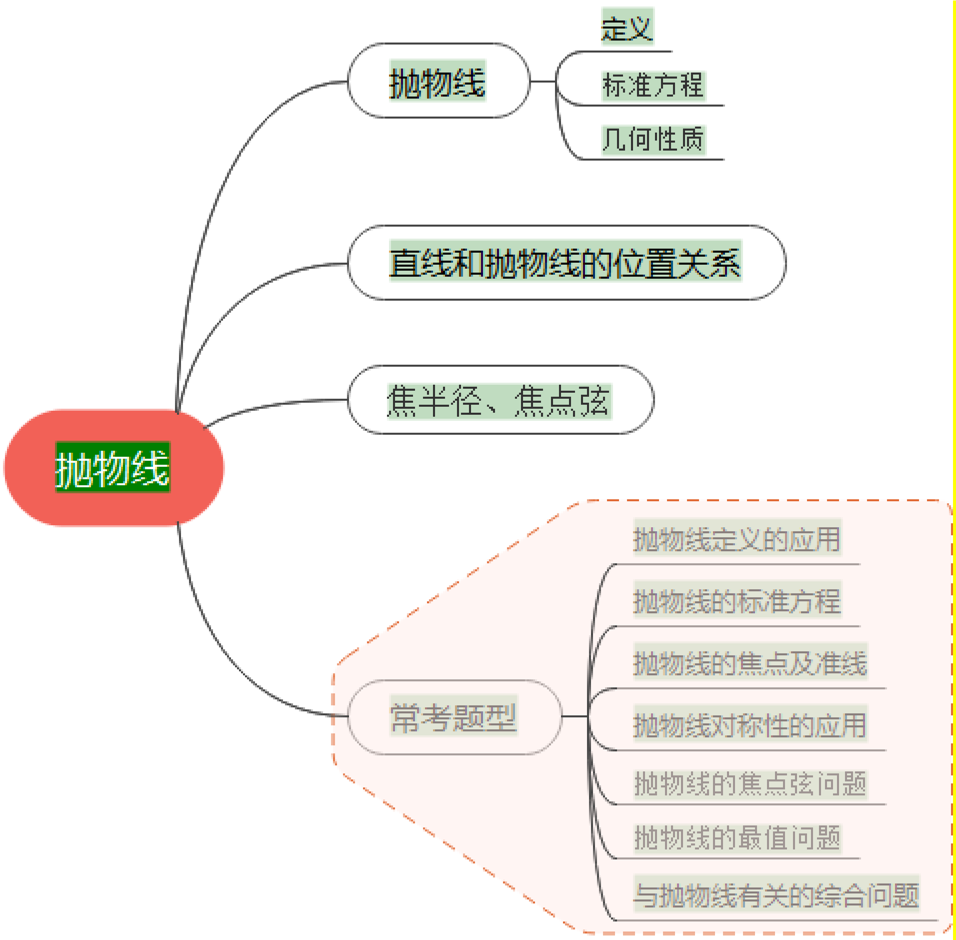
专题 9.5　抛物线（知识点讲解）

【知识框架】



【核心素养】

1. 考查抛物线的定义、求抛物线方程、最值等问题，凸显直观想象、数学运算的核心素养.

2. 结合抛物线的几何性质及几何图形，求抛物线相关性质及其应用，凸显数学运算、直观想象的核心素养.

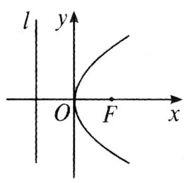
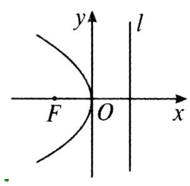
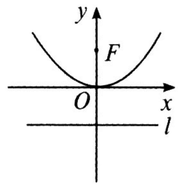
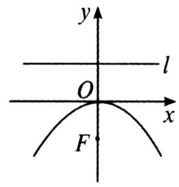
3. 考查直线与抛物线的位置关系，凸显逻辑推理、数学运算、数学应用的核心素养.

【知识点展示】

（一）抛物线的定义

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l（l 不经过点 F）的距离相等的点的轨迹叫做抛物线，定点 F 叫做抛物线的焦点，定直线 l 叫做抛物线的准线.

