第 11 讲 用公式法求解一元二次方程

模块导航

模块一　思维导图串知识

模块二　基础知识全梳理（吃透教材）

模块三　核心考点举一反三

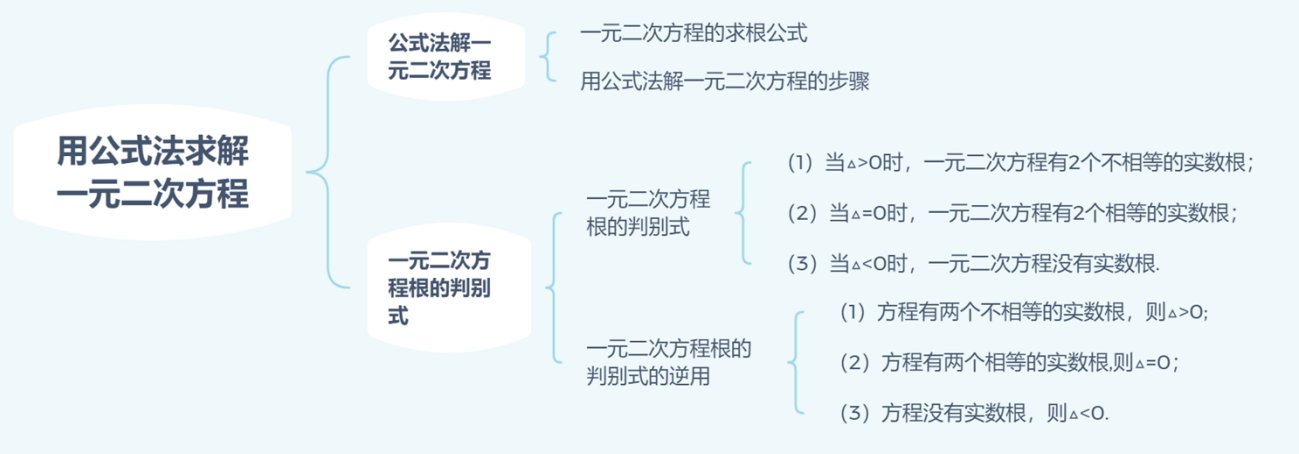
模块四　小试牛刀过关测

素养目标

1．理解一元二次方程求根公式的推导过程，了解公式法的概念，能熟练应用公式法解一元二次方程；

2．会用一元二次方程根的判别式判别方程根的情况，由方程根的情况能确定方程中待定系数的取值范围；

模块一 思维导图串知识



模块二 基础知识全梳理

知识点一．公式法解一元二次方程

1. 一元二次方程的求根公式

一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当$\Delta=b^2-4ac\geq 0$时，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

2. 用公式法解一元二次方程的步骤

用公式法解关于 x 的一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的步骤：

①把一元二次方程化为一般形式；②确定 a、b、c 的值（要注意符号）；　③求出b^2-4ac 的值；

④若$b^2-4ac\geq 0$，则利用公式$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$求出原方程的解；若$b^2-4ac<0$，则原方程无实根.

知识点二、一元二次方程根的判别式

1. 一元二次方程根的判别式

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 中，b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的判别式，通常用“Δ”来表示，即$\Delta=b^2-4ac$；

（1）当△>0 时，一元二次方程有 2 个不相等的实数根；

（2）当△=0 时，一元二次方程有 2 个相等的实数根；

（3）当△<0 时，一元二次方程没有实数根.

要点：利用根的判别式判定一元二次方程根的情况的步骤：①把一元二次方程化为一般形式；②确定 $a,b.c$ 的值；③计算 b^2-4ac 的值；④根据 b^2-4ac 的符号判定方程根的情况.

2. 一元二次方程根的判别式的逆用

在方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 中，

（1）方程有两个不相等的实数根 $\Rightarrow b^2-4ac>0$；

（2）方程有两个相等的实数根 $\Rightarrow b^2-4ac=0$；

（3）方程没有实数根 $\Rightarrow b^2-4ac<0$.

