6. 信号分析与处理

本章主要内容

- 傅立叶级数及周期信号频谱特点；
- 傅立叶变换的概念；
- DFT的概念及其公式推导；
- 频谱混迭现象及采样定理；
- 时域有限化和频谱泄漏；
- 抑制频谱泄漏、栅栏效应的措施
- DFT参数选择。

概 述

信号的频谱分析是揭示信号在频域特征的信号分析方法。

理论依据：由法国工程师傅立叶于1807年提出的，后人称为傅立叶分析理论。

6.1 傅立叶级数

6.1.1 傅立叶级数的基本思想

任一周期函数（信号）都可由基波及与基波频率成整数倍的幅值不同的三角函数合成，称之为傅立叶级数。

对非周期函数，若是时限的，则将函数以其持续时间为周期，对信号进行周期延拓，变成周期信号后，可用傅立叶级数展开。

6.1.2 傅里叶级数的数学基础

设 $y(t)$ 为一周期信号并满足狄里赫利条件，则可用傅立叶级数展开，展开形式分实数（三角函数）形式和复数形式。

傅立叶级数的三角函数形式

$$y(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{¥}(a_m\cos m\omega_1 t+b_m\sin m\omega_1 t)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{¥}A_m\sin(\omega_m t+j_m)$$

$A_m=\sqrt{a_m^2+b_m^2}$ 信号中的 m 次谐波分量的幅值；

$\varphi_m=\arctan(b_m/a_m)$ 信号中的 m 次谐波分量的初相角；

$A_m=A_m(\omega_m)$ 称为幅频谱；

$\varphi_m=\varphi_m(\omega_m)$ 称为相频

傅立叶级数的复数形式

$$y(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m e^{j\omega_m t}$$

式中 $c_m=\frac{1}{T}\int_T y(t)e^{-j\omega_m t}dt$ 为傅里叶级数系数，也称频谱系数。记为

$$Y(m\omega_1)=\frac{1}{T}\int_T y(t)e^{-j\omega_m t}dt$$

6.1.3 周期信号的频谱特点

- 离散性
- 谐波性
- 收敛性

物理解释

6.2 傅立叶变换和非周期信号频谱

- 由傅立叶级数推导出傅立叶变换公式

$$T \longrightarrow \infty \qquad \Delta f \longrightarrow 0$$

- 非周期信号频谱的特点

离散谱 $\longrightarrow$ *连续谱*

6.3 离散傅里叶变换（DFT）

6.3.1 基本概念

离散傅立叶变换是傅立叶变换CFT经过*时域和频域有限化和离散化*处理后导出的计算机系统分析信号频谱的公式。它实际来源于CFT。

6.3.2 离散傅立叶变换式的推导

在理解对信号在时域上*离散化和有限化*处理过程的基础上，加深对*采样定理、频谱泄漏、栅栏效应*等物理概念的理解，从而掌握对信号进行频谱分析时各主要参数的选择方法。

先将CFT的正、逆公式合写为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}y(t)e^{-j2\pi ft}dt\right]e^{j2\pi ft}df \qquad (1)$$

对信号在时域上进行离散化：

$$t\rightarrow n\cdot T_S \qquad (n=0,1,\cdots N-1)$$

采样的长度是有限的，信号长度为：

$$L=(N-1)\cdot T_S\approx N\cdot T_S$$

频域上离散化：

$$f\rightarrow k\cdot\Delta f \qquad (k=0,1\cdots N-1)$$

显然输出最高频率为：

$$F_S=(N-1)\cdot\Delta f\approx N\cdot\Delta f$$

其它：

$$dt \to T_s \qquad df \to \Delta f \qquad \int \to \sum_{k=0}^{N-1}$$

代入（1）式中得：

$$y(n,T_s) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[\sum_{n=0}^{N-1} y(n\cdot T_S)e^{-j2\pi nk/N}]e^{j2\pi nk/N}$$

得正、逆离散傅立叶变换式：

DFT：

$$Y_K = Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)\cdot e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)\cdot W_N^{nk} \qquad (k = 0,1,\cdots N-1)$$

