正方形

知识概述

1．正方形的性质

（1）正方形的定义：有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形．

（2）正方形的性质

①正方形的四条边都相等，四个角都是直角；

②正方形的两条对角线相等，互相垂直平分，并且每条对角线平分一组对角；

③正方形具有四边形、平行四边形、矩形、菱形的一切性质．

④两条对角线将正方形分成四个全等的等腰直角三角形，同时，正方形又是轴对称图形，有四条对称轴．

2．正方形的判定

正方形的判定方法：

①先判定四边形是矩形，再判定这个矩形有一组邻边相等；

②先判定四边形是菱形，再判定这个菱形有一个角为直角．

③还可以先判定四边形是平行四边形，再用1或2进行判定．

练一练

1．正方形具有而菱形不具有的性质是（ B ）

A．四边相等

B．四角相等

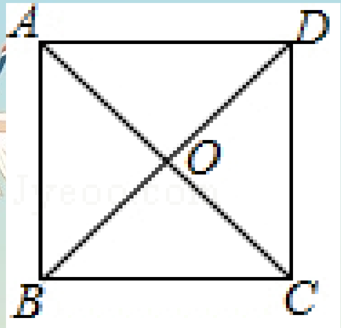
C．对角线互相平分

D．对角线互相垂直

练一练

2．如图，正方形ABCD的对角线AC、BD交于点O，AO＝3，则AB的长为（D　　）

A．2　B．3　C．$\sqrt{6}$　D．$3\sqrt{2}$



练一练

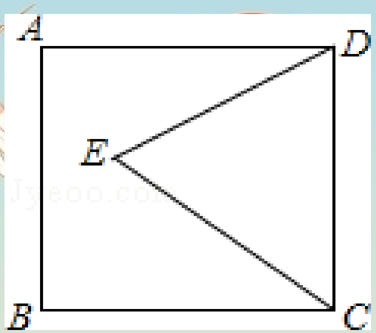
3．如图，正方形ABCD的边长为6，以CD为一边作等边三角形△DCE，点E在正方形内部，则点E到CD的距离是B（　　）

A．6

B．$3\sqrt{3}$

C．2

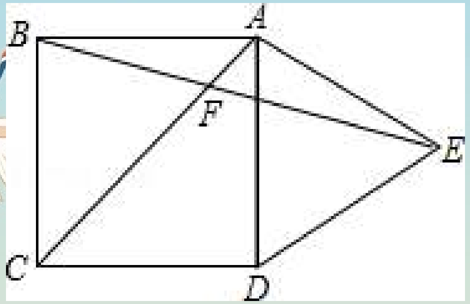
D．$2\sqrt{3}$



练一练

4．如图，在正方形ABCD的外侧，作等边三角形ADE，AC、BE相交于点F，则∠BFC为（C　　）

A．45°　　B．55°　　C．60°　　D．75°



练一练

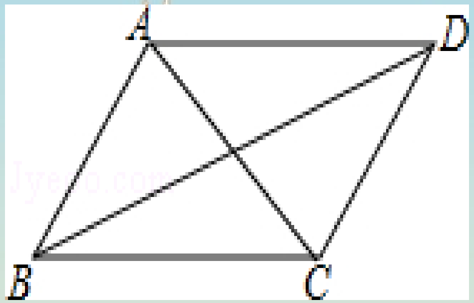
5．已知四边形ABCD是平行四边形，下列结论不正确的是（ D ）

A．当AB＝BC时，它是菱形

B．当∠ABC＝90°时，它是矩形

C．当AC⊥BD时，它是菱形

D．当AC＝BD时，它是正方形



练一练

6．下列说法正确的是（ D ）

A．对角线相等且互相垂直的四边形是菱形

B．对角线互相垂直平分的四边形是正方形

C．对角线互相垂直的四边形是平行四边形

D．对角线相等且互相平分的四边形是矩形

练一练

7．已知四边形ABCD是平行四边形，再从①AB＝BC，②∠ABC＝90°，③AC＝BD，④AC⊥BD四个条件中，选两个作为补充条件后，使得四边形ABCD是正方形，现有下列四种选法，其中错误的是（ B ）

A．选①②　　B．选②③　　C．选①③　　D．选②④

练一练

8．下列命题正确的是（ D ）

A．一组对边相等，另一组对边平行的四边形一定是平行四边形

B．对角线相等的四边形一定是矩形

C．两条对角线互相垂直的四边形一定是菱形

D．两条对角线相等且互相垂直平分的四边形一定是正方形

典例分析

例1、如图①，在正方形ABCD中，E，F分别是边AD、DC上的点，且AF⊥BE.

