

全国初中(九年级))数学竞赛专题大全

竞赛专题5 不等式

一、单选题

1. (2021·全国·九年级竞赛)若满足不等式 $\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}$ 的整数k只有一个,则正整数n的最大值为().

A.100

B.112

C.120

D.150

2. (2021·全国·九年级竞赛)要使分式 $\frac{\sqrt{x^2-7}}{2-|x-3|}$ 有意义,则x 的取值范围是()

A.x>4

B.x≥√7

且x≠5

C.x>4

且 x≠5

D.4<x<5

3. (2021·全国·九年级竞赛)某校初一运动队为了备战校运动会需要购置一批运动鞋.已知该运动队有20名同学,统计表如下表,由于不小心弄脏了统计表,下表中阴影部分的两个数据看不到.

鞋码	38	39	40	41	42
人数	5			3	2

下列说法正确的是(). A. 这组鞋码数据中的中位数是40,众数是39

B. 这组鞋码数据中的中位数与众数一定相等

C. 这组鞋码数据中的平均数P 满足 $39 \leq p \leq 40$

D. 以上说法都不对

4. (2021·全国·九年级竞赛)如果不等式组 $\begin{cases} 9x-a \geq 0 \\ 8x-b < 0 \end{cases}$ 的整数解仅为1,2,3,那么适合这个不等式组的有序对(a,b)共有().

A.17 个

B.64 个

C.72 个

D.81 个

5. (2021-全国·九年级竞赛)若不等式 $0 \leq ax+5 \leq 4$ 的整数解是1,2,3,4,则a 的取值范围是().

A. $a, -\frac{5}{4}$

B.a<-1

C. $-\frac{5}{4} \leq a < -1$

D.a. $-\frac{5}{4}$

6. (2021全国·九年级竞赛)设 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2009}$,且 $0 < x < y$,则满足此等式的不同整数对(x,y)有()对.

A.1

B.2

C.3

D.4

7. (2021·全国·九年级竞赛)有两个四位数,它们的差是534,它们平方数的末四位数相同.则较大的四位数有()种可能.

A.1 B.2 C.3 D.4

8. (2021·全国·九年级竞赛) 一个正方形纸片, 用剪刀沿一条不过顶点的直线将其剪成两部分, 拿出其中一部分, 再沿一条不过任何顶点的直线将其剪成两部分, 又从得到的3部分中拿出其中之一, 还是沿一条不过任何顶点的直线将其剪成两部分, ……如此下去, 最后得到34个六十二边形和一些多边形纸片, 则至少要剪的刀数是().

A.2004 B.2005 C.2006 D.2007

9. (2021·全国·九年级竞赛) 若正数 a, b, c 满足不等式
$$\begin{cases} \frac{11}{6}c < a+b < 2c \\ \frac{3}{2}a < b+c < \frac{5}{3}a \\ \frac{5}{2}b < a+c < \frac{11}{4}b \end{cases}$$
 则 a, b, c 的大小关系是()

A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $c < a < b$ D. 不确定

10. (2021·全国·九年级竞赛) 设 $r \geq 4, a = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}, b = \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r+1}}, c = \frac{1}{r(\sqrt{r} + \sqrt{r+1})}$ 则下列各式一定成立的是().

A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

二、填空题

11. (2021·全国·九年级竞赛) 设 a, b 为正整数, 且 $\frac{2}{3} < \frac{a}{b} < \frac{5}{7}$ 则 b 取最小值时 $a+b=$ _____

12. (2021·全国·九年级竞赛) 已知实数 x, y 满足 $2x-3y=4$ 且 $x \geq 0, y \leq 1$, 则 $x-y$ 的最大值是_____, 最小值是_____

13. (2021·全国·九年级竞赛) 已知 $0 \leq a \leq 1$, 且满足 $\left[a + \frac{1}{30}\right] + \left[a + \frac{2}{30}\right] + \cdots + \left[a + \frac{29}{30}\right] = 18$ ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数), 则 $[10a]$ 的值等于_____

14. (2021全国·九年级竞赛) 若化简 $|2-x| - \sqrt{x^2-6x+9}$ 的结果为 $2x-5$, 则满足条件是 x 的取值围是

15. (2021-全国·九年级竞赛) $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数(例如 $[3.2]=3$). 已知正整数 n 小于2006, 且

$\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{6}\right] = \frac{n}{2}$ 则这样的 n 有 _____ 个.

