2023年4月浙江省绍兴市高三二模数学试卷

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x=2n,n\in Z\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$. 则 $A\cap B=$(　)

A. $\{1,2\}$　　B. $\{2,4\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{0,2,4\}$

2. 已知 $z+i=zi$. 则 $|z|=$(　)

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 0　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

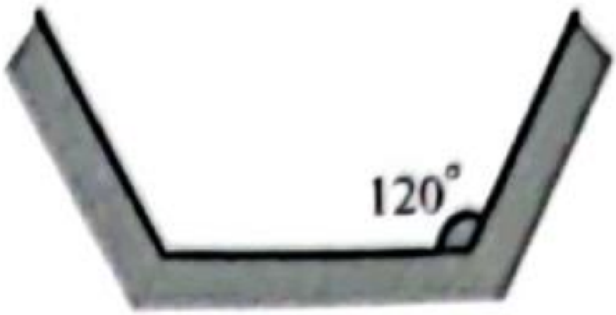
3. 下列函数在区间 $(0,2)$ 上单调递增的是(　)

A. $y=(x-2)^2$　　B. $y=\dfrac{1}{x-2}$　　C. $y=\sin(x-2)$　　D. $y=\cos(x-2)$

4. 已知非零向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 满足 $|\overrightarrow{a}|=1$，$\left\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right\rangle=\dfrac{\pi}{6}$，$|\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}|=1$，则 $|\overrightarrow{b}|=$(　)

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

5. 绍兴某乡村要修建一条100米长的水渠.水渠的过水横断面为底角为 120° 的等腰梯形(如图). 水渠底面与侧面的修建造价均为每平方100元.为了提高水渠的过水率.要使过水横断面的面积尽可能大.现由资金3万元.当过水横断面面积最大时，水渠的深度(即梯形的高)约为(参考数据：$\sqrt{3}\approx 1.732$)(　)



A. 0.58 米　　B. 0.87 米　　C. 1.17 米　　D. 1.73 米

6. 已知一组样本数据共有9个数，其平均数为8，方差为 12. 将这组样本数据增加一个数据后，所得新的样本数据的平均数为9，则新的样本数据的方差为(　)

A. 182　　B. 19.6　　C. 19.8　　D. 21.4

7. 已知等腰直角 $\triangle ABC$ 的斜边 $AB=\sqrt{2}$，M，N 分别为 AC，AB 上的动点，将 $\triangle AMN$ 沿 MN 折起，使点 A 到达点 A' 的位置，且平面 $A'MN\perp$ 平面 $BCMN$. 若点 A'，B，C，M，N 均在球 O 的球面上，则球 O 表面积的最小值为(　)

A. $\frac{8\pi}{3}$　　B. $\frac{3\pi}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{6}\pi}{3}$　　D. $\frac{4\pi}{3}$

8. 设 $a=\frac{10}{11}e^{\frac{1}{11}}$， $b=11\ln 1.1$，则(　)

A. $1<ab<a$　　B. $1<ab<b$　　C. $a<ab<1$　　D. $b<ab<1$

二、多选题：本题共 **4** 小题，共 **20** 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 **5** 分，部分选对的得 **2** 分，有选错的得 **0** 分。

9. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$， $\omega>0$， $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，则(　)

A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小正周期相同　　B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值域相同

C. $y=f(x)+g(x)$ 可能是奇函数　　D. $y=f(x)g(x)$ 的最大值是 $\frac{1}{2}$

10. 已知抛物线 $C_1: y^2=4x$， $C_2: y^2=8x$ 的焦点分别为 F_1， F_2. 若 P,Q 分别为 C_1， C_2 上的点，且线段 PQ 平行于 x 轴，则(　)

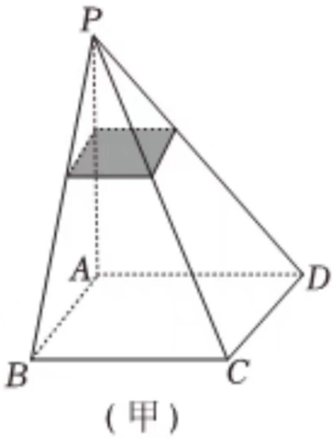
A. 当 $|PQ|=\frac{1}{2}$ 时， $\triangle F_1PQ$ 是直角三角形

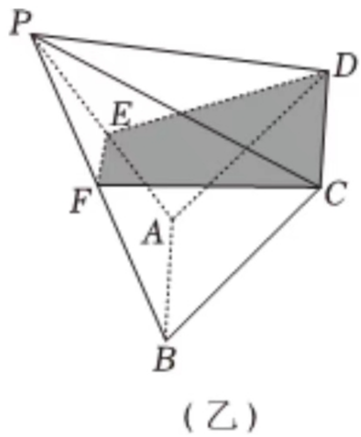
B. 当 $|PQ|=\frac{4}{3}$ 时， $\triangle F_2PQ$ 是等腰三角形