（二）抛物线的标准方程及几何性质

图形				
标准方程	$y^2=2px$（$p>0$）	$y^2=-2px$（$p>0$）	$x^2=2py$（$p>0$）	$x^2=-2py$（$p>0$）
顶点	O（0，0）			
范围	$x\geqslant0$， $y\in R$	$x\leqslant0$， $y\in R$	$y\geqslant0$， $x\in R$	$y\leqslant0$， $x\in R$
对称轴	x 轴		y 轴	
焦点	$F\left(\frac{p}{2},0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$
离心率	e=1			
准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
焦半径	$\lvert MF\rvert=x_0+\frac{p}{2}$	$\lvert MF\rvert=\frac{p}{2}-x_0$	$\lvert MF\rvert=y_0+\frac{p}{2}$	$\lvert MF\rvert=\frac{p}{2}-y_0$

（三）直线和抛物线的位置关系

（1）将直线的方程 $y=kx+m$ 与抛物线的方程 $y^2=2px$（$p>0$）联立成方程组，消元转化为关于 x 或 y 的一元二次方程，其判别式为 Δ.

$ky^2-2py+2pm=0$ 若 $k=0$，直线与抛物线的对称轴平行或重合，直线与抛物线相交于一点；

若 $k\neq0$

①Δ>0 ⇔ 直线和抛物线相交，有两个交点；

②Δ=0 ⇔ 直线和抛物线相切，有一个公共点；

③Δ<0 ⇔ 直线和抛物线相离，无公共点.

（2）直线与抛物线的相交弦

设直线 $y=kx+m$ 交抛物线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 于点 $P_1(x_1,y_1)$ ，$P_2(x_2,y_2)$，两点，则

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2[1+(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2})^2]}=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$$ 同理可得

$$|P_1P_2|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|y_1-y_2|\ \ (k\neq0)$$ [来源:Z*xx*k.Com]

这里$|x_1-x_2|, |y_1-y_2|$,的求法通常使用韦达定理，需作以下变形：

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$ $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$ **（四）焦半径、焦点弦**

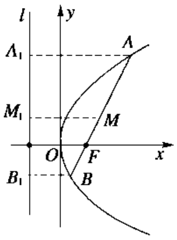
1.通径

过焦点垂直于轴的弦称为抛物线的通径，其长为__$2p$__.

2．焦半径

抛物线上一点与焦点 F 连接的线段叫做焦半径，设抛物线上任一点 $A(x_0，y_0)$，则四种标准方程形式下的焦半径公式为

标准方程	$y^2=2px$ ($p>0$)	$y^2=-2px$ ($p>0$)	$x^2=2py$ ($p>0$)	$x^2=-2py$ ($p>0$)
焦半径$\|AF\|$	$\|AF\|=$__$x_0+\frac{p}{2}$__	$\|AF\|=$__$\frac{p}{2}-x_0$__	$\|AF\|=$__$y_0+\frac{p}{2}$__	$\|AF\|=$__$\frac{p}{2}-y_0$__



3．焦点弦问题

如图所示：AB 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$过焦点 F 的一条弦，设 $A(x_1，y_1)$、$B(x_2，y_2)$，AB 的中点 $M(x_0，y_0)$，抛物线的准线为 l.

(1)以 AB 为直径的圆必与准线 l__相切__；

(2)$|AB|=2(x_0+\frac{p}{2})=x_1+x_2+$__$p$__；

(3)A、B 两点的横坐标之积、纵坐标之积为定值，即 $x_1\cdot x_2=\frac{p^2}{4}$，$y_1\cdot y_2=-p^2$.

【常考题型剖析】

题型一：抛物线定义的应用

例 1.（2023·全国·高三专题练习（文））已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为$F\left(\frac{1}{4},0\right)$，$A(x_0,y_0)$是 C 上一点，$|AF|=\frac{5}{4}x_0$，则$x_0=$（　　）

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

例 2.（2020·全国·高考真题（理））已知 A 为抛物线 $C:y^2=2px$（$p>0$）上一点，点 A 到 C 的焦点的距离为 12，到 y 轴的距离为 9，则 $p=$（　　）

