

湖北省天门市 2023 年高三 3 月测试（线上）数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 4^x + 3, & x \leq 0 \\ 2^x + \log_9 x^2 - 9, & x > 0 \end{cases}$ ，则函数 $y = f(f(x))$ 的零点所在区间为（ ）

- A. $\left(3, \frac{7}{2}\right)$ B. $(-1, 0)$ C. $\left(\frac{7}{2}, 4\right)$ D. $(4, 5)$

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2]$ ，则函数 $g(x) = f(2x) + \sqrt{8 - 2^x}$ 的定义域为（ ）

- A. $[0, 1]$ B. $[0, 2]$
C. $[1, 2]$ D. $[1, 3]$

3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , O 为坐标原点，以 OF 为直径的圆与双曲线 C 的一条渐近线交于点 O 及点 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，则双曲线 C 的方程为（ ）

- A. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$

4. 已知集合 $A = \left\{x \mid y = \lg \sin x + \sqrt{9 - x^2}\right\}$ ，则 $f(x) = \cos 2x + 2 \sin x$, $x \in A$ 的值域为（ ）

- A. $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ B. $\left(1, \frac{3}{2}\right]$ C. $\left(-1, \frac{1}{2}\right]$ D. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$

5. $\left(\frac{1}{x} + x + y^2\right)^8$ 的展开式中 $x^{-1}y^2$ 的系数是（ ）

- A. 160 B. 240 C. 280 D. 320

6. 已知 $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\vec{b} = (\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$ ，那么 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 是 $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ 的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $a + 2c = 2b \cos A$ ，则角 B 的大小为（ ）

- A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

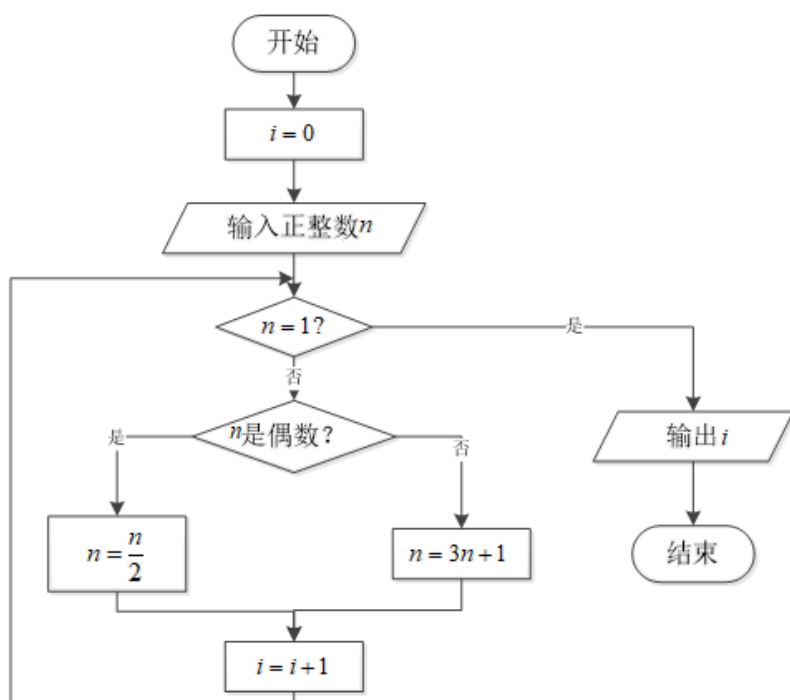
8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ，若双曲线 C 的一条渐近线的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ ，且点 F 到该渐近线的距离为 $\sqrt{3}$ ，则双曲线 C 的实轴的长为

- A. 1 B. 2
C. 4 D. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

9. 已知 $a = \log_3 5$ ， $b = 0.4^{0.5}$ ， $c = \log_2 5$ ，则 a, b, c 的大小关系为（ ）

- A. $c > b > a$ B. $b > c > a$ C. $a > b > c$ D. $c > a > b$

10. 很多关于整数规律的猜想都通俗易懂，吸引了大量的数学家和数学爱好者，有些猜想已经被数学家证明，如“费马大定理”，但大多猜想还未被证明，如“哥德巴赫猜想”、“角谷猜想”。“角谷猜想”的内容是：对于每一个正整数，如果它是奇数，则将它乘以 3 再加 1；如果它是偶数，则将它除以 2；如此循环，最终都能够得到 1。下图为研究“角谷猜想”的一个程序框图。若输入 n 的值为 10，则输出 i 的值为（ ）