要点：

（1）逆用一元二次方程根的判别式求未知数的值或取值范围，但不能忽略二次项系数不为 0 这一条件；

（2）若一元二次方程有两个实数根则 $b^2-4ac\geqslant 0$.

模块三 核心考点举一反三

考点一：利用用公式法还原一元二次方程

例 1. （23-24 八年级下·全国·假期作业）在用求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 解方程 $3x-1-2x^2=0$ 的过程中，a，b，c 的值分别是（　）

A. $a=3$，$b=-1$，$c=-2$　　B. $a=-2$，$b=-1$，$c=3$

C. $a=-2$，$b=3$，$c=-1$　　D. $a=-1$，$b=3$，$c=-2$

【答案】C

【解析】略

【变式 1-1】（23-24 八年级下·安徽安庆·期中）若关于 x 的一元二次方程的根为 $x=\dfrac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}$，则这个方程是（　）

A. $x^2+4x-3=0$　B. $x^2-4x-1=0$　　C. $x^2+4x-5=0$　　D. $x^2-4x-2=0$

【答案】D

【分析】本题主要考查了解一元二次方程．根据公式法解答，即可求解.

【详解】解：∵关于 x 的一元二次方程的根为 $x=\dfrac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}$，

∴二次项系数为 1，一次项系数为 -4，常数项为 -2，

∴这个方程为 $x^2-4x-2=0$.

故选：D

【变式 1-2】（2024 八年级下·浙江·专题练习）$x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3}$ 是下列哪个一元二次方程的根（　　）

A．$3x^2+2x-1=0$　　B．$2x^2+4x-1=0$

C．$-x^2-2x+3=0$　　D．$3x^2-2x-1=0$

【答案】D

【分析】本题考查了公式法解一元二次方程，根据公式法解一元二次方程的方法即可得结论，用公式法解一元二次方程的一般步骤为：①把方程化成一般形式，进而确定 a，b，c 的值；②求出 b^2-4ac 的值（若 $b^2-4ac<0$，方程无实数根）；③在 $b^2-4ac\geq0$ 的前提下，把 a、b、c 的值代入公式进行计算求出方程的根，解题的关键是掌握去根公式.

【详解】解：A、$3x^2+2x-1=0$ 中，$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3}$，不合题意；

B、$2x^2+4x-1=0$ 中，$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}$，不合题意；

C、$-x^2-2x+3=0$ 中，$x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times(-1)\times3}}{2\times(-1)}$，不合题意；

D、$3x^2-2x-1=0$ 中，$x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3}$，符合题意；

故选：D.

【变式 1-3】（2024·河北石家庄·一模）若 $x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4\times3\times(-1)}}{2\times3}$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，则 $a+b+c=$（　　）

A．-2　　B．4　　C．2　　D．0

【答案】D

【分析】本题主要考查解一元二次方程----公式法，利用求根公式判断即可

【详解】解：$\because x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4\times3\times(-1)}}{2\times3}$ 是一元二次方程方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，

$\therefore a=3$，$b=-2$，$c=-1$，

$\therefore a+c+c=3-2-1=0$，

故选：D

考点二：求一元二次方程中判别式的值

例 2.（23-24 九年级上·山东德州·阶段练习）在公式法解方程 $\sqrt{3}x^2+4\sqrt{3}x=2\sqrt{3}$ 时，b^2-4ac

的值是（　）

A．16　　B．24　　C．72　　D．64

【答案】B

【分析】本题考查了公式法解一元二次方程，先化为一元二次方程的一般形式，将a,b,c的值代入，即可求解.

【详解】解：$\sqrt{3}x^2+4\sqrt{3}x=2\sqrt{3}$，即$\sqrt{3}x^2+4\sqrt{3}x-2\sqrt{3}=0$

$\therefore b^2-4ac=\left(4\sqrt{3}\right)^2-4\times\sqrt{3}\times\left(-2\sqrt{3}\right)=48-24=24$，

故选：B.