16. (2021·全国·九年级竞赛) 不等式 $42x^2+ax < a^2$ 的解是 _____.

17. (2021-全国·九年级竞赛) 已知正整数 m 和 n 有大于1的最大公约数, 并且满足 $m^3+n=371$, 则 $mn=$ _____.

18. (2021全国·九年级竞赛) 长沙市某中学100名学生向某“希望学校”捐书1000本, 其中任意10人捐书总数不超过190本, 那么捐书最多的某同学最多能捐书_____本.

19. (2021全国·九年级竞赛) 已知由小到大的10个正整数 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 的和是2000, 那么 a_3 的最大值是_____, 这时 a_{10} 的值应是_____.

三、解答题

20. (2021·全国·九年级竞赛) 某宾馆底楼客房比二楼客房少5间, 某旅游团有48人. 若全部安排底楼, 每间房间住4人, 房间不够; 每间住5人, 则有房间没有住满5人. 又若全部安排住二楼, 每间住3人, 房间不够; 每间住4人, 则有房间没有住满4人. 问该宾馆底楼有多少间客房?

21. (2021全国·九年级竞赛) 一座大楼有4部电梯, 如果每部电梯可停靠三层(不一定连续三层, 也不一定停最低层), 对大楼中的任意两层, 至少有一部电梯可在这两层停靠. 问: 这座大楼最多有几层?

22. (2021全国·九年级竞赛) 解方程. $x \left[\frac{x^2+4}{x^2} \right] - 2x = 4.$

23. (2021-全国·九年级竞赛) 证明: 对任意实数 x 及任意正整数 n 有

$$\left[x \right] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \left[x + \frac{2}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = \left[nx \right].$$

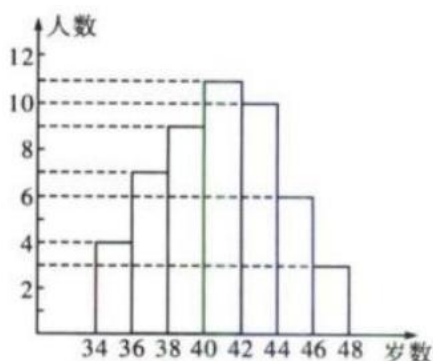
24. (2021·全国·九年级竞赛) 已知 $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$, 证明: $a(1-b), b(1-c), c(1-a)$ 中至少有一个

不大于 $\frac{1}{4}$

25. (2021全国·九年级竞赛) 设正数 a, b, c, x, y, z 满足 $a+x=b+y=c+z=k$, 证明: $ay+bz+cx < k^2$.

26. (2021·全国·九年级竞赛) 已知实数 a, b, c 满足 $a+b+c=0, ac=10$, 证明 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 0$.

27. (2021-全国·九年级竞赛) 下图是某单位职工年龄(取正整数)的频率分布图(每组可含最低年龄但不含最高值), 根据图中提供的信息回答下列问题:



(1) 该厂共有多少职工?

(2) 年龄不小于38但小于44岁的职工人数占职工总人数的百分比是多少?

(3) 如果42岁的职工有4人, 那么 42岁以上的职工有多少人?

(4) 有人估计该单位职工的平均年龄在39岁与42岁之间, 问这个估计正确吗?

28. (2021全国·九年级竞赛) 某人到花店买花, 他只有24元, 打算买6支玫瑰和3支百合, 但发现钱不够, 只买了4支玫瑰和5支百合, 这样还剩下2元多钱. 请你算一算: 2支玫瑰和3支百合哪个价格高?

29. (2021-全国·九年级竞赛)解不等式 $\sqrt{1-x}-\sqrt{x+3} \geq \frac{1}{2}$

30. (2021·全国·九年级竞赛)解不等式:

$$\frac{x+2}{4x+3} - \frac{x}{4x+1} > \frac{x}{4x-1} - \frac{x-2}{4x-3}$$

31. (2021-全国·九年级竞赛)求满足下列条件的最小正整数 n , 使得对这样的 n , 有唯一的正整数 k , 满足

$$\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}.$$

32. (2021·全国·九年级竞赛)解不等式: $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4} \leq 1.$

33. (2021·全国·九年级竞赛)解不等式 $\frac{2x-1}{x-1} > \frac{x+3}{x+1}.$

34. (2021·全国·九年级竞赛)如果二次不等式: $ax^2+8ax+21<0$ 的解是 $-7 \leq x < -1$, 求 a 的值.

