的方案为：出动铲车为 7 辆，出动卡为 13 辆时，总运量为最少。

§ 5.2 问题二的分析与求解

一、对约束条件和原则二的分析

在考虑原则二时，我们首先确定七辆铲车同时不停地工作时，在一个班次内它们所能生产的最大的矿岩石产量的总和，即在一个班次内总车次的上限为：8 60 7/5 672 车次，产量的最大值为 672 154 103488 吨。在此条件的约束下，我们考虑到要想获得最大的产量，就必须使铲车所运输的车次达到最多，所以我们根据此原理，以最大的出车次数为目标函数，求得最大产量以及在最大产量条件下的各铲位的出车次数。假设铲车在一个班次内没有移动。

二、模型III：最优化模型

1、铲车固定时，求最大产量

1) 模型

目标函数：
$$\max z = 154 \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^5 x_{ij} y_{ij} p_i$$

约束条件：
$$z \leq 672$$
$$\sum_{i=1}^{10} x_{1i} + \sum_{i=2}^{10} x_{2i} + \sum_{j=1}^5 y_j / 154 \leq K \quad (i = 1, 2, \dots, 10)$$
$$\sum_{i=2}^{10} x_{2i} + \sum_{i=3}^{10} x_{3i} + \sum_{i=4}^{10} x_{4i} + \sum_{j=1}^5 y_j / 154 \leq K \quad (i = 1, 2, \dots, 10)$$
$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} \leq 96 \quad (j = 1, 2, \dots, 5)$$
$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{10} x_{ij} y_{ij} \leq 8 * 60 / 3 \quad (i = 1, 2, \dots, 5)$$
$$0.285 \frac{\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^5 x_{ij} y_{ij} h_{ij}}{\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^5 x_{ij} y_{ij}} \leq 0.305 \quad (j = 1, 2, \dots, 5)$$

$$p_i = \begin{cases} 0 & \text{第} i \text{铲位到第卸点没有卡车运输} \\ 1 & \text{第} i \text{铲位到第卸点有卡车运输} \end{cases}$$
$$p_i = \begin{cases} 0 & \text{第} i \text{铲位没有铲车} \\ 1 & \text{第} i \text{铲位有铲车} \end{cases}$$

2) 计算结果

根据该模型，我们用 Lingo 进行编程求解，得到如下结果：

Z	672.0000	X83	12.00000
X12	16.00000	X85	43.00000
X14	80.00000	X91	11.00000
X21	2.000000	X93	85.00000
X22	49.00000	X102	1.000000
X24	28.00000	X103	32.00000
X25	17.00000	X105	63.00000
X31	30.00000	P1	1.000000
X32	6.000000	P2	1.000000
X34	52.00000	P3	1.000000
X35	8.000000	P7	1.000000
X72	67.00000	P8	1.000000
X73	28.00000	P9	1.000000
X75	1.000000	P10	1.000000
X81	41.00000		

由上表结果可知，总车次数为 672，从而可得最大产量：154×672=103488 吨。

2、最大产量固定时求最小总运量最小

1)模型

满足上面模型所求得的最大产量，用现有车辆运输，求总运量最小的数学模型为：

目标函数：
$$\min f = 154 \sum_{i=1}^{10} (p_i \sum_{j=1}^5 y_{ij} x_{ij} d_{ij})$$

约束条件：
$$\sum_{i=1}^4 x_{3i} + \sum_{i=1}^4 x_{4i} = \sum_{j=1}^5 Y_j \quad (j=1,2,3,5; i=1,2,3,10)$$

$$x_{1i} + x_{2i} + x_{5i} = \frac{K}{154} \quad (j=1,2,3,5; i=1,2,3,10)$$

$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} \leq 96 \quad (j=1,2,3,5; i=1,2,3,10)$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ij} y_{ij} \leq \frac{8 \times 60}{3} \quad (j=1,2,3,5; i=1,2,3,10)$$

$$0.285 \sum_{i=1}^{10} \frac{x_{ij} y_{ij} h_{ij}}{\sum_{i=1}^{10} x_{ij} y_{ij}} \leq 0.305 \quad (j=1,2,3,5; i=1,2,3,10)$$

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^5 (x_{ij} - D_{ij})^2 = 86020 \quad (j=1,2,5; i=1,2,10)$$
$$\sum_{i=1}^{10} (p_i - \sum_{j=1}^5 y_{ij} x_{ij})^2 = 672$$
$$\sum_{i=1}^{10} p_i = 7 \quad (i=1,2,10)$$

2) 计算结果

根据该模型，我们用 Lingo 进行编程求解，得到如下结果：

F	967.7500	X83	12.00000
X12	15.00000	X85	22.00000
X14	81.00000	X92	9.000000
X22	66.00000	X93	87.00000
X24	28.00000	X103	33.00000
X25	2.000000	X105	63.00000
X31	20.00000	P1	1.000000
X34	51.00000	P2	1.000000
X35	25.00000	P3	1.000000
X72	68.00000	P7	1.000000
X73	28.00000	P8	1.000000
X81	60.00000	P9	1.000000
X82	2.000000	P10	1.000000