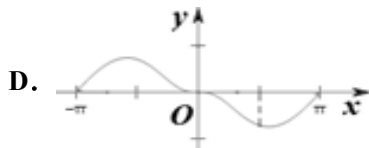
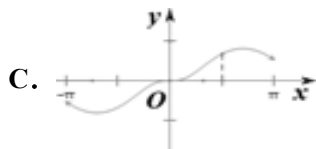
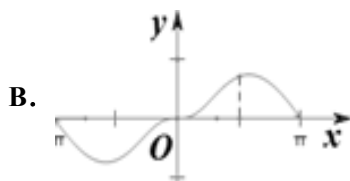
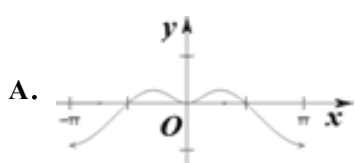


- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

11. 已知 $\vec{r}_a, \vec{r}_b$ 满足 $|\vec{r}_a| = 2\sqrt{3}$ ， $|\vec{r}_b| = 3$ ， $\vec{r}_a \cdot \vec{r}_b = -6$ ，则 $\vec{r}_a$ 在 $\vec{r}_b$ 上的投影为（ ）

- A. -2 B. -1 C. -3 D. 2

12. 设函数 $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{x^2 + 1}$, 则 $y = f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$ 的大致图象大致是()



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = x|x-4|$, 则不等式 $f(a+2) > f(3)$ 的解集为_____.

14. 已知不等式组 $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ x - 2y \leq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$ 所表示的平面区域为 Ω , 则区域 Ω 的外接圆的面积为_____.

15. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $2S_n - a_n + 1 = n(a_n + 1)$, 且 $a_2 = 5$. 若 $m > \frac{S_n}{2^n}$, 则实数 m 的取值范围为_____.

16. 验证码就是将一串随机产生的数字或符号, 生成一幅图片, 图片里加上一些干扰像素 (防止 OCR), 由用户肉眼识别其中的验证码信息, 输入表单提交网站验证, 验证成功后才能使用某项功能. 很多网站利用验证码技术来防止恶意登录, 以提升网络安全. 在抗疫期间, 某居民小区电子出入证的登录验证码由 0, 1, 2, ..., 9 中的五个数字随机组成. 将中间数字最大, 然后向两边对称递减的验证码称为“钟型验证码” (例如: 如 14532, 12543), 已知某人收到了一个“钟型验证码”, 则该验证码的中间数字是 7 的概率为_____.

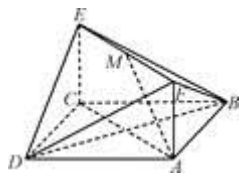
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且向量 $\vec{m} = (2a - c, b)$ 与向量 $\vec{n} = (\cos C, \cos B)$ 共线.

(1) 求 B ;

(2) 若 $b = 3\sqrt{7}$, $a = 3$, 且 $\vec{AD} = 2\vec{DC}$, 求 BD 的长度.

18. (12 分) 如图所示, 已知正方形 $ABCD$ 和矩形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直, $AB = \sqrt{2}$, $AF = 1$, M 是线段 EF 的中点.



求证: (1) $AM \parallel$ 平面 BDE ;

(2) $AM \perp$ 平面 BDF .

19. (12分) 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $2n, a_n, 2S_n - a_n$ 成等差数列($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 证明: 数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

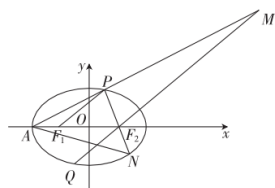
(2) 记 $b_n = \frac{a_n + 1}{a_n a_{n+1}}$ 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

20. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 点 A 是 C 的左顶点, 点 $P(2, 3)$ 为 C 上一点, 离心率 $e = \frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设过点 A 的直线 l 与 C 的另一个交点为 B (异于点 P), 是否存在直线 l , 使得以 AB 为直径的圆经过点 P , 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

21. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左顶点为 A , 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$, P 是椭圆上的一个动点 (不与左、右顶点重合), 且 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为6, 点 P 关于原点的对称点为 Q , 直线 AP, QF_2 交于点 M .



