Chapter 9-1 粘性不可压缩流体流动

I 概述

Ⅰ-1 粘性不可压缩流动模型

1）关于粘性

粘性摩擦的存在必导致绕流阻力的存在，运动的衰减及涡量的扩散。

在大 R_e 数下，惯性力>>粘性力，采用理想流体模型。理想流体理论对不脱体绕流情况下的升力，压力分布和速度分布给出了符合实际的结果，但在阻力等与粘性效应相关的问题上却无能为力。因而，在研究阻力等起源于粘性的现象时须抛弃理想流体假设。

在小 R_e 数和中 R_e 数情况下，粘性作用不可忽略。

2）关于不可压缩流动（流体的压缩性对流动的影响可略）

液体压缩系数小，一般可认为不可压缩（极端情况如激波等除外）。

气体在低速运动 (速度远小于声速)、非定常时速度变化缓慢，且重力方向上流场的尺度<10km 时，可略其压缩性。(当研究对流层（~10km）内大气运动时，不能忽略重力场引起的压缩效应)。

3）基本方程组和边界条件

均质不可压缩流体 $\rho = const.$，且温度变化小，$\mu = const$，故有求速度和压力场的完备方程组:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ &\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \gamma \nabla^2 \vec{V} \end{aligned}\right\}$$

能量方程　假设无辐射能传输，则 $\rho \frac{dU}{dt} = k\nabla^2 T + 2\mu S : S$，此方程用于求温度场。

本构方程　$P = -pI + 2\mu S$　　　　用于求应力

边界条件　在固壁表面上，流体的法向和切向速度分别等于固体表面的对应速度分量

在自由表面上，$p_{nn}=-p_0, p_{n\tau}=0$

在两种流体的界面上，$\vec{V}^{(1)}=\vec{V}^{(2)}, \vec{P}_n^{(2)}+\vec{P}_{-n}^{(1)}+\gamma(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})\vec{n}=0$

Ⅰ-2 粘性流动分类和几种求解途径

层流：流体运动规则、稳定，各部分分层流动互不掺混，质点轨迹光滑，脉线清晰

湍流：流体运动极不规则、极不稳定，伴有高频扰动，各部分激烈掺混，质点轨迹杂乱无章。

决定流动状态的参数是 R_e 数，此外还受外部扰动的影响。对圆管中的流动，当 R_e <<2000 时，一定是层流，此时粘性力足以保持流动的稳定。

层流极少有准确解（某些特殊的简单问题，非线性方程得以简化)。对于大 R_e 数流动，现采用边界层理论近似求解；对于小 R_e 数，则部分或全部忽略惯性力。

湍流更为复杂，已建立一些湍流理论，采用了经验方法和近似解法。

Ⅲ-3 粘性不可压缩流动的一般特征

1） 运动的有旋性

对于不可压缩流动，$\nabla\times(\nabla\times\vec{V})=\nabla(\nabla\cdot\vec{V})-\nabla^2\vec{V}=-\nabla^2\vec{V}$ （$\nabla\cdot\vec{V}=0$），N — S 方程可化为

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{\nabla p}{\rho}-\gamma\nabla\times\vec{\Omega}$$

粘性不可压缩流动方程组改写为$\begin{cases}\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{\nabla p}{\rho}-\gamma\nabla\times\vec{\Omega}\\ \nabla\cdot\vec{V}=0\end{cases}$

若 $\vec{\Omega}=0$ 则 N-S 方程化为 Euler 方程，粘性与无粘流动的区别就仅在于固壁上的无滑移边界条件。理想流体上述方程组在 $V_n\big|_{边界}=V_{固n}$ 下有唯一解，此解一般不满足无滑移条件，也就是说，粘性不可压缩无旋流动的解一般不存在 $\Rightarrow$ 粘性不可压缩流动一般是有旋运动。

特例：点涡引起的理想流体二维流动在 $r>a$ 区域的解亦是 $r=a$ 的圆柱在粘性流体中匀角

速度定轴转动引起的粘性流动。

2） 机械能的耗损性

粘性导致机械能转化成内能（热能）。耗散函数$\Phi = 2\mu S : S$。

3） 涡旋的扩散性与耗散性

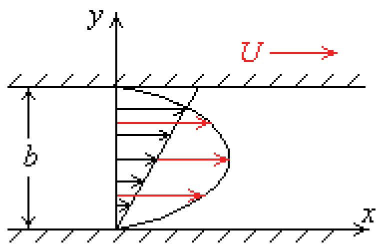
参见吴望一《流体力学》$P_{226-230}$

IV 粘性不可压缩流动的一些准确解

VI-1 定常的单一方向流动

VI-1-1 平面 Couette 流动与 Poiseuille 流动

两无限大平行平板，平板间充满均质不可压缩流体，间距b，上板以速度U沿x轴方向运动，下板静止，研究板间流体的定常流动。



由流动特点可知：$u = u(x, y)$，$v = w = 0$，$\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$，$\dfrac{\partial}{\partial z} = 0$，

$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \Rightarrow u = u(y)$。

N-S 方程：

$$\left\{\begin{aligned} &0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \\ &0 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = const。$$

