

专题突破之一

斐波那契数列

意大利数学家斐波那契于1202年在他的著作《算盘书》中，从兔子的繁殖问题得到一个数列：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ……，这个数列称为斐波那契数列，也称兔子数列。斐波那契数列中的任意一个数叫斐波那契数。

人们研究发现，斐波那契数在自然界中广泛存在。比如大多数植物的花瓣数、向日葵花盘内葵花籽排列的螺线数就是斐波那契数；松果、蜂巢、菠萝、蜻蜓翅膀、蜻蜓眼睛的构造与斐波那契数列紧密相连。

数学中黄金分割、黄金矩形、杨辉三角、等角螺旋、斐波拉契弧线、质数数量、十二平均律、尾数循环等问题也都与斐波那契数列紧密相关。

【数列表示】

1. 逐项罗列：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ……

2. 递推公式： $a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3)$

3. 通项公式： $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$

【常考性质】

性质1. 前 n 项和： $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_{n+2} - 1$

性质2. 奇数项和： $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = a_{2n}$

偶数项和： $a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$

性质3. 平方性质： $a_n^2 = a_n a_{n+1} - a_n a_{n-1}$

平方和性质： $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$

性质4. 中项性质： $a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ ； $3a_n = a_{n-2} + a_{n+2}$

性质5. 余数列周期性：

被2除的余数列周期为3：1, 1, 0, ……

被3除的余数列周期为8：1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, ……

被4除的余数列周期为6：1, 1, 2, 3, 1, 0, ……

性质6. 斐波那契不等式： $\frac{n}{n-1} < \log_{a_n} a_{n+1} < \frac{n-1}{n-2}$

性质7. 质数数量：

每3个连续的数中有且只有1个能被2整除；

每4个连续的数中有且只有1个能被3整除；

每5个连续的数中有且只有1个能被5整除；

每6个连续的数中有且只有1个能被8整除；

每7个连续的数中有且只有1个能被13整除；

……

性质8. 两倍数关系： $\frac{a_{2n}}{a_n} = a_{n-1} + a_{n+1}$

性质 9. 下标为 3 的倍数的项之和: $a_3 + a_6 + \cdots + a_{3n} = \frac{1}{2}(a_{3n+2} - 1)$

性质 10. $\left\{a_{n+1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}a_n\right\}$ 是等比数列

【两个重要关联】

1. 杨辉三角

将杨辉三角左对齐, 成如图所示排列, 将同一斜行的数加起来, 即得 $1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$,

则 $a_n = C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + \cdots + C_{n-1-m}^m (n-1 \geq m)$, 表示如下:

$$a_1 = C_0^0 = 1$$

$$a_2 = C_1^0 = 1$$

$$a_3 = C_2^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = C_3^0 + C_2^1 = 1 + 2 = 3$$

$$a_5 = C_4^0 + C_3^1 + C_2^2 = 1 + 3 + 1 = 5$$

$$a_6 = C_5^0 + C_4^1 + C_3^2 = 1 + 4 + 3 = 8$$

$$a_7 = C_6^0 + C_5^1 + C_4^2 + C_3^3 = 1 + 5 + 6 + 1 = 13$$

.....

$$a_n = C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + \cdots + C_{n-1-m}^m (n-1 \geq m)$$

		1	1	2	3	5	8	13	21
1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		

2. 计数问题

问题: 有一段楼梯有 10 级台阶, 规定每一步只能跨一级或两级, 要等上第 10 级台阶有几种走法?

分析: 设第 n 级台阶有 a_n 种走法, 则 $a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3)$, 数列 $\{a_n\}$ 就是斐波那契数列, 故有 $a_{10} = 89$ 种走法.

【训练题组】

一、单选题

- (2023·上海市市辖区·单元测试) 著名的波那契列 $\{a_n\}: 1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$, 满足 $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \in N^*)$, 那么 $1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + \cdots + a_{2021}$ 是斐波那契数列中的 ()
A. 第 2020 项 B. 第 2021 项 C. 第 2022 项 D. 第 2023 项
- (2023·北京市市辖区·期末考试) 斐波那契数列 $\{F_n\} (n \in N^*)$ 在很多领域都有广泛应用, 它是由如下递推公式给出的: $F_1 = F_2 = 1$, 当 $n > 2$ 时, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. 若 $F_{100} = \frac{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_m^2}{F_m}$, 则 $m =$ ()
A. 98 B. 99 C. 100 D. 101
- (2023·河南省鹤壁市·单元测试) 意大利数学家斐波那契在他的《算盘全书》中提出了一个关于兔子繁殖的问题: 如果一对兔子每月能生 1 对小兔子 (一雄一雌), 而每 1 对小兔子在它出生后的第三个月里, 又能生 1 对小兔子, 假定在不发生死亡的情况下, 从第 1 个月 1 对初生的小兔子开始, 以后每个月的兔子总对数是: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$, 这就是著名的斐波那契数列, 它的递推公式是 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3, n \in N^*)$, 其中 $a_1 = 1, a_2 = 1$. 若从该数列的前 2021 项中随机地抽取一个数, 则这个数是偶数的概率为 ()
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{673}{2021}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{674}{2021}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/536115202025010125>