IDFT：

$$y_n = y(n) = \sum_{n=0}^{N-1} Y(k)\cdot e^{j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} Y(K)\cdot W_N^{-nk} \qquad (n = 0,1,\cdots N-1)$$

思考

- 原连续信号在时域离散化后所得信号与原信号的频谱是否一致？都相应发生那些变化？

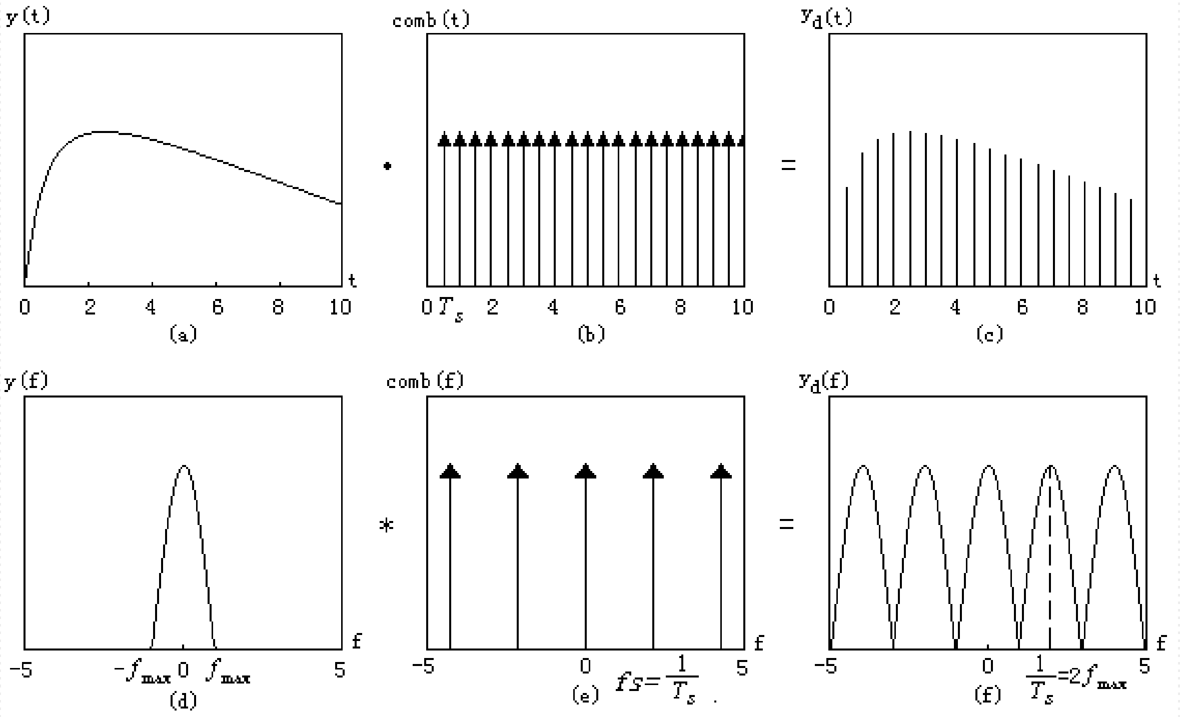
  采样周期如何选择？

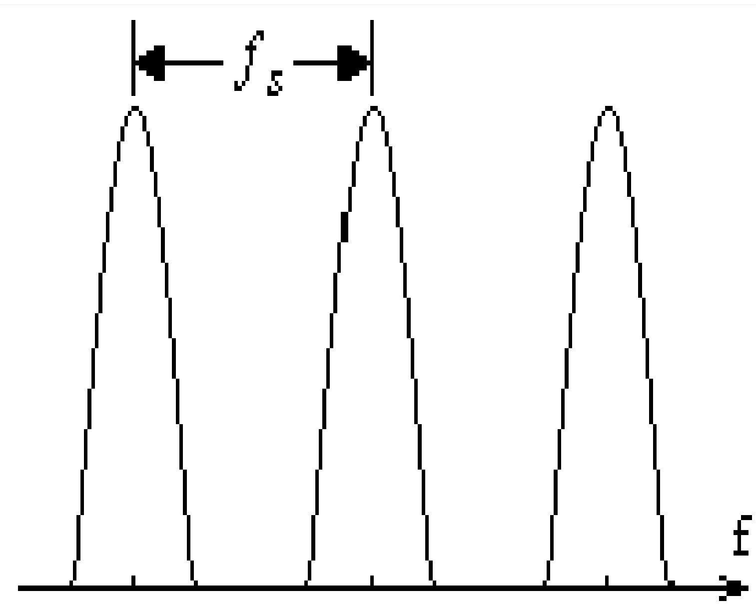
- 对信号进行时域有限化处理后所得信号频谱会发生那些变化？

