

湖南省永州市重点中学 2023-2024 学年高考全国统考预测密卷数学试卷

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚, 将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁, 不要折暴、不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与直线 $\frac{y}{a} - \frac{x}{b} = 1$ 交于 A, B 两点, 焦点 $F(0, -c)$, 其中 c 为半焦距, 若 $\triangle ABF$ 是直角三角形, 则该椭圆的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

2. 将函数 $f(x) = \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x + 1$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 给出下列关于 $g(x)$ 的结论:

- ①它的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{9}$ 对称;
②它的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$;
③它的图象关于点 $(\frac{11\pi}{18}, 1)$ 对称;
④它在 $[\frac{5\pi}{3}, \frac{19\pi}{9}]$ 上单调递增.

其中所有正确结论的编号是 ()

- A. ①② B. ②③ C. ①②④ D. ②③④

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = 2$, 且 a_1, a_3, a_4 成等比数列. 若 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 S_n 的最小值为 ()

- A. -10 B. -14 C. -18 D. -20

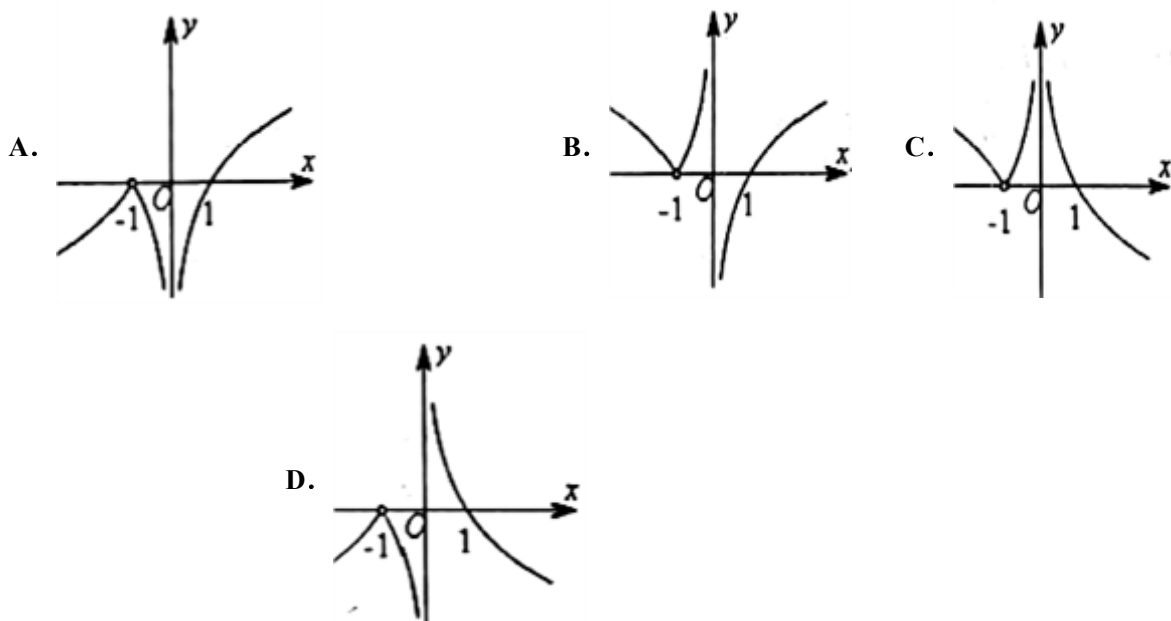
4. $x < 1$ 是 $x + \frac{1}{x} < -2$ 的 () 条件

- A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

5. 已知命题 p : 任意 $x \geq 4$, 都有 $\log_2 x \geq 2$; 命题 q : $a > b$, 则有 $a^2 > b^2$. 则下列命题为真命题的是 ()

- A. $p \wedge q$ B. $p \wedge (\neg q)$ C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ D. $(\neg p) \vee q$

6. 函数 $f(x) = \frac{x+1}{|x+1|} \log_a |x|$ ($0 < a < 1$) 的图象的大致形状是 ()



7. 已知函数 $f(x)$ 满足当 $x \leq 0$ 时, $2f(x-2) = f(x)$, 且当 $x \in (-2, 0]$ 时, $f(x) = |x+1| - 1$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$. 若函数 $f(x)$ 的图象上关于原点对称的点恰好有 3 对, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(625, +\infty)$ B. $(4, 64)$ C. $(9, 625)$ D. $(9, 64)$