【变式 2-1】（22-23 九年级上·广东梅州·阶段练习）用公式法解一元二次方程$3x^2-2x-1=0$时，计算b^2-4ac的结果为（　）

A．8　　B．-8　　C．14　　D．16

【答案】D

【分析】根据方程的系数的带a、b、c的值，再将其代入求值即可得到结果.

【详解】解：在一元二次方程$3x^2-2x-1=0$中，

$a=3$，$b=-2$，$c=-1$，

$\therefore b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-1)=16$，

故选 D.

【点睛】本题考查了一元二次方程的系数与根的判别式，熟练掌握基本知识是解题关键.

【变式 2-2】（23-24 八年级下·安徽安庆·阶段练习）当用公式法解方程$2x^2-1=3x$时，b^2-4ac的值为（　）

A．2　　B．-3　　C．17　　D．-1

【答案】C

【分析】

本题考查了根的判别式，将原方程变形为一般式找出a、b、c的值是解题的关键．将原方程变形为一般式，找出a、b、c的值，将其代入b^2-4ac即可得出结论.

【详解】

解：Q 原方程可变形为$2x^2-3x-1=0$，

$\therefore a=2$，$b=-3$，$c=-1$，

$\therefore b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times(-1)=17$.

故选：C

【变式 2-3】（22-23 九年级上·山东德州·阶段练习）在公式法解方程$\sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x=2\sqrt{2}$时，$b^2-4ac$的值是（　）

A．16　　B．4　　C．32　　D．64

【答案】D

【分析】首先把方程化简为一般形式，再得出a、b、c的值，最后求出判别式的值即可.

【详解】解：Q $\sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x=2\sqrt{2}$，

$\therefore \sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x-2\sqrt{2}=0$，

$\therefore a=\sqrt{2}$，$b=4\sqrt{3}$，$c=-2\sqrt{2}$，

$\therefore b^2-4ac=(4\sqrt{3})^2-4\times\sqrt{2}\times(-2\sqrt{2})=64$；

故选：D.

【点睛】此题考查了公式法解一元二次方程，解此题时首先要化简．还要注意熟练应用公式.

考点三：用公式法求解一元二次方程

例 3.（23-24 八年级下·吉林长春·期中）解方程：$x^2-2\sqrt{3}x-1=0$.

【答案】$x_1=\sqrt{3}+2$，$x_2=\sqrt{3}-2$

【分析】本题考查一元二次方程的解法，掌握解一元二次方程的解法是解题关键．本题直接利用公式法求解即可.

【详解】解：一元二次方程$x^2-2\sqrt{3}x-1=0$中，$a=1$，$b=-2\sqrt{3}$，$c=-1$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=\left(-2\sqrt{3}\right)^2-4\times1\times(-1)=16$，

$\therefore x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{16}}{2}=\sqrt{3}\pm2$，

$\therefore x_1=\sqrt{3}+2$，$x_2=\sqrt{3}-2$.

【变式 3-1】（23-24 九年级上·四川凉山·阶段练习）用公式法解方程：$x^2-4x-6=0$.

【答案】$x_1=2+\sqrt{10},x_2=2-\sqrt{10}$

【分析】本题考查公式法解一元二次方程，根据公式法，按步骤求解即可得到答案，熟记公式法解一元二次方程是解决问题的关键.

【详解】解：Q $a=1,b=-4,c=-6$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-6)=40>0$，

$\therefore x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{4\pm\sqrt{40}}{2}=2\pm\sqrt{10}$，

$\therefore x_1=2+\sqrt{10},x_2=2-\sqrt{10}$.