（1）求证：AF＝BE；

证明：在正方形ABCD中，AB=AD，∠BAE=∠D=90°，

∴∠DAF+∠BAF=90°，

∵AF⊥BE，

∴∠ABE+∠BAF=90°，

∴∠ABE=∠DAF，

∵在△ABE和△DAF中，

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle DAF \\ AB = AD \\ \angle BAE = \angle D \end{cases},$$

∴△ABE≌△DAF（ASA），

∴AF=BE；

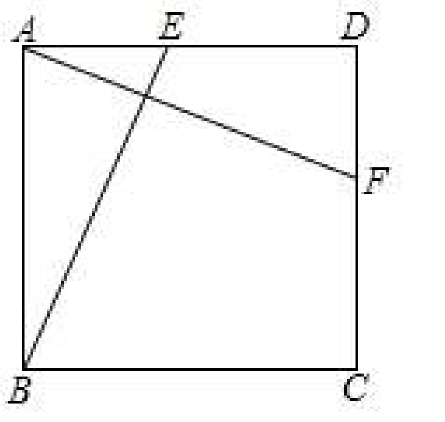


图1

典例分析

例1、（2）如图②，在正方形ABCD中，M、N、P、Q分别是边AB、BC、CD、DA上的点，且MP⊥NQ，MP与NQ是否相等？并说明理由.

解：MP与NQ相等.

理由如下：如图，过点A作AF∥MP交CD于F，过点B作BE∥NQ交AD于E，

∵AB∥CD，AD∥BC，

∴四边形AMPF与四边形BNQE是平行四边形，

∴AF=PM，BE=NQ，

∵在正方形ABCD中，AB=AD，∠BAE=∠D=90°，

∴∠DAF+∠BAF=90°，

∵AF⊥BE，

∴∠ABE+∠BAF=90°，

∴∠ABE=∠DAF，

∵在△ABE和△DAF中，$\begin{cases} \angle ABE=\angle DAF \\ AB=AD \\ \angle BAE=\angle D \end{cases}$，

∴△ABE≌△DAF（ASA），

∴AF=BE；

∴MP=NQ.

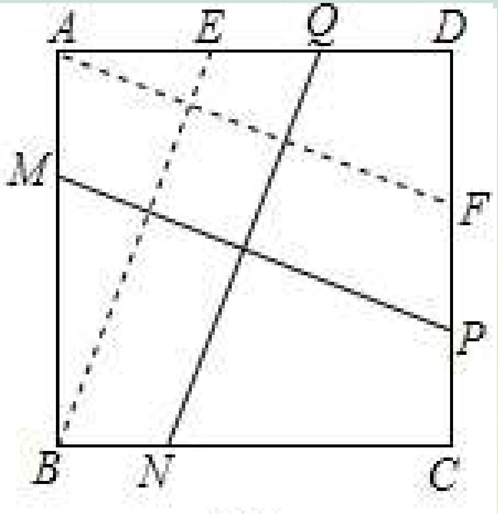
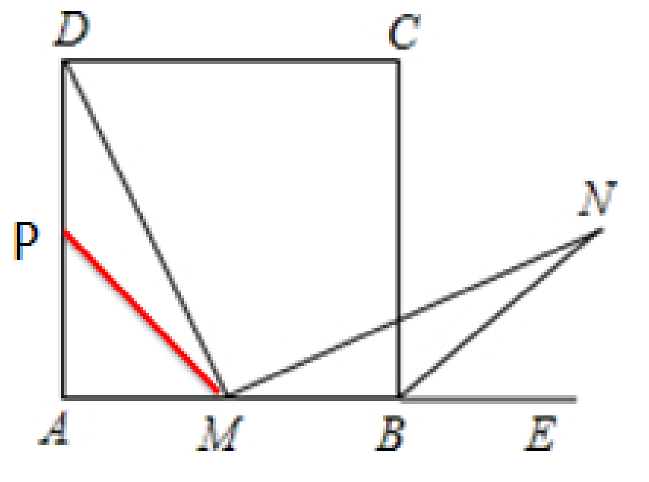


