知识点60 等比数列基本量的计算（P3-13）

01

知识点60 等比数列基本量的计算

教材知识萃取

已知等比数列$\{a_n\}$的首项是a_1,公比是q,则

通项公式	$a_n=a_1q^{n-1}$,可推广为$a_n=a_mq^{n-m}(n,m\in\mathbf{N}^*)$.

注意 （1）等比数列中的任何一项都不为0，且公比 $q\neq 0$；

（2）若一个数列是常数列，则此数列一定是等差数列，但不一定是等比数列，如：$0,0,0,\cdots$

说明 当 $q>0$且 $q\neq 1$时，$a_n=\frac{a_1}{q}\cdot q^n$可以看成函数 $y=cq^x$，其表示一个不为0的常数与指数函数的乘积.

（3）对于 $q\neq 1$的等比数列$\{a_n\}$的前 n项和 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{\ }=-\frac{a_1}{\ }q^n+\frac{a_1}{\ }$，若设 $a=\frac{a_1}{\ }$，则 $S_n=$

教材知识萃取

已知等比数列$\{a_n\}$的首项是a_1,公比是q,则

前n项和公式	No Image

说明 对于 $q\neq 1$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=-\frac{a_1}{1-q}q^n+\frac{a_1}{1-q}$，若设 $a=\frac{a_1}{1-q}$，则 $S_n=-aq^n+a$ $(a\neq 0, q\neq 0, q\neq 1)$，由此可知，数列 $\{S_n\}$ 的图象是函数 $y=-aq^x+a$ 的图象上一系列孤立的点.

对于 $q=1$ 的等比数列，因为 $a_1\neq 0$，所以 $S_n=na_1$，由此可知，数列 $\{S_n\}$ 的图象是函数 $y=a_1x$ 的图象上一系列孤立的点.

注意 在运用等比数列的前 n 项和公式时，要注意对 $q=1$ 与 $q\neq 1$ 进行讨论.

教材素材变式

1.[人A选必二P40习题4.3第1（2）题变式，2022全国乙卷（理）]已知等比数列$\{a_n\}$的前3项和为168，$a_2-a_5=4$
则$a_6=$(D)

A.14 B.12 C.6 D.3

【解析】 **解法一** 设等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比为q，由题意可得$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=168,\\ a_2-a_5=42,\end{cases}$即$\begin{cases}a_1(1+q+q^2)=168,\\ a_1q(1-q^3)=42,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=96,\\ q=\frac{1}{2},\end{cases}$所以$a_6=a_1q^5=3$，故选D.

解法二 设等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比为q,由题意可得$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=168,\\ a_2-a_5=42,\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=168,\\ a_1q(1-q^3)=42,\end{cases}$解得

$\begin{cases}a_1=96,\\ q=\frac{1}{2},\end{cases}$所以$a_6=a_1q^5=3$，故选D.

2.[人A选必二P37练习第1（3）题变式,2023全国甲卷（理）]设等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，前n项和为S_n,若$a_1=1$，$S_5=5S_3-4$，则$S_4=$(　C)

A.$\frac{15}{8}$　　B.$\frac{65}{8}$　　C.15　　D.40

【解析】通解（直接运用等比数列的通项公式与前n项和公式求解） 若该数列的公比$q=1$，代入$S_5=5S_3-4$中，有$5=5\times3-4$，不成立，所以$q\neq1$.由$\frac{1-q^5}{1-q}=5\times\frac{1-q^3}{1-q}-4$，化简得$q^4-5q^2+4=0$,所以$q^2=1$（舍）或$q^2=4$,由于此数列各项均为正数，所以$q=2$，（题眼）所以$S_4=\frac{1-q^4}{1-q}=15$.故选C.

优解（直接求和法） 由已知得$1+q+q^2+q^3+q^4=5(1+q+q^2)-4$,整理得$(1+q)(q^3-4q)=0$,由于此数列各项均为正数，所以$q=2$，所以$S_4=1+q+q^2+q^3=1+2+4+8=15$.故选C.

3. [人A选必二P41习题4.3第5题变式] 等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知S_1，$2S_2$，$3S_3$成等差数列，则$\{a_n\}$的公比为(D)

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{4}$　　C.3　　D.$\frac{1}{3}$

【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，因为S_1，$2S_2$，$3S_3$成等差数列，所以$S_1+3S_3=2\times 2S_2$，所以$4a_1+3a_2+3a_3=4a_1+4a_2$，即$3a_3=a_2$，所以$q=\frac{a_3}{a_2}=\frac{1}{3}$. 故选D.

02

方法技巧

涉及的求和的下标较小时，可以先列项化简，再求解.

4. [人B选必三P33例4变式] 朱载堉$(1536\sim1611)$是中国明代一位杰出的音乐家、律学家和历学家，他的著作《律学新说》中制成了最早的“十二平均律”．十二平均律是目前世界上通用的一组音（八度）分成十二个半音音程的律制，各相邻两律之间的频率之比完全相等，亦称“十二等程律”．即一个八度十三个音，相邻两个音之间的频率之比相等，且最后一个音是最初那个音的频率的2倍．设第三个音的频率为f_1，第七个音的频率为f_2，则$\frac{f_2}{f_1}=$(**D**)

A.$4\sqrt[12]{2}$　　B.$\sqrt[11]{16}$　　C.$\sqrt[8]{2}$　　D.$\sqrt[3]{2}$

【解析】依题意，十三个音的频率依次成等比数列，记为$\{a_n\}$，设公比为q，则$a_{13}=a_1q^{12}$，又$a_{13}=2a_1$，

$\therefore q=2^{\frac{1}{12}}$，$\therefore \frac{f_2}{f_1}=\frac{a_7}{a_3}=q^4=\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^4=\sqrt[3]{2}$．故选D．