【变式 3-2】（2024·黑龙江齐齐哈尔·二模）解方程：$x^2-2\sqrt{3}x-9=0$

【答案】$x_1=3\sqrt{3}$，$x_2=-\sqrt{3}$

【分析】本题考查了解一元二次方程，根据公式法解一元二次方程，即可求解.

【详解】解：$x^2-2\sqrt{3}x-9=0$

$\therefore a=1,b=-2\sqrt{3},c=-9$，$\Delta=b^2-4ac=12+36=48$

$\therefore x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{2\sqrt{3}\pm4\sqrt{3}}{2}$

解得：$x_1=3\sqrt{3}$，$x_2=-\sqrt{3}$

【变式 3-3】（23-24 八年级下·全国·假期作业）用公式法解下列方程：

(1) $x^2-x-12=0$；

(2) $2x^2+5x-3=0$；

(3) $2x^2-7x+7=0$.

【答案】(1) $x_1=4,x_2=-3$

(2) $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=-3$

(3)方程无解

【分析】本题主要考查一元二次方程的解法，熟练掌握利用公式法求解方程是解题的关键；

（1）由题意易得 $a=1,b=-1,c=-12$，然后根据公式法可进行求解；

（2）由题意易得 $a=2,b=5,c=-3$，然后根据公式法可进行求解；

（3）由题意易得 $a=2,b=-7,c=7$，然后根据公式法可进行求解.

【详解】（1）解：$x^2-x-12=0$

$\therefore a=1,b=-1,c=-12$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=1+4\times1\times12=49>0$，

$\therefore x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{1\pm\sqrt{49}}{2}=\dfrac{1\pm7}{2}$，

$\therefore x_1=4$，$x_2=-3$；

（2）解：$2x^2+5x-3=0$

$\therefore a=2,b=5,c=-3$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=25+4\times2\times3=49>0$，

$\therefore x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-5\pm\sqrt{49}}{4}=\dfrac{-5\pm7}{4}$，

$\therefore x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=-3$；

（3）解：$2x^2-7x+7=0$

$\therefore a=2,b=-7,c=7$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=49-4\times2\times7=-7<0$，

∴原方程无解.

考点四：用公式法解一元二次方程的错题复原问题

例 4. （2024 九年级下·全国·专题练习）小明在解方程 $x^2-5x=-3$ 的过程中出现了错误，其解答如下：

解：Q $a=1$，$b=-5$，$c=-3$，……第一步

$\therefore b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times(-3)=37$，……第二步

$\therefore x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$，……第三步

$\therefore x_1=\dfrac{5+\sqrt{37}}{2}$，$x_2=\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}$．……第四步

(1)问：小明的解答是从第_____ 步开始出错的；

(2)请写出本题正确的解答．

【答案】(1)一；

(2)正确的解答见解析．

【分析】本题考查了公式法解一元二次方程，熟练掌握用公式法解一元二次方程的一般步骤是解决问题的关键．

（1）先把方程化为一般式，再确定 a、b、c 的值，从而可判断小明的解答从第一步开始出错了；

（2）方程化为一般式得到 $a=1$，$b=-5$，$c=3$，再计算根的判别式的值，然后利用求根公式得到方程的解．

【详解】（1）小明的解答是从第一步开始出错的，

故答案为：一；

（2）解：方程化为一般式为 $x^2-5x+3=0$，

$a=1$，$b=-5$，$c=3$，

$\therefore b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times3=13$，

$\therefore x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$，

$\therefore x_1=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$，$x_2=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$．

【变式 4-1】（23-24 八年级下·全国·假期作业）解方程 $\sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x=2\sqrt{2}$，某位同学的解答过程如下：

解：$\because a=\sqrt{2}$，$b=4\sqrt{3}$，$c=2\sqrt{2}$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=\left(4\sqrt{3}\right)^2-4\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=32>0$，

$\therefore x=\dfrac{-4\sqrt{3}\pm\sqrt{32}}{2\times\sqrt{2}}=-\sqrt{6}\pm2$，

$\therefore x_1=-\sqrt{6}+2$，$x_2=-\sqrt{6}-2$.

