2023-2024 学年重庆市高一下学期期中考试数学联考

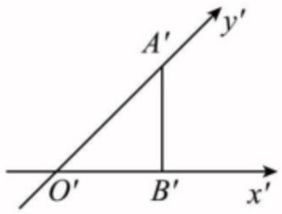
模拟试题

一、单选题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的．）

1．复数 $z=3-6\text{i}$（i 为虚数单位）的虚部为（　　）

A．-6　　　　B．6　　　　C．3　　　　D．$-6i$

2．一个水平放置的三角形的斜二测直观图是等腰直角三角形 $A'B'O'$，若 $O'B'=2$，那么原 $\triangle ABO$ 的面积是（　）



A．1　　　　B．$\sqrt{2}$　　　　C．$2\sqrt{2}$　　　　D．$4\sqrt{2}$

3．已知 a，b 表示直线，α，β，γ 表示平面，则下列推理正确的是（　）

A．$\alpha\cap\beta=a$，$b\subset\alpha\Rightarrow a//b$

B．$\alpha\cap\beta=a$，$a//b\Rightarrow b//\alpha$，且 $b//\beta$

C．$\alpha//\beta$，$a\cap\gamma=a$，$\beta\cap\gamma=b\Rightarrow a//b$

D．$a//\beta$，$b//\beta$，$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha\Rightarrow\alpha//\beta$

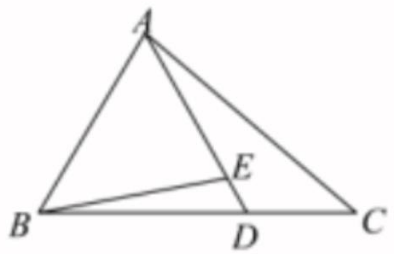
4．某同学为表达对“新冠疫情”抗疫一线医护人员的感激之情，亲手为他们制作了一份礼物，用正方体纸盒包装，并在正方体六个面上分别写了“致敬最美逆行”六个字.该正方体纸盒水平放置的六个面分别用“前面、后面、上面、下面、左面、右面”表示.如图是该正方体的展开图.若图中“致”在正方体的后面，那么在正方体前面的字是（　）

A．最　　　　B．美　　　　C．逆　　　　D．行

5．已知 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，若 $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，且 $\sin A=2\sin B\cos C$，那么 $\triangle ABC$ 是（　）

A．直角三角形　　　B．等边三角形　　　C．等腰三角形　　　D．等腰直角三角形

6．如图，在$\triangle ABC$中，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AE}=4\overrightarrow{ED}$，则$\overrightarrow{BE}=$（　）



A．$\frac{11}{15}\vec{a}-\frac{8}{15}\vec{b}$　　　B．$\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{8}{15}\vec{b}$　　　C．$-\frac{11}{15}\vec{a}+\frac{8}{15}\vec{b}$　　　D．$-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{8}{15}\vec{b}$

7．在《九章算术·商功》中将正四面形棱台体（棱台的上、下底面均为正方形）称为方亭.在方亭$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2A_1B_1=4$，四个侧面均为全等的等腰梯形且面积之和为$12\sqrt{2}$，则该方亭的体积为（　）

A．$\frac{28\sqrt{2}}{3}$　　　B．$\frac{28}{3}$　　　C．$\frac{14\sqrt{2}}{3}$　　　D．$\frac{14}{3}$

8．已知向量$\vec{a}$与单位向量$\vec{e}$所成的角为60°，且满足对任意的$t\in R$，恒有$\left|\vec{a}-t\vec{e}\right|\geq\left|\vec{a}-\vec{e}\right|$，则$\left|x\vec{a}+(1-2x)\vec{e}\right|(x\in\mathbf{R})$的最小值为（　）

A．$\frac{1}{3}$　　　B．$\frac{1}{2}$　　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

二、多选题（本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．）

9．已知向量$\vec{a}=(1,-2)$，$\vec{b}=(-1,m)$，则（　）

A．若$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，则$m=-1$　　　B．若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$的值为-5

C．若$m=1$，则$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$　　　D．若$m=-2$，则$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影向量坐标为$(-\frac{3}{5},-\frac{6}{5})$

10．已知复数z的共轭复数记为$\bar{z}$，对于任意的两个复数z_1，z_2，与下列结论错误的是（　）

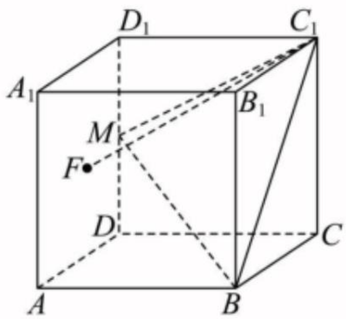
A．若复数$z=2-\mathrm{i}$，则其对应复平面上的点在第二象限

B．若复数z满足$z(2-\mathrm{i})=\mathrm{i}$，则$\bar{z}=\frac{-1+2\mathrm{i}}{5}$

C．$\left|z+\bar{z}\right|\leq2\left|z\right|$

D. $\left|z_1-\overline{z_2}\right|=\left|\overline{z_1}+z_2\right|$

11．如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O为正方体的中心，M 为 DD_1 的中点，F 为侧面正方形 AA_1D_1D 内一动点，且满足 B_1F // 平面 BC_1M，则（　）