变式1 **改变表达式形式**设等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_3=10, a_2+a_4=5$，则$a_1a_2\cdots a_n$的最大值为(　　)A

A.64　　B.128　　C.256　　D.512

【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，由$a_1+a_3=10, a_2+a_4=5$,得$\begin{cases}a_1+a_1q^2=10,\\ a_1q+a_1q^3=5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=8,\\ q=\frac{1}{2},\end{cases}$

（【另解】由$q=\frac{a_2+a_4}{a_1+a_3}=\frac{1}{2}$，可直接求出公比）所以$a_n=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}(n\in\mathbf{N}^*)$．令$a_n\geq 1$，即$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}\geq 1$，

得$1\leq n\leq 4$，且$a_4=1$，故当$n=3$或4时，$a_1a_2\cdots a_n$取得最大值，故

$(a_1a_2\cdots a_n)_{\max}=a_1a_2a_3=a_1a_2a_3a_4=8\times 4\times 2\times 1=64$，故选A．

变式2 **一般性**设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，前n项和为S_n.若$q > 1$，$a_m + a_{m+2} = \frac{5}{2}a_{m+1}$，且$S_{2m} = 9S_m$，$m \in \mathrm{N}^*$，则$m$的值为(　**B**)

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

【解析】易知$a_n \neq 0$，因为$a_m + a_{m+2} = \frac{5}{2}a_{m+1}$，所以$a_m + a_m q^2 = \frac{5}{2}a_m q$，即$q^2 - \frac{5}{2}q + 1 = 0$，又$q > 1$，所以$q = 2$.由$S_{2m} = 9S_m$，得$\frac{a_1(1-2^{2m})}{1-2} = 9 \times \frac{a_1(1-2^m)}{1-2}$，又$a_1 \neq 0$，所以$1 - 2^{2m} = 9(1 - 2^m)$，即$(1 - 2^m)(1 + 2^m) = 9(1 - 2^m)$,因为$m \in \mathbf{N}^*$，所以$1 - 2^m \neq 0$，所以$1 + 2^m = 9$，解得$m = 3$，故选B．

变式3 **变条件**已知等比数列$\{a_n\}$的各项满足$a_{n+1} > a_n$，$a_2 = 3$，且$3a_2$，$2a_3$，a_4成等差数列.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

【答案】设$\{a_n\}$的公比为q，由于$3a_2$，$2a_3$，a_4成等差数列，所以$3a_2 + a_4 = 4a_3$，即$3a_2 + a_2q^2 = 4a_2q$，化简可得$q^2 - 4q + 3 = 0$.

由$a_{n+1} > a_n$知，数列$\{a_n\}$为递增数列，

所以$q = 3$，

所以$a_n = a_2q^{n-2} = 3^{n-1}$.

（2）求数列$\{a_n + n\}$的前n项和.

【答案】设数列$\{a_n + n\}$的前n项和为S_n，

则$S_n = (3^0 + 1) + (3^1 + 2) + (3^2 + 3) + \cdots + (3^{n-1} + n)$

$= (3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}) + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$

$= \frac{1\times(1-3^n)}{1-3} + \frac{n(1+n)}{2}$

$= \frac{3^n+n^2+n-1}{2}$.

03

知识点61 等比数列的判定与证明

教材知识萃取

定义法	若$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(n\in\mathbf{N}^*,q\neq0)$或$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q(n\geq2,n\in\mathbf{N}^*,q\neq0)$,则$\{a_n\}$是等比数列.
等比中项法	若数列$\{a_n\}$中,$a_n\neq0$且$a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$,则$\{a_n\}$是等比数列.
通项公式法	若数列$\{a_n\}$的通项公式可写成$a_n=c\cdot q^{n-1}(c\neq0,q\neq0,n\in\mathbf{N}^*)$,则$\{a_n\}$是等比数列.
前n项和公式法	若数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=k\cdot q^n-k$(k为常数且$k\neq0,q\neq0,1$),则$\{a_n\}$是等比数列.

注意

(1)由$a_{n+1}=qa_n,q\neq0$,并不能断言$\{a_n\}$为等比数列,还需要验证$a_1\neq0$;(2)证明一个数列$\{a_n\}$不是等比数列,只需要证明存在一个正整数m,使得$a_{m+1}^2\neq a_m\cdot a_{m+2}$即可.

教材素材变式

1. [人A选必二P32例5变式] 如果数列$\{a_n\}$是等比数列，那么(**C**)

A.数列$\{\lg a_n\}$是等比数列　B.数列$\{2^{a_n}\}$是等比数列　C.数列$\{a_n^2\}$是等比数列　D.数列$\{na_n\}$是等比数列

【解析】对于C，设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$，所以$\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2}=\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2=q^2$，为非零常数，则数列$\{a_n^2\}$是等比数列，故C正确.

对于A，B，D，取$a_n=2^{n-1}$，则$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^n}{2^{n-1}}=2$，数列$\{a_n\}$是等比数列.$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$，故$\lg a_1=0$，$\lg a_2=\lg 2$，$\lg a_3=\lg 4$，显然$(\lg a_2)^2\neq \lg a_1\cdot \lg a_3$，故数列$\{\lg a_n\}$不是等比数列，故A错误；$2^{a_1}=2$，$2^{a_2}=4$，$2^{a_3}=16$，显然$(2^{a_2})^2\neq 2^{a_1}\cdot 2^{a_3}$，所以数列$\{2^{a_n}\}$不是等比数列，故B错误；$a_1=1$，$2a_2=4$，$3a_3=12$，则$(2a_2)^2\neq a_1\times 3a_3$，所以数列$\{na_n\}$不是等比数列，故D错误.故选C.