(1) 求椭圆方程;

(2) 若直线 PF_2 与椭圆交于另一点 N , 且 $S_{\triangle AF_2M} = 4S_{\triangle AF_2N}$, 求点 P 的坐标.

22. (10分) 已知函数 $f(x) = e^x + ax$, $g(x) = e^x \ln x$.

(1) 若对于任意实数 $x \geq 0$, $f(x) > 0$ 恒成立, 求实数 a 的范围;

(2) 当 $a = -1$ 时, 是否存在实数 $x_0 \in [1, e]$, 使曲线 $C: y = g(x) - f(x)$ 在点 x_0 处的切线与 y 轴垂直? 若存在, 求出 x_0 的值; 若不存在, 说明理由.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. A

【解析】

首先求得 $x \leq 0$ 时， $f(x)$ 的取值范围. 然后求得 $x > 0$ 时， $f(x)$ 的单调性和零点，令 $f(f(x)) = 0$ ，根据“ $x \leq 0$ 时， $f(x)$ 的取值范围”得到 $f(x) = 2^x + \log_3 x - 9 = 3$ ，利用零点存在性定理，求得函数 $y = f(f(x))$ 的零点所在区间.

【详解】

当 $x \leq 0$ 时， $3 < f(x) \leq 4$.

当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 2^x + \log_9 x^2 - 9 = 2^x + \log_3 x - 9$ 为增函数，且 $f(3) = 0$ ，则 $x = 3$ 是 $f(x)$ 唯一零点. 由于“当 $x \leq 0$ 时， $3 < f(x) \leq 4$.”，所以

令 $f(f(x)) = 0$ ，得 $f(x) = 2^x + \log_3 x - 9 = 3$ ，因为 $f(3) = 0 < 3$ ，

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = 8\sqrt{2} + \log_3 \frac{7}{2} - 9 > 8 \times 1.414 + \log_3 3 - 9 = 3.312 > 3,$$

所以函数 $y = f(f(x))$ 的零点所在区间为 $\left(3, \frac{7}{2}\right)$.

故选：A

【点睛】

本小题主要考查分段函数的性质，考查符合函数零点，考查零点存在性定理，考查函数的单调性，考查化归与转化的数学思想方法，属于中档题.

2. A

【解析】

试题分析：由题意，得 $\begin{cases} 0 \leq 2x \leq 2 \\ 8 - 2^x \geq 0 \end{cases}$ ，解得 $0 \leq x \leq 1$ ，故选 A.

考点：函数的定义域.

3. C

【解析】

根据双曲线方程求出渐近线方程： $y = \frac{b}{a}x$ ，再将点 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 代入可得 $b = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ，连接 FA ，根据圆的性质可得

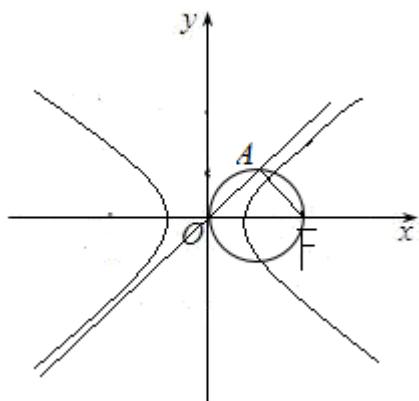
$$\frac{\sqrt{c^2 - 3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 从而可求出 } c, \text{ 再由 } c^2 = a^2 + b^2 \text{ 即可求解.}$$

【详解】

由双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

则渐近线方程: $y = \pm \frac{b}{a}x$,

$$\therefore b = \frac{\sqrt{3}}{3}a,$$



连接 FA , 则 $\frac{|FA|}{|AO|} = \frac{\sqrt{c^2 - 3}}{\sqrt{3}} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 解得 $c = 2$,

所以 $c^2 = a^2 + b^2 = 4$, 解得 $a^2 = 3, b^2 = 1$.