边界条件：$u(0) = 0$，$u(b) = U$。

1）若沿x轴方向无压差$\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$，流动仅由上板拖动引起，即称 Couette 流动，此时

$\dfrac{d^2 u}{dy^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = Uy/b$ ——简单剪切流动。

2）上板、下板均不动，$\frac{\partial p}{\partial x}=-G$，$G=const$，则为 Poiseuille 流动，此时

$u=\frac{G}{2\mu}y(b-y)$。

3）平板所受粘滞力（以 Couette 流为例）

$\tau=\mu\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0,b}=\mu\frac{U}{b}$

或下板受切应力$=-p_{-21}=p_{21}=2\mu e_{21}=\mu\frac{\partial u}{\partial y}$。

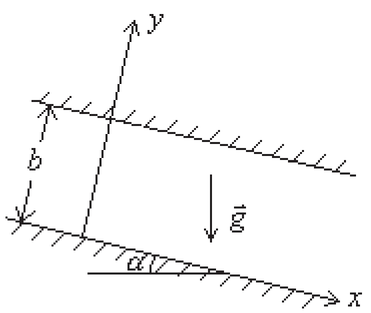
4）拖动单位面积上平板外力做功功率$W=\tau U$。

单位体积流体机械能耗散$\Phi=2\mu\ e_{ij}e_{ij}=2\mu(\ e_{12}^2+e_{21}^2)=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\mu\frac{U^2}{b^2}$。

单位面积平板板间流体柱内的总机械能耗散$b\Phi=W$。

例 1 求解粘性流体沿倾斜平板下泻的流动（考虑重力的影响，假设自由表面与平板平行）。

$$\begin{cases}0=\rho g\sin\alpha-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \text{------(1)}\\ 0=-\rho g\cos\alpha-\frac{\partial p}{\partial y} & \text{------(2)}\\ \frac{\partial u}{\partial x}=0 & \text{------(3)}\end{cases}$$



边界条件：$u(0)=0$，$u(b)=U$

公式(2)$\Rightarrow$ $p=-\rho g\cos\alpha y+p_1(x)$，代入(1)并考虑到(3)知

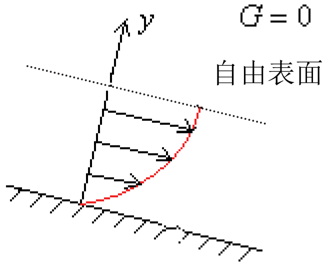
$-\rho g\sin\alpha+\frac{\partial p_1}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=const$ ------（4）

设$\frac{\partial p}{\partial x}=-G$，则$\frac{\partial p_1}{\partial x}=-G$，代入（4）得$u=-\frac{\rho g\sin\alpha+G}{2\mu}y^2+Ay+B$。

再利用边界条件得$u=\frac{Uy}{b}+\frac{\rho g\sin\alpha+G}{2\mu}y(b-y)$。

讨论：

1）若上边界 $y=b$ 处是自由表面，并假设水面平行于水底，则由于边界上 $p(x,b)=p_0$ 故 $G=0$；



另外 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b}=0$ 要求 $-\dfrac{\rho\, g\sin\alpha}{\mu}b+A=0$，

故 $u=\dfrac{\rho\, g\sin\alpha}{2\mu}y(2b-y)$。

2）上板速度多大时，下板上摩擦应力为零

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0 \Rightarrow U=-\dfrac{G+\rho g\sin\alpha}{2\mu}b^2$，此时 $u=-\dfrac{G+\rho\, g\sin\alpha}{2\mu}y^2$。

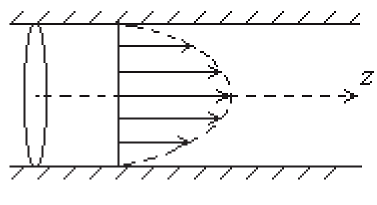
IV-2 截面均匀的圆管内的粘性层流（Hagen-Poiseuille 流动）

IV-2-2 无限长圆管内压强梯度力作用下的定常层流。

假设外加压差不随时间变化，不考虑入口段流动（粘性作用尚未达到充分，速度剖面随离入口的距离变化），可假设管无限长。流体在压差作用下开始流动，当进入管中充分长距离后，粘性力达到与压强梯度力平衡，速度剖面不再变化，取柱坐标系如图，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$，$\dfrac{\partial}{\partial \theta}=0$。

柱坐标系下原始方程见吴书（下册 page229），此流动轴对称，仅考虑 N-S 方程的 $\bar{e}_r$ 和 $\bar{e}_z$ 两分量方程：

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}+\dfrac{\gamma}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial u}{\partial r})=0\\ \dfrac{\partial p}{\partial r}=0\end{cases}$$



$$\Rightarrow \frac{dp}{dz}=\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{du}{dr})=const\equiv -G$$

则 $u=-\dfrac{G}{4\mu}r^2+C_1\ln r+C_2$

边界条件：$r=a$，$u=0$，另外附加有 $r\to 0$，u 有限；