请你分析以上解答过程有无错误，如有错误，指出错误的地方，并写出正确的结果.

【答案】见解析

【详解】解：有错误，c的值应为$-2\sqrt{2}$.

将方程化为一般形式，得$\sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x-2\sqrt{2}=0$.

$\because a=\sqrt{2}$，$b=4\sqrt{3}$，$c=-2\sqrt{2}$，

$\therefore \Delta=\left(4\sqrt{3}\right)^2-4\times\sqrt{2}\times\left(-2\sqrt{2}\right)=64>0$，

$\therefore x=\dfrac{-4\sqrt{3}\pm 8}{2\sqrt{2}}$，

$\therefore x_1=-\sqrt{6}+2\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{6}-2\sqrt{2}$.

【变式 4-2】（22-23 九年级下·河北邢台·开学考试）嘉淇在用公式法解方程$2x^2-4x=5$时出现了错误，解答过程如下所示：

解方程$2x^2-4x=5$

解：$\because a=2,b=-4,c=5$　　（第一步）

$\therefore b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times5=-24<0$　　（第二步）

∴原方程无实数根　　（第三步）

(1)嘉淇的解答过程从第_____步开始出错的，其错误的原因是_____；

(2)请你写出此题的正确的求解过程.

【答案】(1)一，原方程没有化成一般形式

(2)见解析

【分析】（1）运用公式法的前提是将一元二次方程化成一般形式；

（2）将一元二次方程化成一般形式，即可代入公式法求解.

【详解】（1）解：确定各项系数时，应将一元二次方程化成一般形式

故答案为：一；原方程没有化成一般形式；

（2）解：原方程化成一般形式是：$2x^2-4x-5=0$

$\because a=2$，$b=-4$，$c=-5$

$\therefore b^2-4ac=\left(-4\right)^2-4\times2\times\left(-5\right)=56>0$

$\therefore x=\dfrac{4\pm\sqrt{56}}{2\times2}$

即$x_1=\dfrac{2+\sqrt{14}}{2}$，$x_2=\dfrac{2-\sqrt{14}}{2}$

【点睛】本题考查利用公式法求解一元二次方程．注意求解过程中的易错点：未将一元二次方程化成一般形式，直接使用公式法．

【变式 4-3】（22-23 八年级下·北京门头沟·期末）阅读材料，并回答问题：

小明在学习一元二次方程时，解方程$2x^2-x-3=0$的过程如下：

解：$\because a=2$，$b=-1$，$c=-3$　　①

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times2\times(-3)$　　②

$=1-24=-23<0$　　③

∴此方程无解

问题：

(1)上述过程中，从_步开始出现了错误（填序号）；

(2)发生错误的原因是：_；

(3)在下面的空白处，写出正确的解答过程．

【答案】(1)③

(2)计算错误

(3)见解析

【分析】根据公式法的步骤判断和求解即可．

【详解】（1）解：由题意可得：从③步开始出现了错误

故答案为：③；

（2）计算错误（负数乘以负数得负数）；

（3）$\because a=2$，$b=-1$，$c=-3$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times2\times(-3)=1+24=25$，

$\therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{25}}{2\times2}=\dfrac{1\pm5}{4}$，

解得：$x_1=\dfrac{3}{2}$，$x_2=-1$．

【点睛】本题考查了用公式法解一元二次方程，解题的关键是掌握公式法的计算步骤．

考点五：根据判别式判断一元二次方程根的情况

例 5.（23-24 九年级下·云南昆明·阶段练习）已知关于 x 的一元二次方程$x^2-5x+5=0$的根的情况，下列说法正确的是（　）

A．有两个不相等的实数根　　B．有两个相等的实数根

C．没有实数根　　D．无法确定

【答案】A

【分析】本题考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/536132214024010201