8. 已知点 $M(2, 0)$, 点 P 在曲线 $y^2 = 4x$ 上运动, 点 F 为抛物线的焦点, 则 $\frac{|PM|^2}{|PF| - 1}$ 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $2(\sqrt{5} - 1)$ C. $4\sqrt{5}$ D. 4

9. 已知直线 $y = k(x+1) (k > 0)$ 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 相交于 A, B 两点, F 为 C 的焦点, 若 $|FA| = 2|FB|$, 则 $|FA| =$ ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

10. 若复数 z 满足 $(1+i)z = i$ (i 是虚数单位), 则 z 的虚部为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}i$ D. $-\frac{1}{2}i$

11. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax + b$ 的图象在点 $(1, a+b)$ 处的切线方程是 $y = 3x - 2$, 则 $a - b =$ ()

- A. 2 B. 3 C. -2 D. -3

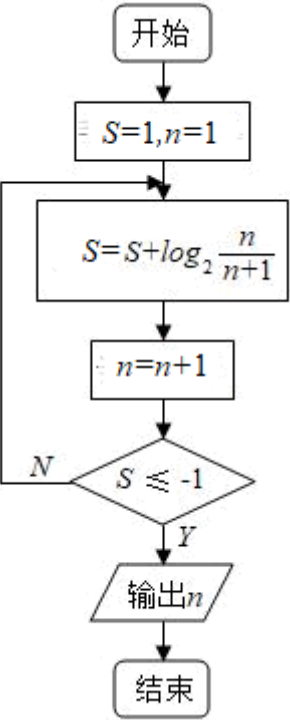
12. 著名的斐波那契数列 $\{a_n\}$: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., 满足 $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, 若

$$a_k = \sum_{n=1}^{2020} a_{2n-1}, \text{ 则 } k = ()$$

- A. 2020 B. 4038 C. 4039 D. 4040

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

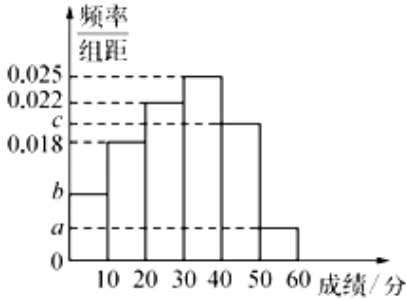
13. 某校为了解学生学习的情况,采用分层抽样的方法从高一 2400 人、高二 2000 人、高三 n 人中,抽取 90 人进行问卷调查.已知高一被抽取的人数为 36,那么高三被抽取的人数为_____.
14. 如图所示的流程图中,输出 n 的值为_____.



15. 圆心在曲线 $y = \frac{k}{x} (x > 0, k > 0)$ 上的圆中,存在与直线 $2x + y + 1 = 0$ 相切且面积为 5π 的圆,则当 k 取最大值时,该圆的标准方程为_____.
16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = 2(a_n + 1)$,则满足 $S_n = -126$ 的正整数 n 的值为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 为调研高中生的作文水平.在某市普通高中的某次联考中,参考的文科生与理科生人数之比为 1:4,且成绩分布在 $[0, 60]$ 的范围内,规定分数在 50 以上(含 50)的作文被评为“优秀作文”,按文理科用分层抽样的方法抽取 400 人的成绩作为样本,得到成绩的频率分布直方图,如图所示.其中 a, b, c 构成以 2 为公比的等比数列.



- (1) 求 a, b, c 的值;
- (2) 填写下面 2×2 列联表,能否在犯错误的概率不超过 0.01 的情况下认为“获得优秀作文”与“学生的文理科”有关?

	文科生	理科生	合计
获奖	6		
不获奖			
合计			400

(3) 将上述调查所得的频率视为概率，现从全市参考学生中，任意抽取 2 名学生，记“获得优秀作文”的学生人数为 X ，求 X 的分布列及数学期望.

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$.

$P(K^2 \geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

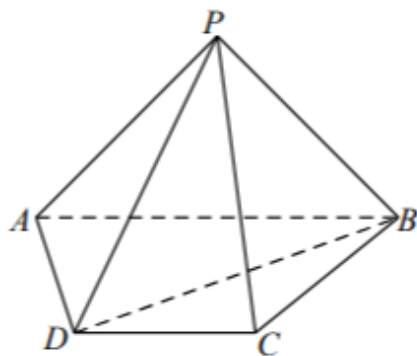
18. (12 分) 某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶 4 元，售价每瓶 6 元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶 2 元的价格当天全部处理完. 根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温 (单位: $^{\circ}\text{C}$) 有关. 如果最高气温不低于 25，需求量为 500 瓶；如果最高气温位于区间 $[20, 25)$ ，需求量为 300 瓶；如果最高气温低于 20，需求量为 200 瓶. 为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得下面的频数分布表：

最高气温	$[10, 15)$	$[15, 20)$	$[20, 25)$	$[25, 30)$	$[30, 35)$	$[35, 40)$
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率估计最高气温位于该区间的概率.