A．三棱锥 D_1-DCB 的外接球表面积为12π

B．动点 F 的轨迹是一条线段

C．三棱锥 $F-BC_1M$ 的体积是随点 F 的运动而变化的

D．若过 A，M，C_1 三点作正方体的截面Ω，Q 为截面Ω上一点，则线段 A_1Q 长度的取值范围为$\left[\frac{2\sqrt{6}}{3},2\sqrt{2}\right]$

三、填空题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.）

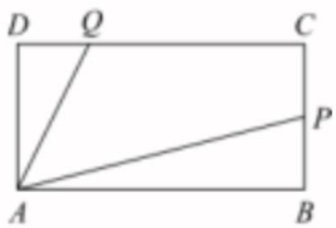
12．已知一个圆锥的底面圆的半径为 1，体积为$\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$，则该圆锥的侧面积为__________.

13．已知复数 $z=1+i$（i 为虚数单位）是关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$（p，q 为实数）的一个根，则 $p+q=$__________.

14．在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 A 为钝角，$b=2$，$\cos 2A+(4+\sqrt{3})\sin(B+C)=2\sqrt{3}+1$，点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心，且 $AP=\frac{2\sqrt{7}}{3}$，则 $a=$______.

四、解答题（本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

15．如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=2$，点 P 为 BC 的中点，且 $\overrightarrow{DQ}=\lambda\overrightarrow{DC}(\lambda\in\mathbf{R})$.



(1)试用 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 表示 $\overrightarrow{AP}$；

(2)若 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{DC}=4$，求 λ 的值.

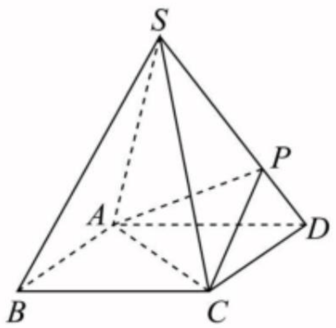
16．从① $\cos B+\cos\frac{B}{2}=0$；② $\sin^2A-\sin^2B+\sin^2C+\sin A\sin C=0$；③ $b\cos C+\left(2a+c\right)\cos B=0$，这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并加以解答.

在 $\triangle ABC$ 中，a,b,c 分别是角 A,B,C 的对边，若__________.

(1)求 B；

(2)若 $b=2\sqrt{5}$ 且 $a+c=5$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

17．如图所示正四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SA=2$，$AB=\sqrt{2}$，P 为侧棱 SD 上的点，且 $SP=3PD$，Q 为侧棱 SD 的中点.



(1)求正四棱锥 $S-ABCD$ 的表面积；

(2)证明：$BQ//$ 平面 PAC；

(3)侧棱 SC 上是否存在一点 E，使得 $BE//$ 平面 PAC．若存在，求 $\frac{SE}{EC}$ 的值；若不存在，试说明理由.

18．在锐角△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c．已知 $b=2$，$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C+\cos C$.

(1)求角 B;

(2)若 M 是△ABC 内的一动点，且满足 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}$，则 $\left|\overrightarrow{BM}\right|$ 是否存在最大值？若存在，请求出最大值及取最大值的条件；若不存在，请说明理由；

(3)若 D 是△ABC 中 AC 上的一点，且满足 $\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}=\frac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$，求 $AD:DC$ 的取值范围.

19．在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 对应的边分别为 a，b，c，$2\sin A\sin B\sin C=\sqrt{3}\left(\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A\right)$.

(1)求角 A;

(2)法国著名数学家奥古斯丁·路易斯·柯西（AugustinLouisCauchy，1789年－1857年）在数学领域有非常高的造诣．很多数学的定理和公式都以他的名字来命名，如柯西不等式、柯西积分公式．其中柯西不等式在解决不等式证明的有关问题中有着广泛的应用．

①柯西不等式的二维形式是对于任意的a，b，c，$d\in\mathbf{R}$，有$\left(ac+bd\right)^2\le\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$．请证明上述不等式，并写出等号取到的条件；