A．2　　B．3　　C．6　　D．9

【总结提升】

1．涉及抛物线几何性质的问题常结合图形思考，通过图形可以直观地看出抛物线的顶点、对称轴、开口方向等几何特征，体现了数形结合思想解题的直观性．

2. 抛物线上的点到焦点距离等于到准线距离，注意转化思想的运用．

3.利用抛物线定义可以解决距离的最大和最小问题，该类问题一般情况下都与抛物线的定义有关．实现由点到点的距离与点到直线的距离的转化．

(1)将抛物线上的点到准线的距离转化为该点到焦点的距离，构造出“两点之间线段最短”，使问题得解．

(2)将抛物线上的点到焦点的距离转化为到准线的距离，利用“与直线上所有点的连线中垂线段最短”原理解决．

提醒：利用抛物线定义进行距离转化的同时，要注意平面几何知识在其中的重大运用．

题型二：抛物线的标准方程

例 3.（2021·全国高二课时练习）已知动圆 M 经过点 $A(3，0)$，且与直线 l：$x=-3$ 相切，则动圆圆心 M 的轨迹方程为（　　）

A．$y^2=12x$　　　　B．$y^2=-12x$

C．$x^2=12y$　　　　D．$x^2=12y$

例 4.（2023·全国·高三专题练习）过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的直线交抛物线于点 A，B，交其准线于点 C，若 $\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BF},|AF|=3$，则此抛物线方程为__________.

【规律方法】

1. 求抛物线标准方程的方法：

①直接法：直接利用题中已知条件确定焦参数 p．

②待定系数法：先设出抛物线的方程，再根据题中条件，确定焦参数 p. 当焦点位置不确定时，应分类讨论或设抛物线方程为 $y^2=mx$ 或 $x^2=my$．

2．求抛物线方程应注意的问题

(1) 当坐标系已建立时，应根据条件确定抛物线方程属于四种类型中的哪一种；已知焦点坐标或准线方程可确定抛物线标准方程的形式；已知抛物线过某点不能确定抛物线标准方程的形式，需根据四种抛物线的图象及开口方向确定．

(2) 要注意把握抛物线的顶点、对称轴、开口方向与方程之间的对应关系；

(3) 要注意参数 p 的几何意义是焦点到准线的距离，利用它的几何意义来解决问题．

题型三：抛物线的焦点及准线

例 5.（2023·全国·高三专题练习）抛物线 $y=\frac{4}{3}x^2$ 的焦点坐标为（　　）

A. $\left(0,\frac{1}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{3},0\right)$　　C. $\left(0,\frac{3}{16}\right)$　　D. $\left(0,\frac{2}{3}\right)$

例 6.（2020 • 全国高考真题（文））设 O 为坐标原点，直线 $x=2$ 与抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 交于 D，E 两点，若 $OD\perp OE$，则 C 的焦点坐标为（　　）

A. $\left(\frac{1}{4},0\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},0\right)$　　C. $(1,0)$　　D. $(2,0)$

例 7.（2021·全国高考真题）已知 O 为坐标原点，抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，P 为 C 上一点，PF 与 x 轴垂直，Q 为 x 轴上一点，且 $PQ\perp OP$，若 $|FQ|=6$，则 C 的准线方程为______.

【规律总结】

求抛物线的焦点及准线方程的步骤：

(1)把抛物线解析式化为标准方程形式；

(2)明确抛物线开口方向；

(3)求出抛物线标准方程中参数 p 的值；

(4)写出抛物线的焦点坐标或准线方程.

题型四　抛物线对称性的应用

例 8.（2021·全国高二课时练习）已知 A，B 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 两点，O 为坐标原点．若 $|OA|=|OB|$，且 $\triangle AOB$ 的垂心恰是此抛物线的焦点，则直线 AB 的方程为________.

例 9.（2023·全国·高三专题练习）已知抛物线 $C:y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点为 F，O 为坐标原点.

(1)过 F 作垂直于 x 轴的直线与抛物线 C 交于 A,B 两点，$\triangle AOB$ 的面积为 2．求抛物线 C 的标准方程；

(2)抛物线上有 M,N 两点，若 $\triangle MON$ 为正三角形，求 $\triangle MON$ 的边长.

【总结提升】

1.为了简化解题过程，有时可根据抛物线方程的特征利用参数表示抛物线上动点的坐标，有时还可以利用抛物线的对称性避免分类讨论．2．不能把抛物线看作是双曲线的一支．虽然两者都是沿开口方向越来越远离对称轴，但抛物线却越来越接近于对称轴的平行线.