转化成表格即为实际车次安排方案：

铲位 车次 卸点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
矿石漏	×	×	20	×	×	×	×	60	×	×
倒装场 I	15	66	×	×	×	×	68	2	9	×
岩场	×	×	×	×	×	×	28	12	87	33
岩石漏	81	28	51	×	×	×	×	×	×	
倒装场 II	×	2	25	×	×	×	×	22	×	63

3、一个班次的生产计划：

- 1) 铲车的安排：出动 7 辆铲车：铲位 1、2、3、7、8、9、10 各安排一辆。
- 2) 卡车的安排：出动 20 辆卡车：每辆铲车配备 3 辆卡车。实际车次安排方案：
 铲位 1→倒装场 I 15 车，岩石漏 81 车；
 铲位 2→倒装场 I 66 车，→岩石漏 28 车，→倒装场 II2 车；
 铲位 3→矿石漏 20 车，→岩石漏 51 车，→倒装场 II25 车；
 铲位 7→倒装场 I 68 车，→岩场 28 车；
 铲位 8→矿石漏 60 车，→倒装场 I 2 车，→岩场 12 车，→倒装场 II22 车；
 铲位 9→倒装场 I 9 车，→岩场 87 车；铲位 10→岩场 33 车，→倒装场 II63 车。

4、总运量与产量：

相应的总运量 149033.5吨公里，岩石产量 52360 吨，矿石产量 54208 吨。

§ 5.3 模型Ⅳ：快速算法模型

一、对问题 1 的快速算法

在卡车不等待条件下满足产量和质量（品位）要求时，由于从保护国家资源的角度及矿山的经济效益考虑，应该尽量把矿石按矿石卸点需要的铁含量（假设要求都为 29.5% 1%，称为品位限制）搭配起来送到卸点，搭配的量在一个班次（8 小时）内满足品位限制即可。故优先考虑各卸矿点的车辆安排。

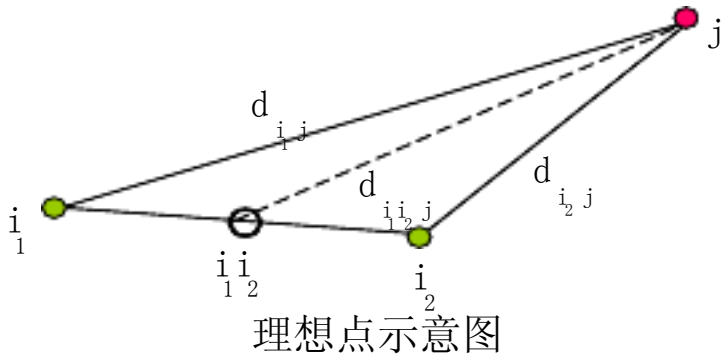
1、各卸矿点的车辆安排的快速算法

1) 概念的引入

为了满足品位限制，就应该把矿石搭配起来送到卸点，使搭配的量在一个班次内满足品位要求。为了便于计算，我们引入平均单位距离的概念。

定义 1 任意两个铲位满足到同一矿石卸点且含铁量为品位限制上限时的单位平均假想距离称为平均单位距离。称离卸点较近的点为基点，离卸点距离较远的点为中和点。

事实上，平均单位距离 $d_{i_1 i_2 j}$ 直观反映为将两个铲位 i_1, i_2 的矿石按品位限制上限 30.5% 合并为一个铲位（即理想点 $i_1 i_2$ ）时相对与矿石卸点 j 的距离（如下图）。



为求平均单位距离，我们下面引入中和比率的概念。

定义 2 中和比率就是两个铲位共同供应一个卸点满足含铁量为 30.5%时的矿石量之比。

事实上，中和比率 $b_{i_1 i_2}$ 即是所假定的理想点 $i_1 i_2$ 在供矿石时实际铲位 i_1, i_2 的供矿石量之比。而所有铲位中，只有铲位 1、铲位 2、铲位 3 的铁含量在 30.5% 以下，故矿石卸点必须由铲位 1、铲位 2、铲位 3 和其余铲位搭配的矿石运输。由此结合所有铲位铁含量，可得出中和比率的求解模型：

$$b_{i_1 i_2} = \frac{h_{i_2} \cdot 0.305}{0.305 \cdot h_{i_1}}, \quad i_1 = 1, 2, 3; i_2 = 4, 5, \dots, 10; j = 1, 2, 5。$$

由模型可得出搭配后的中和比率，列表如下：

	铲位 4	铲位 5	铲位 6	铲位 7	铲位 8	铲位 9	铲位 10
铲位 1	1/3	1	1/5	1/3	1	1/5	1
铲位 2	5/3	5	1	5/3	5	1	5
铲位 3	1	3	3/5	1	3	3/5	3

下面我们结合中和比率，可得出平均单位距离的求解模型：

$$d_{i_1 i_2 j} = \frac{d_{i_1 j} \cdot b_{i_1 i_2} + d_{i_2 j}}{1 + b_{i_1 i_2}}, \quad i_1 = 1, 2, 3; i_2 = 4, 5, \dots, 10; j = 1, 2, 5。$$

把具体数据代入模型，可依次得出供应各矿石卸点的平均单位距离，分别列表如下：

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/535224131131012112>