- (1) 求六月份这种酸奶一天的需求量不超过 300 瓶的概率；
- (2) 设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y (单位: 元)，当六月份这种酸奶一天的进货量为 450 瓶时，写出 Y 的所有可能值，并估计 Y 大于零的概率.

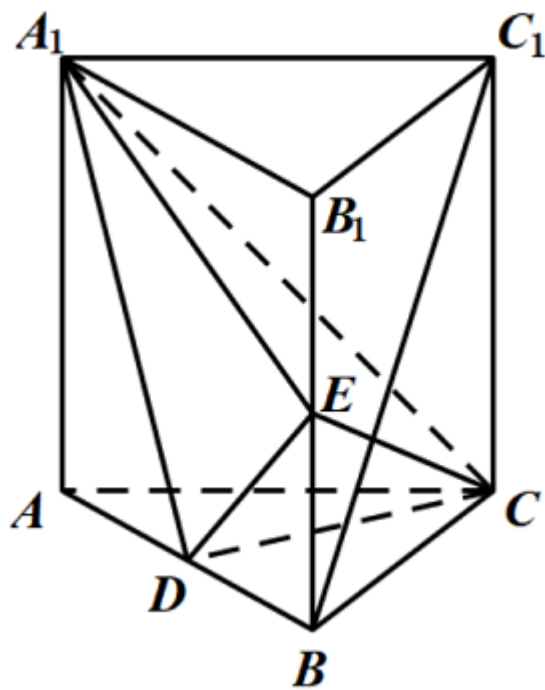
19. (12 分) 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 PAB 为等腰直角三角形， $BC \perp$ 平面 PAB , $PA = PB$, $AB = BC = 2$, $AD = BD = \sqrt{5}$.



(1) 求证: $PA \perp$ 平面 PBC ;

(2) 求直线 PC 与平面 PAD 所成的角的正弦值.

20. (12 分) 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别是 AB, BB_1 的中点, $AA_1 = AC = CB = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \sqrt{2}$.



(1) 证明: $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD ;

(2) 求二面角 $D-A_1C-E$ 的余弦值.

21. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 设 a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, 记 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 且 $2S = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $c = 7$, $\cos B = \frac{4}{5}$, 求 a 的值.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = (ax-1)e^x + ax+1$, 其中 e 为自然对数的底数, $a \in R$.

- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线与直线 $2x - y + 1 = 0$ 平行, 求 a 的值;
- (2) 若 $a = \frac{1}{2}$, 问函数 $f(x)$ 有无极值点? 若有, 请求出极值点的个数; 若没有, 请说明理由.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

联立直线与椭圆方程求出交点 A, B 两点, 利用平面向量垂直的坐标表示得到关于 a, b, c 的关系式, 解方程求解即可.

【详解】

$$\text{联立方程} \begin{cases} \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \\ \frac{y}{a} - \frac{x}{b} = 1 \end{cases}, \text{解方程可得} \begin{cases} x = 0 \\ y = a \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = -b \\ y = 0 \end{cases},$$

不妨设 $A(0, a), B(-b, 0)$, 由题意可知, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$,

因为 $\overrightarrow{BA} = (b, a), \overrightarrow{BF} = (b, -c)$,

由平面向量垂直的坐标表示可得, $b \cdot b - ac = 0$,

因为 $b^2 = a^2 - c^2$, 所以 $a^2 - c^2 = ac$,

两边同时除以 a^2 可得, $e^2 + e - 1 = 0$,

解得 $e = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $e = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (舍去),

所以该椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

故选: A

【点睛】

本题考查椭圆方程及其性质、离心率的求解、平面向量垂直的坐标表示；考查运算求解能力和知识迁移能力；利用平面向量垂直的坐标表示得到关于 a, b, c 的关系式是求解本题的关键；属于中档题、常考题型。

2、B

【解析】

根据函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 图象的平移变换公式求出函数 $g(x)$ 的解析式，再利用正弦函数的对称性、单调区间等相关性质求解即可。