35. (2021-全国·九年级竞赛)某校参加全国数,理,化,计算机比赛的人数分别是20,16, x ,20 人. 已知这组数据的中位数和平均数相等,求这组数据的中位数.

36. (2021·全国·九年级竞赛)某个学生参加军训,进行打靶训练,必须射击10次,在第6次、第7次、第8次、第9次射击中,分别得到9.0环、8.4环、8.1环、9.3环,他的前9次射击所得平均环数高于前5次射击所得平均环数,如果要使10次射击的平均环数超过8.8环,那么他第10次射击至少要得多少环?(每次射击环数精确到0.1环)

37. (2021·全国·九年级竞赛)今有浓度为5%,8%,9%的甲、乙、丙三种盐水分别为60g,60g,47g, 现要配制浓度为7%的盐水100g. 问甲盐水最多可用多少克?最少可用多少克?

38. (2021·全国·九年级竞赛)求证:对任意的实数 x, y , $[2x]+[2y] \cdot [x]+[x+y]+[y]$.

39. (2021-全国·九年级竞赛)某个学生参加军训,进行打靶训练,必须射击10次,在第6、第7、第8、第9次射击中,分别得了9.0环,8.4环,8.1环,9.3环,他的前9次射击所得环数的平均值高于前5次射击所得的平均环数.如果他要使10次射击的平均环数超过8.8环,那么他在第10次射击中最少要得多少环?(每次射击所得环数都精确到0.1环)

40. (2021·全国·九年级竞赛)已知 x,y,z 都是正数,证明: $\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq \frac{3}{2}$

41. (2021-全国·九年级竞赛)某饮料厂生产A、B两种矿泉水,每天生产B种矿泉水比A种矿泉水多10吨,A种矿泉水比B种矿泉水每天多获利润2000元,其中A种矿泉水每吨可获利润200元, B种矿泉水每吨可获利润100元.

(1)问:该厂每天生产A种, B种矿泉水各多少吨?

(2)由于江水受到污染,市政府要求该厂每天必须多生产10吨矿泉水,该厂决定响应市政府的号召,在每天的利润不超过原利润的情况下不少于8000元,该厂每天生产A种矿泉水最多多少吨?

42. (2021·全国·九年级竞赛)要使不等式 $x^2-3x+2 \leq 0$ ① 与不等式 $(m-1)x^2+(3-m)x-2 < 0$ ② 无公共解,求 m 的取值范围.

43. (2021·全国·九年级竞赛) 已知三个非负数 a, b, c , 满足 $3a+2b+c=5$ 和 $2a+b-3c=1$. 若 $m=3a+b-7c$, 求 m 的最大值和最小值.

44. (2021-全国·九年级竞赛) 某班学生到公园进行活动, 划船的有22人, 乘电动车的有20人, 乘过山车的有19人, 既划船又乘电动车的有9人, 既乘电动车又乘过山车的有6人, 既划船又乘过山车的有8人, 并且有4人没有参加上述3项活动中任何一项活动, 问这个班学生人数的可能值是多少?

竞赛专题5 不等式答案解析 (竞赛真题强化训练)

一、单选题

1. (2021·全国·九年级竞赛) 若满足不等式 $\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}$ 的整数 k 只有一个, 则正整数 n 的最大值为().

A.100 B.112 C.120 D.150

【答案】B

【解析】

【分析】

【详解】

由已知不等式得 $\frac{13}{7} < \frac{n+k}{n} < \frac{15}{8}, \frac{6}{7} < \frac{k}{n} < \frac{7}{8}, \frac{6n}{7} < k < \frac{7n}{8}$ 因由已知条件, $\frac{6n}{7}$ 与 $\frac{7n}{8}$ 之间只有

唯一一个整数 k , 所以 $\frac{7n}{8} - \frac{6n}{7} \leq 2$ 解得 $n \leq 112$. 当 $n=112$ 时, $96 \leq k \leq 98$, 存在唯一 $k=97$, 所以 n 的最大值为112. 故应选 B.