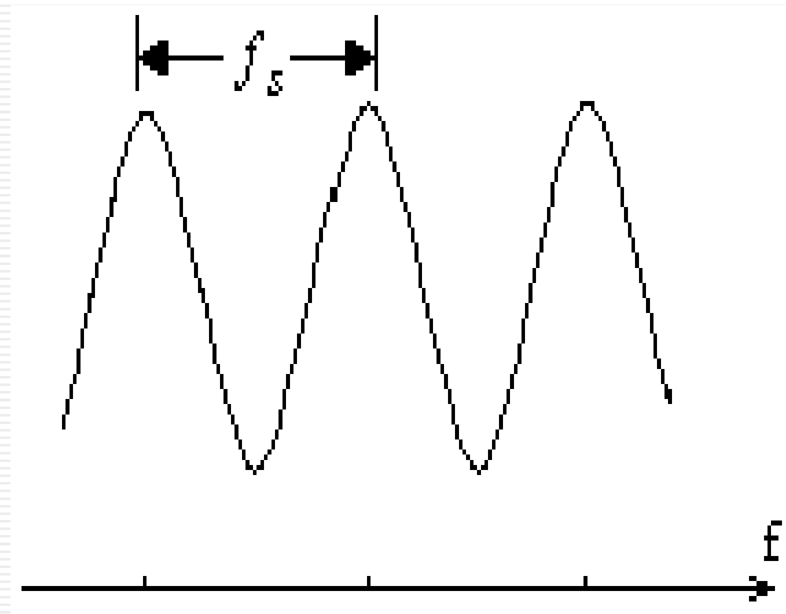
  采样长度L如何选择？

6.4 频谱混迭与采样定理

6.4.1 频谱混迭

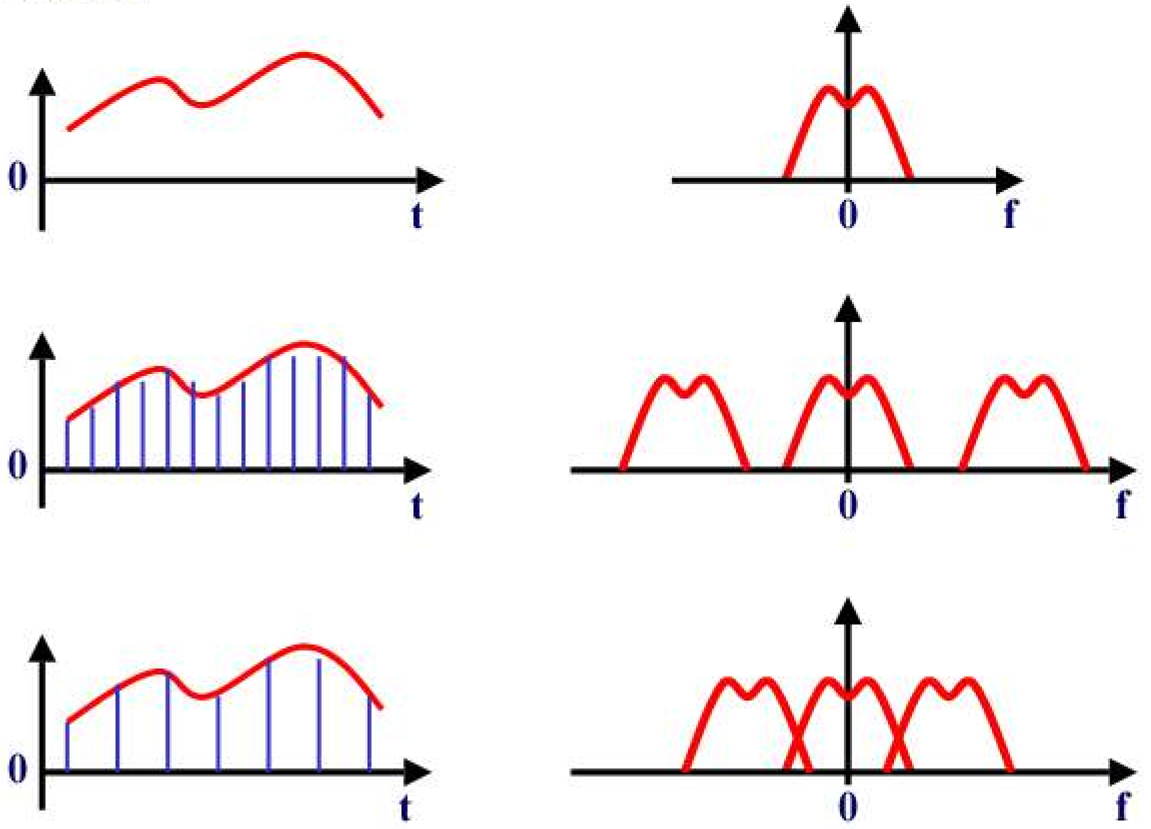






（a）无混叠现象（$f_s \ge 2F_{\max}$ ）　（b）频谱混叠（$f_s < 2F_{\max}$ ）

频域解释



为保证采样后信号能真实地保留原始模拟信号信息，信号采样频率必须至少为原信号中最高频率成分的2倍。称为采样定理。即：

$$F_s > 2F_{max}$$

香农采样定理

- 信号经采样后，其频谱为原信号频谱的周期延拓，延拓的周期为 $1/T_S$ ，且在幅值上为原信号频谱幅值的 $1/T_S$ 倍。