【详解】

因为 $f(x) = \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x + 1 = 2 \sin(3x - \frac{\pi}{3}) + 1$ ，由 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 图象的平移变换公式知，

函数 $g(x) = 2 \sin[3(x + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{3}] + 1 = 2 \sin(3x + \frac{\pi}{6}) + 1$ ，其最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{3}$ ，故②正确；

令 $3x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ，得 $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$ ($k \in \mathbb{Z}$)，所以 $x = \frac{5\pi}{9}$ 不是对称轴，故①错误；

令 $3x + \frac{\pi}{6} = k\pi$ ，得 $x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{18}$ ($k \in \mathbb{Z}$)，取 $k=2$ ，得 $x = \frac{11\pi}{18}$ ，故函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{11\pi}{18}, 1)$ 对称，故③正确；

令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 3x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，得 $\frac{2k\pi}{3} - \frac{2\pi}{9} \leq x \leq \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$ ，取 $k=2$ ，得 $\frac{10\pi}{9} \leq x \leq \frac{13\pi}{9}$ ，取 $k=3$ ，得 $\frac{16\pi}{9} \leq x \leq \frac{19\pi}{9}$ ，故④错误；

故选：B

【点睛】

本题考查 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 图象的平移变换和正弦函数的对称性、单调性和最小正周期等性质；考查运算求解能力和整体代换思想；熟练掌握正弦函数的对称性、单调性和最小正周期等相关性质是求解本题的关键；属于中档题、常考题型

3、D

【解析】

利用等比中项性质可得等差数列的首项，进而求得 S_n ，再利用二次函数的性质，可得当 $n=4$ 或 5 时， S_n 取到最小值。

【详解】

根据题意，可知 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差 $d=2$ ，

由 a_1, a_3, a_4 成等比数列，可得 $a_3^2 = a_1 a_4$ ，

$\therefore (a_1 + 4)^2 = a_1(a_1 + 6)$ ，解得 $a_1 = -8$ 。

$$\therefore S_n = -8n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 - 9n = \left(n - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4}.$$

根据单调性，可知当 $n = 4$ 或 5 时， S_n 取到最小值，最小值为 -20 。

故选：D。

【点睛】

本题考查等差数列通项公式、等比中项性质、等差数列前 n 项和的最值，考查函数与方程思想、转化与化归思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力，求解时注意当 $n = 4$ 或 5 时同时取到最值。

4、B

【解析】

利用充分条件、必要条件与集合包含关系之间的等价关系，即可得出。

【详解】

设 $p: x < 1$ 对应的集合是 $A = (-\infty, 1)$ ，由 $x + \frac{1}{x} < -2$ 解得 $x < 0$ 且 $x \neq -1$

$q: x + \frac{1}{x} < -2$ 对应的集合是 $B = (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ ，所以 $B \cap A$ ，

故 $x < 1$ 是 $x + \frac{1}{x} < -2$ 的必要不充分条件，故选 B。

【点睛】

本题主要考查充分条件、必要条件的判断方法——集合关系法。

设 $A = \{x | x \in p\}$ ， $B = \{x | x \in q\}$ ，

如果 $A \subseteq B$ ，则 p 是 q 的充分条件；如果 $A \cap B$ 则 p 是 q 的充分不必要条件；

如果 $B \subseteq A$ ，则 p 是 q 的必要条件；如果 $B \cap A$ ，则 p 是 q 的必要不充分条件。

5、B

【解析】

先分别判断命题 p, q 真假，再由复合命题的真假性，即可得出结论。

【详解】

p 为真命题；命题 q 是假命题，比如当 $0 > a > b$ ，

或 $a=1, b=-2$ 时，则 $a^2 > b^2$ 不成立。

则 $p \wedge q, (\neg p) \wedge (\neg q), (\neg p) \vee q$ 均为假。

故选：B

【点睛】

本题考查复合命题的真假性，判断简单命题的真假是解题的关键，属于基础题。

6、C

【解析】

对 x 分类讨论, 去掉绝对值, 即可作出图象.

【详解】

$$f(x) = \frac{x+1}{|x+1|} \log_a |x| = \begin{cases} -\log_a(-x), & x < -1, \\ \log_a(-x), & -1 < x < 0, \\ \log_a x, & x > 0. \end{cases}$$

故选 C.