故双曲线方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

故选: C

【点睛】

本题考查了双曲线的几何性质, 需掌握双曲线的渐近线求法, 属于中档题.

4. A

【解析】

先求出集合 $A = (0, 3]$, 化简 $f(x) = -2\sin^2 x + 2\sin x + 1$, 令 $\sin x = t \in (0, 1]$, 得 $g(t) = -2t^2 + 2t + 1$ 由二次函数的性质即可得值域.

【详解】

由 $\begin{cases} \sin x > 0 \\ 9 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leq 3$, 得 $A = (0, 3]$, $f(x) = \cos 2x + 2\sin x = -2\sin^2 x + 2\sin x + 1$, 令 $\sin x = t$,

$\forall x \in (0, 3]$, $\therefore t \in (0, 1]$, 所以得 $g(t) = -2t^2 + 2t + 1$, $g(t)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上递增, 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 上递减,

$$g(1)=1, g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}, \text{ 所以 } g(t) \in \left[1, \frac{3}{2}\right], \text{ 即 } f(x) \text{ 的值域为 } \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

故选 A

【点睛】

本题考查了二次不等式的解法、二次函数最值的求法，换元法要注意新变量的范围，属于中档题

5. C

【解析】

首先把 $\frac{1}{x} + x$ 看作为一个整体，进而利用二项展开式求得 y^2 的系数，再求 $\left(\frac{1}{x} + x\right)^7$ 的展开式中 x^{-1} 的系数，二者相乘即可求解.

【详解】

由二项展开式的通项公式可得 $\left(\frac{1}{x} + x + y^2\right)^8$ 的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1} = C_8^r \left(\frac{1}{x} + x\right)^{8-r} y^{2r}$ ，令 $r=1$ ，则

$T_2 = C_8^1 \left(\frac{1}{x} + x\right)^7 y^2$ ，又 $\left(\frac{1}{x} + x\right)^7$ 的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1} = C_7^r \left(\frac{1}{x}\right)^{7-r} x^r = C_7^r x^{2r-7}$ ，令 $r=3$ ，则 $C_7^3 = 35$ ，所以 $x^{-1}y^2$ 的系数是 $35 \times 8 = 280$.

故选：C

【点睛】

本题考查二项展开式指定项的系数，掌握二项展开式的通项是解题的关键，属于基础题.

6. B

【解析】

由 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，可得 $\cos 2\alpha = 0$ ，解出即可判断出结论.

【详解】

解：因为 $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ， $\vec{b} = (\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$ 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\therefore \cos \alpha \cos(-\alpha) + \sin \alpha \sin(-\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha = 0.$$

$$\therefore 2\alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, \text{ 解得 } \alpha = k\pi \pm \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ 是 } \alpha = k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}) \text{ 的必要不充分条件.}$$

故选：B.

【点睛】

本题考查了向量数量积运算性质、三角函数求值、简易逻辑的判定方法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

7. A

【解析】

先利用正弦定理将边统一化为角，然后利用三角函数公式化简，可求出解 B .

【详解】

由正弦定理可得 $\sin A + 2\sin C = 2\sin B \cos A$ ，即 $\sin A + 2\sin(A+B) = 2\sin B \cos A$ ，即有 $\sin A(1+2\cos B) = 0$ ，

因为 $\sin A > 0$ ，则 $\cos B = -\frac{1}{2}$ ，而 $B \in (0, \pi)$ ，所以 $B = \frac{2\pi}{3}$.

故选：A

【点睛】

此题考查了正弦定理和三角函数的恒等变形，属于基础题.

8. B

【解析】

双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，由题可知 $\frac{b}{a} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

设点 $F(c, 0)$ ，则点 F 到直线 $y = \sqrt{3}x$ 的距离为 $\frac{|\sqrt{3}c|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \sqrt{3}$ ，解得 $c = 2$ ，

所以 $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 = 4$ ，解得 $a = 1$ ，所以双曲线 C 的实轴的长为 $2a = 2$ ，故选 B.

9. D

【解析】

与中间值 1 比较， a, c 可用换底公式化为同底数对数，再比较大小.