2. (2021·全国·九年级竞赛) 要使分式 $\frac{\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{x-3}}$ 有意义, 则 x 的取值范围是()

A. $x>4$ B. $x \geq \sqrt{7}$ 且 $x \neq 5$ C. $x>4$ 且 $x \neq 5$ D. $4 < x < 5$

【答案】C

【解析】

【分析】

【详解】

依题意得 $\begin{cases} x^2-7 \geq 0 \\ |x-3| \neq 2 \\ x > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt{7} \text{ 或 } x \geq \sqrt{7} \\ x \neq 1 \text{ 且 } x \neq 5 \\ x > 4 \end{cases} \rightarrow x > 4 \text{ 且 } x \neq 5. \text{ 故选 C.}$

3. (2021 • 全国 • 九年级竞赛) 某校初一运动队为了备战校运动会需要购置一批运动鞋. 已知该运动队有20名同学, 统计表如下表, 由于不小心弄脏了统计表, 下表中阴影部分的两个数据看不到.

鞋码	38	39	40	41	42
人数	5			3	2

下列说法正确的是(). A. 这组鞋码数据中的中位数是40, 众数是39

B. 这组鞋码数据中的中位数与众数一定相等

C. 这组鞋码数据中的平均数 $\bar{p}$ 满足 $39 \leq \bar{p} \leq 40$

D. 以上说法都不对

【答案】C

【解析】

【分析】

【详解】

设穿39码和40码的学生分别有 x 人和 y 人, 则 $x+y=20-(5+2+3)=10$. (1) 若 $y \geq x$, 即穿40码的人数

最多时, 中位数和众数都等于40, 故选A 错; (2) 若 $x=y=5$, 则中位数 $t = \frac{1}{2}(39+40) = 39.55$, 众数为39

和40, 中位数不等于众数, 故选B 错; (3) 平均数 $\bar{p} = \frac{1}{20}[38 \times 5 + 39x + 40 \times (10-x) + 41 \times 3 + 42 \times 2] = 39.75 - \frac{x}{20}$,

且 $0 \leq x \leq 10$, 于是 $39.25 < \bar{p} \leq 39.75$, 满足 $39 \leq \bar{p} \leq 40$, 故选C 正确. 所以应选C.

4. (2021 • 全国 • 九年级竞赛) 如果不等式组 $\begin{cases} 9x-a \geq 0 \\ 8x-b < 0 \end{cases}$ 的整数解仅为1, 2, 3, 那么适合这个不等式组的有

序对 (a,b) 共有().

A. 17 个

B. 64 个

C. 72 个

D. 81 个

【答案】C

【解析】

【分析】

【详解】

解 因 $\begin{cases} x \geq \frac{a}{9} \\ x < \frac{b}{8} \end{cases}$ 中 x 的整数值仅为1, 2, 3, 所以 $0 < \frac{a}{9} \leq 1, 3 < \frac{b}{8} \leq 4$, 即 $a \leq 9$,

$24 < b \leq 32$, 故 a 可取1, 2, $\dots$, 9这9个值, b 可取25, 26, $\dots$ 32这8个值, 所以有序对

(a,b) 有 $8 \times 9 = 72$ 个. 故选C.

5. (2021·全国·九年级竞赛)若不等式 $0 \leq ax+5 \leq 4$ 的整数解是1, 2, 3, 4, 则a 的取值范围是().

- A. $a, -\frac{5}{4}$ B. $a < -1$ C. $-\frac{5}{4} \leq a < -1$ D. $(a, -\frac{5}{4})$

【答案】C

【解析】

【分析】

【详解】

解 由 $0 \leq ax+5 \leq 4$ 得 $-5 \leq ax \leq -1$, 且已知 $x > 0$, 所以 $a < 0$, $-\frac{1}{a} \leq x \leq -\frac{5}{a}$.

又不等式 $0 \leq ax+5 \leq 4$ 的整数解是1, 2, 3, 4, 所以 $0 < -\frac{1}{a} \leq 1$, 且 $4 \leq -\frac{5}{a} < 5$ 解得

$a \leq -1$ 且 $-\frac{5}{4} \leq a < -1$, 故 $-\frac{5}{4} \leq a < -1$ 所以选 C.