【点睛】

识图常用的方法

- (1)定性分析法: 通过对问题进行定性的分析, 从而得出图象的上升(或下降)的趋势, 利用这一特征分析解决问题;
- (2)定量计算法: 通过定量的计算来分析解决问题;
- (3)函数模型法: 由所提供的图象特征, 联想相关函数模型, 利用这一函数模型来分析解决问题.

7、C

【解析】

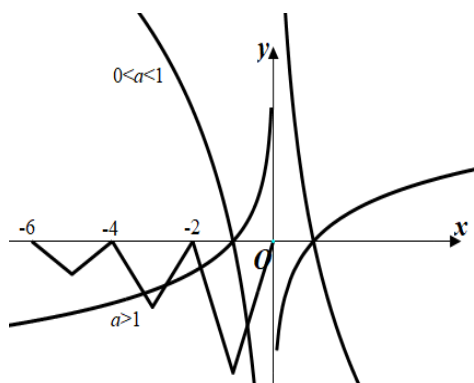
先作出函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的部分图象, 再作出 $f(x) = \log_a x$ 关于原点对称的图象, 分类利用图像列出有 3 个交点时满足的条件, 解之即可.

【详解】

先作出函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的部分图象, 再作出 $f(x) = \log_a x$ 关于原点对称的图象,

如图所示, 当 $0 < a < 1$ 时, 对称后的图象不可能与 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 的图象有 3 个交点;

当 $a > 1$ 时, 要使函数 $f(x)$ 关于原点对称后的图象与所作的图象有 3 个交点,



$$\text{则} \begin{cases} a > 1 \\ -\log_a 3 > -\frac{1}{2}, \\ -\log_a 5 < -\frac{1}{4} \end{cases}, \text{解得 } 9 < a < 625.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查利用函数图象解决函数的交点个数问题，考查学生数形结合的思想、转化与化归的思想，是一道中档题.

8、D

【解析】

如图所示：过点 P 作 PN 垂直准线于 N ，交 y 轴于 Q ，则 $|PF|-1=|PN|-1=|PQ|$ ，设 $P(x,y)$ ， $x>0$ ，则

$$\frac{|PM|^2}{|PF|-1} = x + \frac{4}{x}, \text{ 利用均值不等式得到答案.}$$

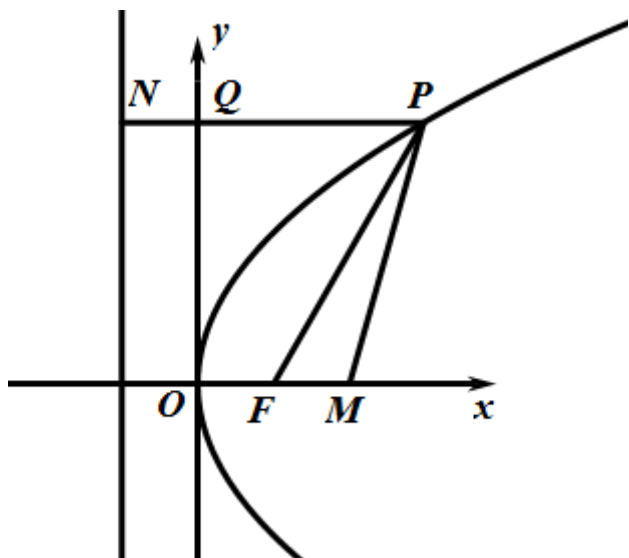
【详解】

如图所示：过点 P 作 PN 垂直准线于 N ，交 y 轴于 Q ，则 $|PF|-1=|PN|-1=|PQ|$ ，

$$\text{设 } P(x,y), x>0, \text{ 则 } \frac{|PM|^2}{|PF|-1} = \frac{|PM|^2}{|PQ|} = \frac{(x-2)^2 + y^2}{x} = \frac{(x-2)^2 + 4x}{x} = x + \frac{4}{x} \geq 4,$$

当 $x = \frac{4}{x}$ ，即 $x=2$ 时等号成立.

故选：D.



【点睛】

本题考查了抛物线中距离的最值问题，意在考查学生的计算能力和转化能力.

9、C

【解析】

方法一：设 $P(-1,0)$ ，利用抛物线的定义判断出 B 是 AP 的中点，结合等腰三角形的性质求得 B 点的横坐标，根据抛物线的定义求得 $|FB|$ ，进而求得 $|FA|$ 。

方法二：设出 A, B 两点的横坐标 x_A, x_B ，由抛物线的定义，结合 $|FA|=2|FB|$ 求得 x_A, x_B 的关系式，联立直线

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/536014213035010122>