②请用柯西不等式的二维形式求$2\sqrt{1-\cos B}+\sqrt{2\cos B+1}$的最大值，并写出等号取到的条件；

③在（1）的条件下，若$a=2$，P是$\triangle ABC$内一点，过P作AB，BC，AC垂线，垂足分别为D，E，F，借助于三维分式型柯西不等式：y_1，y_2，$y_3\in\mathbf{R}^*$，$\dfrac{x_1^2}{y_1}+\dfrac{x_2^2}{y_2}+\dfrac{x_3^2}{y_3}\ge\dfrac{\left(x_1+x_2+x_3\right)^2}{y_1+y_2+y_3}$当且仅当$\dfrac{x_1}{y_1}=\dfrac{x_2}{y_2}=\dfrac{x_3}{y_3}$时等号成立．求$T=\dfrac{|AB|}{|PD|}+\dfrac{4|BC|}{|PE|}+\dfrac{|AC|}{|PF|}$的最小值．

1．A

【分析】根据复数虚部的概念直接求解.

【详解】由复数的概念知，复数 $z=3-6\mathrm{i}$ 的虚部为 -6.

故选：A

2．D

【分析】根据斜二测画法可得原三角形的底边及高，进而可求原三角形的面积.

【详解】因为三角形的斜二侧直观图是等腰直角三角形 $A'B'O'$，

所以 $\triangle ABO$ 的底 $OB=O'B'=2$.

腰 $A'O'=2\sqrt{2}$，在三角形ABO 中为直角三角形，高 $OA=2A'O'=2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

所以直角三角形 $\triangle ABO$ 的面积是 $\frac{1}{2}\times2\times4\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

故选:D.

3．C

【分析】由直线的位置关系判断 A；由直线与平面的位置关系判断 B；由面面平行的性质定理判断 C；平面与平面的位置关系判断 D.

【详解】对于 A，由 $\alpha\cap\beta=a$，$b\subset\alpha$，得 a,b 平行或相交，A 错误；

对于 B，由 $\alpha\cap\beta=a$，$a//b$，得 $b//\alpha$ 且 $b//\beta$ 或 $b\subset\alpha$ 或 $b\subset\beta$，B 错误；

对于 C，由 $\alpha//\beta$，$a\cap\gamma=a$，$\beta\cap\gamma=b$，根据面面平行的性质得 $a//b$，C 正确；

对于 D，由 $a//\beta$，$b//\beta$，$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，得 α,β 平行或相交，D 错误.

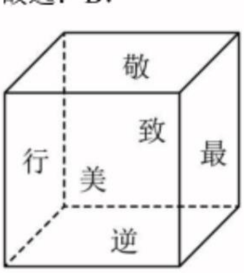
故选：C

4．B

【分析】利用正方体及其表面展开图的特点以及题意，把“致”放到正方体的后面，然后把平面展开图折成正方体，看“致”的相对面.

【详解】把正方体的表面展开图再折成正方体，如图，面“致”与面“美”相对，“致”在正方体的后面，那么在正方体前面的字是“美”.

故选：B.



本题考查了正方体的表面展开图，考查学生的空间想象能力，注意正方体是空间图形，从相对面入手、分析求解.

5．B

【分析】将$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$化简并结合余弦定理可得A的值，再对$\sin A=2\sin B\cos C$结合正、余弦定理化简可得边长关系，进行判定三角形形状.

【详解】由$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，得$(b+c)^2-a^2=3bc$，

整理得$b^2+c^2-a^2=bc$，则$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，

因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$，

又由$\sin A=2\sin B\cos C$及正弦定理，得$a=2b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，化简得$b=c$，

所以$\triangle ABC$为等边三角形，

故选：B

6．C

【分析】结合图形由向量的线性运算可得.

【详解】因为$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a},\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，

所以$\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{a}+\frac{2}{3}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}$，

又因为$\overrightarrow{AE}=4\overrightarrow{ED}$，

所以$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}\right)=-\frac{2}{15}\vec{b}-\frac{1}{15}\vec{a}$，

所以$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)-\frac{2}{15}\vec{b}-\frac{1}{15}\vec{a}=-\frac{11}{15}\vec{a}+\frac{8}{15}\vec{b}$，

故选：C.

7．B

【分析】先根据方亭四个侧面的面积之和得到AA_1的长度，然后作辅助线找到并求方亭的高，最后利用棱台的体积计算公式求解即可.

【详解】如图，过A_1作$A_1E\perp AB$，垂足为E，

由四个侧面的面积之和为$12\sqrt{2}$知，侧面ABB_1A_1的面积为$3\sqrt{2}$，

$\therefore\frac{1}{2}\left(AB+A_1B_1\right)\cdot A_1E=3\sqrt{2}$（梯形的面积公式），则$A_1E=\sqrt{2}$.

由题意得：$AE=\frac{1}{2}\left(AB-A_1B_1\right)=1$，在$\mathrm{Rt}\triangle AA_1E$中，$AA_1=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}$.