题型五　抛物线的焦点弦问题

例 10.（2020 • 山东海南省高考真题）斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线过抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，且与 C 交于 A，B 两点，则 $|AB|=$________.

例 11.（2018·全国·高考真题（理））已知点 $M(-1,1)$ 和抛物线 C: $y^2=4x$，过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A， B 两点．若 $\angle AMB=90°$，则 $k=$________.

【总结提升】

解决抛物线的焦点弦问题时，要注意抛物线定义在其中的应用，通过定义将焦点弦长度转化为端点的坐标问题，从而可借助根与系数的关系进行求解.

题型六　抛物线的最值问题

例 12.（2022·云南民族大学附属中学模拟预测（理））已知点 P 为抛物线 $y^2=-4x$ 上的动点，设点 P 到 $l_2: x=1$ 的距离为 d_1，到直线 $x+y-4=0$ 的距离为 d_2，则 d_1+d_2 的最小值是（　　）

A．$\frac{5}{2}$　　B．$\frac{5\sqrt{2}}{2}$　　C．2　　D．$\sqrt{2}$

例 13.（2023·全国·高三专题练习）已知以 F 为焦点的抛物线 $C: y^2=4x$ 上的两点 A，B，满足 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}\left(\frac{1}{3}\le\lambda\le 3\right)$，则弦 AB 的中点到 C 的准线的距离的最大值是（　　）

A．2　　B．$\frac{8}{3}$　　C．$\frac{10}{3}$　　D．4

例 14.【多选题】(2022·全国·高三专题练习）设抛物线 $C: x^2=8y$ 的焦点为 F，准线为 l，$P(x_0, y_0)$ 为 C 上一动点，$A(2,1)$，则下列结论正确的是（　　）

A．当 $x_0=2$ 时，抛物线 C 在点 P 处的切线方程为 $x-2y-2=0$　　B．当 $x_0=4$ 时，$|PF|$ 的值为 6

C．$|PA|+|PF|$ 的最小值为 3　　D．$|PA|-|PF|$ 的最大值为 $\sqrt{5}$

【规律方法】

1. 求抛物线最值的常见题型是求抛物线上一点到定点距离的最值、求抛物线上一点到定直线距离的最值，解有关抛物线的最值问题主要有两种思路：一是利用抛物线的定义，进行到焦点的距离与准线的距离的转化，数形结合，利用几何意义解决；二是利用抛物线的标准方程，进行消元代换，得到有关距离的含变量的代数式，用目标函数最值的求法解决．2. 常见题型及处理方法：

(1)求抛物线上一点到定直线的最小距离．可以利用点到直线的距离公式表示出所求的距离，再利用函数求最值的方法求解，亦可转化为抛物线的切线与定直线平行时两直线间的距离问题.

(2)求抛物线上一点到定点的最值问题．可以利用两点间的距离公式表示出所求距离，再利用函数求最值的方法求解，要注意抛物线上点的设法及变量的取值范围.

(3)方法：设 $P(x_0，y_0)$ 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上一点，则 $x_0=\frac{y_0^2}{2p}$，即 $P(\frac{y_0^2}{2p}，y_0)$．由两点间距离公式，点到直线的距离公式表示出所求距离，再用函数求最值的方法求解.

(4)此类问题应注意抛物线几何性质的应用，尤其范围的应用．如：$y^2=2px(p>0)$，则 $x\geqslant0$，$y^2\geqslant0$．

题型七：与抛物线有关的综合问题

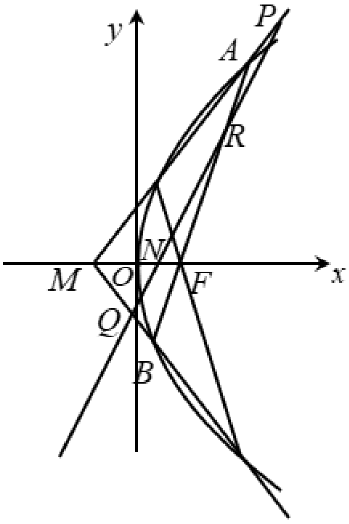
例 15.（2022·天津·高考真题）已知抛物线 $y^2=4\sqrt{5}x, F_1, F_2$ 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，抛物线的准线过双曲线的左焦点 F_1，与双曲线的渐近线交于点 A，若 $\angle F_1F_2A=\frac{\pi}{4}$，则双曲线的标准方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{10}-y^2=1$　　B．$x^2-\frac{y^2}{16}=1$