6. (2021-全国·九年级竞赛)设 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2009}$, 且 $0 < x < y$, 则满足此等式的不同整数对(x,y)有()

对.

- A.1 B.2 C.3 D.4

【答案】C

【解析】

【分析】

【详解】

选C. 理由: 由 $2009 = 49 \times 41$, 得 $\sqrt{2009} = 7\sqrt{41}$.

又 $0 < x < y$, 故可将 $\sqrt{2009}$ 改写成

$$\sqrt{2009} = \sqrt{41+6\sqrt{41}} = 2\sqrt{41}+5\sqrt{41} = 3\sqrt{41}+4\sqrt{41},$$

$$\text{即 } \sqrt{2009} = \sqrt{41} + \sqrt{1476} = \sqrt{164} + \sqrt{1025} = \sqrt{369} + \sqrt{656}.$$

因此, 满足条件的整数对(x,y)为(41, 1476), (164, 1025), (369, 656). 共有3对.

7. (2021·全国·九年级竞赛)有两个四位数, 它们的差是534, 它们平方数的末四位数相同. 则较大的四位数有()种可能.

- A.1 B.2 C.3 D.4

【答案】C

【解析】

【分析】

【详解】

理由: 设较大的四位数为x, 较小的四位数为y, 则

$$x-y=534,$$

①

且 x^2-y^2 能被10000整除.

而 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=267 \times 2(x+y)$, 则 $x+y$ 能被5000整除.

令 $x+y=5000k$ ($k \in \mathbb{N}$).

由式①②解得
$$\begin{cases} x = 2500k + 267, \\ y = 2500k - 267. \end{cases}$$

考虑到 x, y 均为四位数, 于是,

$$\begin{cases} 1000 \leq 2500k + 267 \leq 9999, \\ 1000 \leq 2500k - 267 \leq 9999, \end{cases}$$

解得
$$\frac{1267}{2500} \leq k \leq 3\frac{558}{625}.$$

k 可取1, 2或3.

从而, x 可取的值有3个: 2767, 5267, 7767.

8. (2021 · 全国 · 九年级竞赛) 一个正方形纸片, 用剪刀沿一条不过顶点的直线将其剪成两部分, 拿出其中一部分, 再沿一条不过任何顶点的直线将其剪成两部分, 又从得到的3部分中拿出其中之一, 还是沿一条不过任何顶点的直线将其剪成两部分, ……如此下去, 最后得到34个六十二边形和一些多边形纸片, 则至少要剪的刀数是().

A.2004

B.2005

C.2006

D.2007

【答案】B

【解析】

【分析】

【详解】

解 (算两次方法) 依题意, 用剪刀沿不过顶点的直线剪成两部分时, 所得各张多边形(包括三角形)的纸片的内角和增加了 $2 \times 180^\circ = 360^\circ$, 剪过 k 刀后, 可得 $(k+1)$ 个多边形, 这些多边形的内角总和为 $360^\circ + k \times 360^\circ = (k+1) \times 360^\circ$.

另一方面, 因为这 $k+1$ 个多边形中有34个为六十二边形, 它们的内角总和为 $34 \times (62-2) \times 180^\circ = 2040 \times 180^\circ$, 余下的多边形(包括三角形)有 $k+1-34=k-33$ 个, 其内角总和至少为 $(k-33) \times 180^\circ$, 于是 $(k+1) \times 360^\circ \geq 2040 \times 180^\circ + (k-33) \times 180^\circ$, 解得 $k \geq 2005$.

其次, 我们按如下方式剪2005刀时, 可得到符合条件的结论. 先从正方形剪下1个三角形和1个五边形, 再将五边形剪成1个三角形和1个六边形, …, 如此下去, 剪了58刀后, 得到1个六十二边形和58个三角形, 取出其中33个三角形, 每个各剪一刀, 又可得到33个四边形和33个三角形, 对这33个四边形, 按上述方法各剪58刀, 便得到33个六十二边形和 33×58 个三角形, 于是共剪了 $58+33+33 \times 58=2005$ (刀), 故选 B.