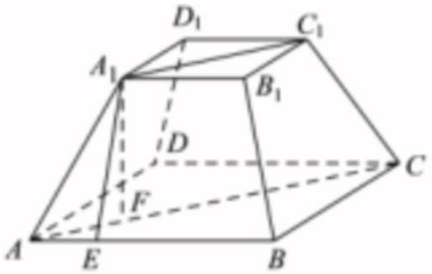
连接AC，A_1C_1，过A_1作$A_1F\perp AC$，垂足为F，易知四边形ACC_1A_1为等腰梯形且$AC=4\sqrt{2}$，

$A_1C_1=2\sqrt{2}$，则$AF=\sqrt{2}$，

$\therefore A_1F=\sqrt{AA_1^2-AF^2}=1$，

$\therefore$该方亭的体积$V=\frac{1}{3}\left(2^2+4^2+\sqrt{2^2\times 4^2}\right)\times 1=\frac{28}{3}$，（棱台的体积公式）.

故选：B.



8．C

将$\left|\vec{a}-t\vec{e}\right|\geq\left|\vec{a}-\vec{e}\right|$两边同时平方，将模的平方转化为向量的平方，通过不等式恒成立可求$\left|\vec{a}\right|$，

再将$\left|x\vec{a}+(1-2x)\vec{e}\right|(x\in\mathbf{R})$平方，还是将模的平方转化为向量的平方，把$\left|\vec{a}\right|$代入，可将问题转化为关于$x$的二次函数最值问题.

【详解】$\because$已知向量$\vec{a}$与单位向量$\vec{e}$所成的角为60°，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{e}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{e}\right|\cos 60^\circ=\frac{\left|\vec{a}\right|}{2}$，$\vec{e}^2=1$，

又$\because$对任意的$t\in R$，恒有$\left|\vec{a}-t\vec{e}\right|\geq\left|\vec{a}-\vec{e}\right|$，

$\therefore \left|\vec{a}-t\vec{e}\right|^2\geq\left|\vec{a}-\vec{e}\right|^2$

即$\vec{a}^2-2t\vec{a}\cdot\vec{e}+t^2\vec{e}^2\geq\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{e}+\vec{e}^2$

$\therefore t^2-\left|\vec{a}\right|t+\left|\vec{a}\right|-1\geq 0$，对任意的$t\in R$恒成立，

$\therefore \Delta=\left|\vec{a}\right|^2-4\left(\left|\vec{a}\right|-1\right)\leq 0$

即$\Delta=\left(\left|\vec{a}\right|-2\right)^2\leq 0$

$\therefore \left|\vec{a}\right|=2$，

且$\left|x\vec{a}+(1-2x)\vec{e}\right|^2$

$=x^2\vec{a}^2+2x(1-2x)\vec{a}\cdot\vec{e}+(1-2x)^2\vec{e}^2$

$=x^2\left|\vec{a}\right|^2+2x(1-2x)\left|\vec{a}\right|\left|\vec{e}\right|\cos 60^\circ+(1-2x)^2\left|\vec{e}\right|^2$

$=4x^2-2x+1=4\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{3}{4}$，

即$\left|x\vec{a}+(1-2x)\vec{e}\right|^2\geq\dfrac{3}{4}$，

$\left|x\vec{a}+(1-2x)\vec{e}\right|\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore\left|x\vec{a}+(1-2x)\vec{e}\right|(x\in\mathbf{R})$的最小值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

故选：C.

本题考查数量积的定义运算和数量积的性质运算，关键要通过将模的平方转化为向量的平方，把不等式恒成立问题转化求二次函数的最值问题，考查运算求解能力和转化与化归思想，是中档题.

9．BCD

【分析】利用向量垂直的坐标表示判断 A；利用向量共线的坐标表示，结合数量积运算判断 B；利用坐标计算模判断 C；求出投影向量判断 D.

【详解】向量$\vec{a}=(1,-2)$，$\vec{b}=(-1,m)$，

对于 A，$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，则$-1-2m=0$，解得$m=-\dfrac{1}{2}$，A 错误；

对于 B，$\vec{a}//\vec{b}$，$m=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1-2m=-5$，B 正确；

对于 C，$m=1$，$\vec{b}=(-1,1)$，$\vec{a}-\vec{b}=(2,-3)$，因此$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$，C 正确；

对于 D，$m=-2$，$\vec{b}=(-1,-2)$，$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影向量$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\dfrac{3}{5}(-1,-2)=(-\dfrac{3}{5},-\dfrac{6}{5})$，D 正确.

故选：BCD

10．ABD

【分析】对于 A：根据复数的几何意义分析判断；对于 B：根据复数的除法和共轭复数的定义分析判断；对于 C：根据复数模长的性质分析判断；对于 D：举反例说明即可.