图2

典例分析

例2、如图所示，在正方形ABCD中，M为AB上任意一点，MN⊥DM，BN平分∠CBE，试说明：MD=MN．



解：在AD上取一点P，使DP=BM，连接PM，

由题可知：AB=AD；

∴AM=AP；

∴$\angle AMP=\angle APM=45^\circ$；

∴$\angle DPM=135^\circ$；

而BN平分∠CBE，

∴$\angle NBE=45^\circ$；

∴$\angle MBN=135^\circ$；

∵MN⊥MD，

∴$\angle ADM+\angle AMD=\angle NMB+\angle AMD=90^\circ$，

∴$\angle ADM=\angle NMB$，即$\angle MDP=\angle NMB$．

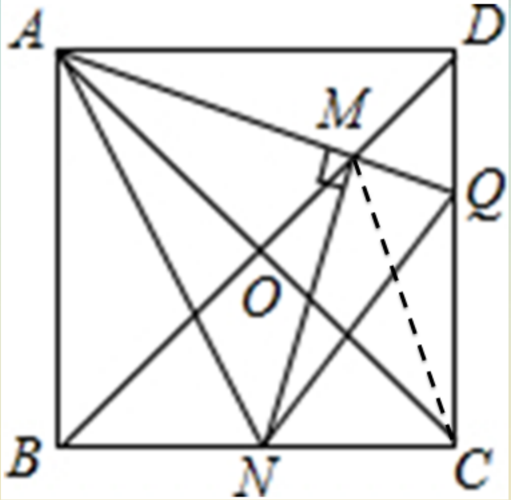
在△MPD与△NBM中，$\begin{cases}\angle DPM=\angle MBN\\ PD=BM\\ \angle MDP=\angle NMB\end{cases}$，

∴△MPD≌△NBM（ASA），

∴MD=MN．

典例分析

例3、正方形ABCD中，对角线AC、BD交于O，Q为CD上任意一点，AQ交BD于M，过M作MN⊥AM交BC于N,连AN、QN．求证：MA=MN．



证明：连接MC.

易证△AMD≌△CMD（SAS）

∴MA=MC

又∵∠ABN=∠AMN=90°，

∴∠MNC=∠MAB，

∵∠MCN=∠MAB ，

∴∠MNC=∠MCN，

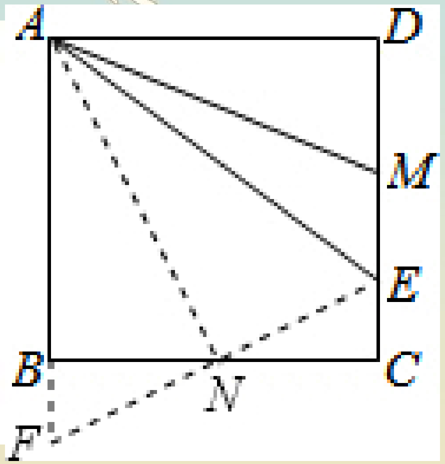
∴MN=MC，

∴MA=MN.

典例分析

例4、如图所示，正方形ABCD中，M为CD的中点，E为MC上的一点，且∠BAE=2∠DAM，求证：AE=BC+CE.

证明：如图，延长AB到F，使BF=CE，连接EF与BC相交于点N，连接AN



在△BFN和△CEN中，$\begin{cases} \angle FBN = \angle C = 90^\circ \\ \angle BNF = \angle CNE \\ BF = CE \end{cases}$，

∴△BFN≌△CEN（AAS），

∴BN=CN，EN=FN，

又∵M是CD的中点，∴∠BAN=∠DAM，

∵∠BAE=2∠DAM，

∴∠BAN=∠EAN，

∴AN既是△AEF的角平分线也是中线，

∴AE=AF，

∵AF=AB+BF，