【详解】

$0.4^{0.5} < 1$ ， $\log_3 5 > 1$ ，又 $0 < \log_5 2 < \log_5 3$ ， $\therefore \frac{1}{\log_5 2} > \frac{1}{\log_5 3}$ ，即 $\log_2 5 > \log_3 5$ ，

$\therefore c > a > b$.

故选：D.

【点睛】

本题考查幂和对数的大小比较，解题时能化为同底的化为同底数幂比较，或化为同底数对数比较，若是不同类型的数，可借助中间值如 0，1 等比较.

10. B

【解析】

根据程序框图列举出程序的每一步，即可得出输出结果.

【详解】

输入 $n=10$ ， $n=1$ 不成立， n 是偶数成立，则 $n=\frac{10}{2}=5$ ， $i=0+1=1$ ；

$n=1$ 不成立， n 是偶数不成立，则 $n=3\times 5+1=16$ ， $i=1+1=2$ ；

$n=1$ 不成立， n 是偶数成立，则 $n=\frac{16}{2}=8$ ， $i=2+1=3$ ；

$n=1$ 不成立， n 是偶数成立，则 $n=\frac{8}{2}=4$ ， $i=3+1=4$ ；

$n=1$ 不成立， n 是偶数成立，则 $n=\frac{4}{2}=2$ ， $i=4+1=5$ ；

$n=1$ 不成立， n 是偶数成立，则 $n=\frac{2}{2}=1$ ， $i=5+1=6$ ；

$n=1$ 成立，跳出循环，输出 i 的值为 6.

故选：B.

【点睛】

本题考查利用程序框图计算输出结果，考查计算能力，属于基础题.

11. A

【解析】

根据向量投影的定义，即可求解.

【详解】

$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影为 $|\vec{a}|\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-6}{3} = -2$.

故选:A

【点睛】

本题考查向量的投影，属于基础题.

12. B

【解析】

采用排除法：通过判断函数的奇偶性排除选项 A；通过判断特殊点 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$ 的函数值符号排除选项 D 和选项 C

即可求解.

【详解】

对于选项 A:由题意知,函数 $f(x)$ 的定义域为 R ，其关于原点对称，

因为 $f(-x) = \frac{(-x)^2 \sin(-x)}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x^2 \sin x}{x^2 + 1} = -f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 为奇函数,其图象关于原点对称, 故选 A 排除;

对于选项 D:因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\pi^2}{\pi^2 + 4} > 0$,故选项 D 排除;

对于选项 C:因为 $f(\pi) = \frac{\pi^2 \sin(\pi)}{\pi^2 + 1} = 0$,故选项 C 排除;

故选:B

【点睛】

本题考查利用函数的奇偶性和特殊点函数值符号判断函数图象;考查运算求解能力和逻辑推理能力;选取合适的特殊点并判断其函数值符号是求解本题的关键;属于中档题、常考题型.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $(-1,1) \cup (\sqrt{7}, +\infty)$

【解析】

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \geq 4 \\ -x^2 + 4x, & x < 4 \end{cases}, \quad f(3) = 3, \text{ 分类讨论即可.}$$

【详解】

$$\text{由已知, } f(x) = x|x-4| = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \geq 4 \\ -x^2 + 4x, & x < 4 \end{cases}, \quad f(3) = 3,$$

$$\text{若 } f(a+2) > f(3) = 3, \text{ 则 } \begin{cases} a+2 \geq 4 \\ (a+2)^2 - 4(a+2) > 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} (a+2) < 4 \\ -(a+2)^2 + 4(a+2) > 3 \end{cases}$$

解得 $a > \sqrt{7}$ 或 $-1 < a < 1$, 所以不等式 $f(a+2) > f(3)$ 的解集为 $(-1,1) \cup (\sqrt{7}, +\infty)$.

故答案为: $(-1,1) \cup (\sqrt{7}, +\infty)$

【点睛】

本题考查分段函数的应用, 涉及到解一元二次不等式, 考查学生的计算能力, 是一道中档题.

14. $\frac{25}{4}\pi$

【解析】

先作可行域, 根据解三角形得外接圆半径, 最后根据圆面积公式得结果.

【详解】

由题意作出区域 Ω , 如图中阴影部分所示,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/535310241131011340>