- 若连续信号的最高频率为 F_{max} ，则当 $f_S < 2F_{max}$ 时，频域波形会产生混叠。

抑制频谱混叠的方法：

- 采样定理： $f_s \geq 2f_m$
- 加预滤波器

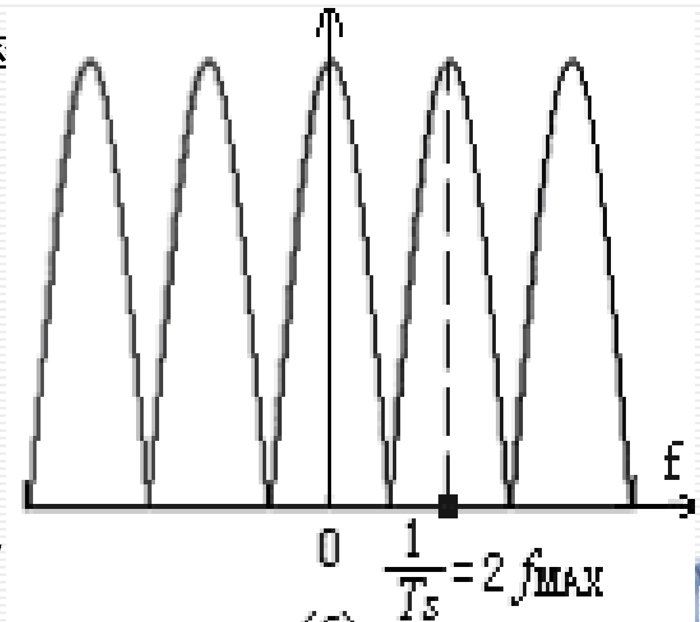
→ 传感器 → 预滤波器 → 放大器 → 数采卡

用于降低被测信号的最高频率

截止频率： $f_\tau = f_m$

限制X(t)的高频上限

容易实现 $f_s \geq 2f_m$ ，避免过高苛刻要求 f_s



6.5 时域有限化与频谱泄漏

6.5.1 频谱泄漏产生的原因

以余弦信号为例，说明对一个非时限信号进行有限化处理所引起的泄漏问题。