C．$x^2-\frac{y^2}{4}=1$　　D．$\frac{x^2}{4}-y^2=1$

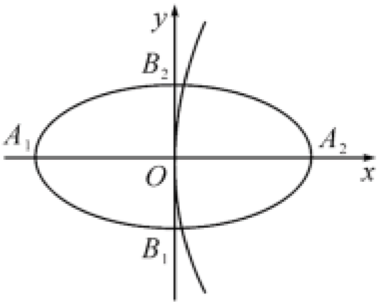
例 16.（2019·北京·高考真题（文））设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l.则以 F 为圆心，且与 l 相切的圆的方程为__________.

例 17. （2021·浙江·高考真题）如图，已知 F 是抛物线 $y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点，M 是抛物线的准线与 x 轴的交点，且 $\left|MF\right|=2$，



（1）求抛物线的方程;（2）设过点 F 的直线交抛物线与 A、B 两点，斜率为 2 的直线 l 与直线 MA, MB, AB，x 轴依次交于点 P，Q，R，N，且 $\left|RN\right|^2=\left|PN\right|\cdot\left|QN\right|$，求直线 l 在 x 轴上截距的范围.

例 18.（2020·山东·高考真题）已知抛物线的顶点在坐标原点 O，椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的顶点分别为 A_1，A_2，B_1，B_2，其中点 A_2 为抛物线的焦点，如图所示.



（1）求抛物线的标准方程；

（2）若过点 A_1 的直线 l 与抛物线交于 M，N 两点，且 $\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)//\overrightarrow{B_1A_2}$，求直线 l 的方程.

【总结提升】

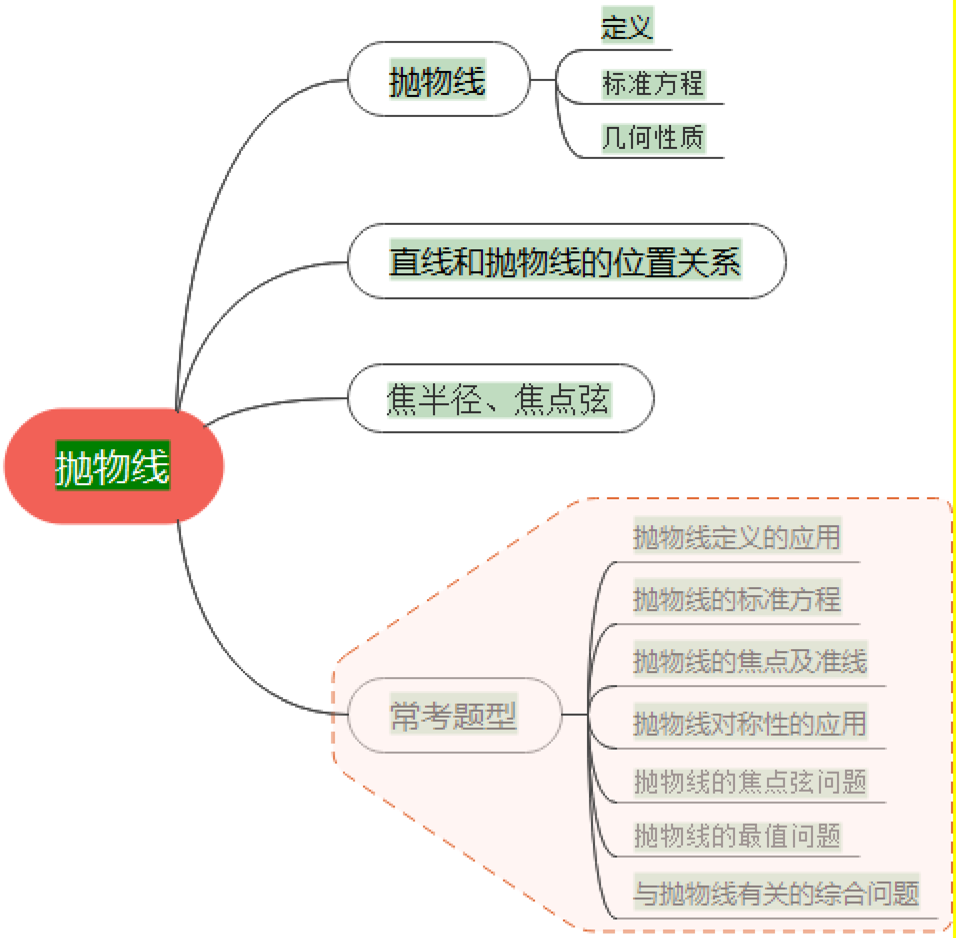
抛物线的综合问题常常涉及方程、几何性质，以及与直线、圆、椭圆、双曲线、向量等知识交汇考查综合运用数学知识的能力.