9. (2021 • 全国 • 九年级竞赛) 若正数 a, b, c 满足不等式
$$\begin{cases} \frac{11}{6}c < a+b < 2c \\ \frac{3}{2}a < b+c < \frac{5}{3}a \\ \frac{5}{2}b < a+c < \frac{11}{4}b \end{cases}$$
 则 a, b, c 的大小关系是 ()

A. $a < b < c$

B. $b < c < a$

C. $c < a < b$

D. 不确定

【答案】B

【解析】

【分析】

【详解】

解 由已知条件及加法的单调性得

$$\begin{cases} \frac{11}{6}c + c < a + b + c < 2c + c \\ \frac{3}{2}a + a < a + b + c < \frac{5}{2}a + a \\ \frac{5}{2}b + b < a + b + c < \frac{11}{4}b + b \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} \frac{17}{6}c < a + b + c < 3c \text{①} \\ \frac{5}{2}a < a + b + c < \frac{8}{3}a \text{②} \\ \frac{7}{2}b < a + b + c < \frac{15}{4}b \text{③} \end{cases}$$

由①, ②得 $\frac{17}{6}c < a + b + c < \frac{8}{3}a = \frac{16}{6}a < \frac{17}{6}a$ (传递性), 所以 $a > c$.

由①, ③得 $\frac{7}{2}b < a + b + c < 3c = \frac{6}{2}c < \frac{7}{2}c$ (传递性), 所以 $b < c$.

可见, a, b, c 的大小关系是 $a > c > b$, 故选 B.

10. (2021 • 全国 • 九年级竞赛) 设 $r \geq 4, a = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}, b = \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r+1}}, c = \frac{1}{r(\sqrt{r} + \sqrt{r+1})}$ 则下列各式一定成立的是 ().

A. $a > b > c$

B. $b > c > a$

C. $c > a > b$

D. $c > b > a$

【答案】D

【解析】

【分析】

【详解】

解: 因 $r \geq 4, \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r+1}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 故

$$a = \left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r+1}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r+1}}\right) < \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r+1}} = b,$$

$$c = \frac{\sqrt{r+1} - \sqrt{r}}{r} > \frac{\sqrt{r+1} - \sqrt{r}}{\sqrt{r+1} \cdot \sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r+1}} = b.$$

所以 $c > b > a$,

故选: D.

二、填空题

11. (2021全国·九年级竞赛) 设 a, b 为正整数, 且 $\frac{2}{3} < \frac{a}{b} < \frac{5}{7}$ 则 b 取最小值时 $a+b=$ _____

【答案】 17

【解析】

【分析】

【详解】

由已知条件得 $3a > 2b, 5b > 7a$. 令 $A=3a-2b, B=5b-7a$, 则 A, B 均为正整数, 解出 $a=5A+2B, b=7A+3B \geq 7+3=10$. 当 $A=1, B=1$ 时等号成立, 故 b 的最小值为 10, 这时 $a=5+2=7$, $a+b=17$. 故应填 17.

12. (2021·全国·九年级竞赛) 已知实数 x, y 满足 $2x-3y=4$ 且 $x \geq 0, y \leq 1$, 则 $x-y$ 的最大值是_____, 最小值是_____

【答案】 $\frac{4}{3}, \frac{5}{2}$

【解析】

【分析】

【详解】

$$0 \leq x = \frac{4+3y}{2} \leq \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}.$$

$$\text{又 } y = \frac{2x-4}{3} \text{ 所以 } x-y = x - \frac{2x-4}{3} = \frac{x+4}{3}.$$

故当 $x=0$ 时, $x-y$ 取最小值 $\frac{4}{3}$; 当 $x=\frac{7}{2}$ 时, $x-y$ 取最大值 $\frac{1}{3}(\frac{7}{2}+4) = \frac{5}{2}$

所以应填 $\frac{4}{3}, \frac{5}{2}$.

13. (2021·全国·九年级竞赛) 已知 $0 \leq a \leq 1$, 且满足 $\left[a + \frac{1}{30}\right] + \left[a + \frac{2}{30}\right] + \cdots + \left[a + \frac{29}{30}\right] = 18$ ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数), 则 $[10a]$ 的值等于_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】

【详解】

因 $0 < a + \frac{1}{30} < a + \frac{2}{30} < \cdots < a + \frac{29}{30} < 2$, 所以 $\left[a + \frac{1}{30}\right], \left[a + \frac{2}{30}\right], \cdots, \left[a + \frac{29}{30}\right]$ 每一个等于 0