(1)当与向量知识结合时，注意运用向量的坐标运算，将向量间的关系，转化为点的坐标问题，再根据根与系数的关系，将所求问题与条件建立联系求解.

(2)当与直线、圆、圆锥曲线有关时，常常联立方程组，消元后利用一元二次方程的判别式、根与系数的关系构造相关数量关系求解.

专题 9.5　抛物线（知识点讲解）

【知识框架】



【核心素养】

1. 考查抛物线的定义、求抛物线方程、最值等问题，凸显直观想象、数学运算的核心素养.

2. 结合抛物线的几何性质及几何图形，求抛物线相关性质及其应用，凸显数学运算、直观想象的核心素养.

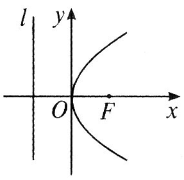
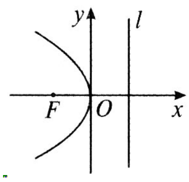
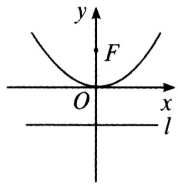
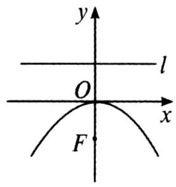
3. 考查直线与抛物线的位置关系，凸显逻辑推理、数学运算、数学应用的核心素养.

【知识点展示】

（一）抛物线的定义

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l（l 不经过点 F）的距离相等的点的轨迹叫做抛物线，定点 F 叫做抛物线的焦点，定直线 l 叫做抛物线的准线.

（二）抛物线的标准方程及几何性质

图形				
标准方程	$y^2=2px$（p＞0）	$y^2=-2px$（p＞0）	$x^2=2py$（p＞0）	$x^2=-2py$（p＞0）
顶点	O（0，0）			
范围	x≥0， $y\in R$	x≤0， $y\in R$	y≥0， $x\in R$	y≤0， $x\in R$
对称轴	x 轴		y 轴	
焦点	$F\left(\frac{p}{2},0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$
离心率	e=1			
准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
焦半径	$\|MF\|=x_0+\frac{p}{2}$	$\|MF\|=\frac{p}{2}-x_0$	$\|MF\|=y_0+\frac{p}{2}$	$\|MF\|=\frac{p}{2}-y_0$

（三）直线和抛物线的位置关系

（1）将直线的方程 $y=kx+m$ 与抛物线的方程 $y^2=2px$（p＞0）联立成方程组，消元转化为关于 x 或 y 的一元二次方程，其判别式为 Δ.

$ky^2-2py+2pm=0$ 若 $k=0$，直线与抛物线的对称轴平行或重合，直线与抛物线相交于一点；

若 $k\neq 0$

①Δ＞0 ⇔ 直线和抛物线相交，有两个交点；

②Δ＝0 ⇔ 直线和抛物线相切，有一个公共点；

③Δ＜0 ⇔ 直线和抛物线相离，无公共点.

（2）直线与抛物线的相交弦

设直线 $y=kx+m$ 交抛物线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 于点 $P_1(x_1,y_1)$ ，$P_2(x_2,y_2)$，两点，则

$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2[1+(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2})^2]}=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$ 同理可得

$|P_1P_2|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|y_1-y_2|\ \ (k\neq 0)$ [来源:Z*xx*k.Com]

这里$|x_1-x_2|,|y_1-y_2|$,的求法通常使用韦达定理，需作以下变形：

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$ $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$ **（四）焦半径、焦点弦**

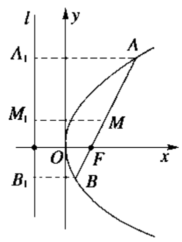
1.通径

过焦点垂直于轴的弦称为抛物线的通径，其长为__$2p$__.

2．焦半径

抛物线上一点与焦点 F 连接的线段叫做焦半径，设抛物线上任一点 $A(x_0，y_0)$，则四种标准方程形式下的焦半径公式为

标准方程	$y^2=2px$ ($p>0$)	$y^2=-2px$ ($p>0$)	$x^2=2py$ ($p>0$)	$x^2=-2py$ ($p>0$)
焦半径$\|AF\|$	$\|AF\|$＝__$x_0+\frac{p}{2}$__	$\|AF\|$＝__$\frac{p}{2}-x_0$__	$\|AF\|$＝__$y_0+\frac{p}{2}$__	$\|AF\|$＝__$\frac{p}{2}-y_0$__



3．焦点弦问题

如图所示：AB 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$过焦点 F 的一条弦，设 $A(x_1，y_1)$、$B(x_2，y_2)$，AB 的中点 $M(x_0，y_0)$，抛物线的准线为 l.

(1)以 AB 为直径的圆必与准线 l__相切__；

(2)$|AB|=2(x_0+\frac{p}{2})=x_1+x_2+$__$p$__；

(3)A、B 两点的横坐标之积、纵坐标之积为定值，即 $x_1\cdot x_2=\frac{p^2}{4}$，$y_1\cdot y_2=-p^2$.

【常考题型剖析】

题型一：抛物线定义的应用

例 1.（2023·全国·高三专题练习（文））已知抛物线 C：$y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点为$F\left(\frac{1}{4},0\right)$，$A(x_0,y_0)$是 C 上一点，$|AF|=\frac{5}{4}x_0$，则$x_0=$（　　）

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

【答案】A

【分析】根据抛物线的定义可得答案.

【详解】根据抛物线的定义可知$\left|AF\right|=x_0+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}x_0$，解之得$x_0=1$.

故选：A．

例 2.（2020·全国·高考真题（理））已知 A 为抛物线 C:y^2=2px（p>0）上一点，点 A 到 C 的焦点的距离为 12，到 y 轴的距离为 9，则 p=（　　）

A．2　　　　B．3　　　　C．6　　　　D．9

【答案】C

【分析】利用抛物线的定义建立方程即可得到答案.

【详解】设抛物线的焦点为 F，由抛物线的定义知 $|AF|=x_A+\frac{p}{2}=12$，即 $12=9+\frac{p}{2}$，解得 $p=6$.

故选：C.

【总结提升】

1．涉及抛物线几何性质的问题常结合图形思考，通过图形可以直观地看出抛物线的顶点、对称轴、开口方向等几何特征，体现了数形结合思想解题的直观性．

2. 抛物线上的点到焦点距离等于到准线距离，注意转化思想的运用．

3.利用抛物线定义可以解决距离的最大和最小问题，该类问题一般情况下都与抛物线的定义有关．实现由点到点的距离与点到直线的距离的转化．

(1)将抛物线上的点到准线的距离转化为该点到焦点的距离，构造出“两点之间线段最短”，使问题得解．

(2)将抛物线上的点到焦点的距离转化为到准线的距离，利用“与直线上所有点的连线中垂线段最短”原理解决．

提醒：利用抛物线定义进行距离转化的同时，要注意平面几何知识在其中的重大运用．

题型二：抛物线的标准方程

例 3.（2021·全国高二课时练习）已知动圆 M 经过点 A(3，0)，且与直线 l：x＝－3 相切，则动圆圆心 M 的轨迹方程为（　　）

A．y^2＝12x　　　　B．y^2＝－12x

C．x^2＝12y　　　　D．x^2＝12y

【答案】A【分析】

设出点 M 的坐标，由题意可知|MA|＝|MN|，进而根据抛物线的定义即可得到答案.

【详解】

设动点 M(x，y)，圆 M 与直线 l：x＝－3 的切点为 N，则|MA|＝|MN|，即动点 M 到定点 A 和定直线 l：x＝－3 的距离相等.

∴点 M 的轨迹是抛物线，且以 A(3，0)为焦点，以直线 l：x＝－3 为准线，

故动圆圆心 M 的轨迹方程是 y^2＝12x.