C. 四边形 F_1F_2PQ 可能是菱形

D. 四边形 F_1F_2PQ 可能是矩形

11. 某学校课外社团活动课上，数学兴趣小组进行了一次有趣的数学实验操作，课题名称“不用尺规等工具，探究水面高度”.如图甲， $P-ABCD$ 是一个水平放置的装有一定量水的四棱锥密闭容器（容器材料厚度不计），底面 $ABCD$ 为平行四边形，设棱锥高为 h，体积为 V，现将容器以棱 AB 为轴向左侧倾斜，如图乙，这时水面恰好经过 $CDEF$，其中 E，F 分别为棱 PA，PB 的中点，则(　)





A. 水的体积为$\dfrac{5}{8}V$　　　　B. 水的体积为$\dfrac{3}{4}V$

C. 图甲中的水面高度为$(1-\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2})h$　　　　D. 图甲中的水面高度为$(1-\dfrac{\sqrt[3]{5}}{2})h$

12. “冰雹猜想”也称为“角谷猜想”，是指对于任意一个正整数 x，如果 x 是奇数就乘以 3 再加 1，如果 x 是偶数就除以 2，这样经过若干次操作后的结果必为 1，犹如冰雹掉落的过程.参照“冰雹猜想”，提出了如下问题：设$k\in N^{*}$，各项均为正整数的数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2},a_n为偶数,\\ a_n+k,a_n为奇数,\end{cases}$，则(　　)

A. 当$k=5$时，$a_5=4$　　　　B. 当$n>5$时，$a_n\neq 1$

C. 当 k 为奇数时，$a_n\leqslant 2k$　　　　D. 当 k 为偶数时，$\{a_n\}$是递增数列

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分。

13. $\dfrac{C_6^0}{2^0}-\dfrac{C_6^1}{2^1}+\cdots-\dfrac{C_6^5}{2^5}+\dfrac{C_6^6}{2^6}$的值为__________.

14. 已知圆$C:(x-t)^2+(y+t-1)^2=8$，若圆 C 被两坐标轴截得的弦长相等，则$t=$__________.

15. 与曲线$y=e^x$和$y=-\dfrac{x^2}{4}$都相切的直线方程为__________

16. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，若$F_1$关于直线$y=2x$的对称点 P 恰好在 C 上，且直线PF_1与 C 的另一个交点为 Q，则$\cos\angle F_1QF_2=$__________

四、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（本小题 10 分）

记T_n为正项数列$\{a_n\}$的前 n 项积，且$a_1=1$，$a_2=2$，$T_nT_{n+2}=2T_{n+1}^2$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 证明：$\dfrac{T_1}{T_2}+\dfrac{T_3}{T_4}+\cdots+\dfrac{T_{2n-1}}{T_{2n}}<\dfrac{2}{3}$.

18.（本小题 12 分）

记$\triangle ABC$的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知$A=2B$.

(1) 若$b=2$，$c=1$，求a;

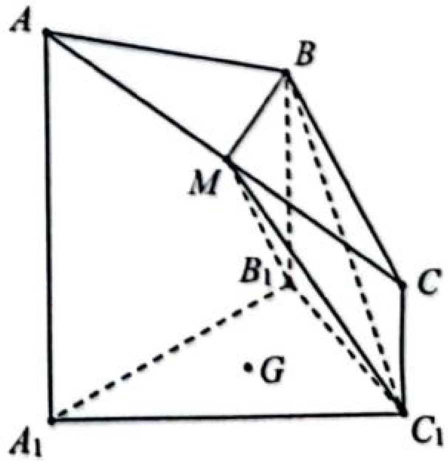
(2) 若$b+c=\sqrt{3}a$，求B.

19.（本小题 12 分）

如图，在多面体$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1//BB_1//CC_1$，$AA_1\perp$平面$A_1B_1C_1$，$\triangle A_1B_1C_1$为等边三角形，$A_1B_1=BB_1=2$，$AA_1=3$，$CC_1=1$，点M是AC的中点.

(1) 若点G为$\triangle A_1B_1C_1$的重心，证明：点G在平面BB_1M内;

(2) 求二面角B_1-BM-C_1的正弦值.



20.

21.（本小题12分）

已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3a^2}=1(a>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，且$F_2$到$C$的一条渐近线的距离为$\sqrt{3}$.

(1) 求C的方程;

(2) 过C的左顶点且不与x轴重合的直线交C的右半支于点B，交直线$x=\dfrac{1}{2}$于点P，过F_1作PF_2的平行线，交直线BF_2于点Q，证明：Q在定圆上.

22.（本小题12分）

设函数$f(x)=x-\sin\dfrac{\pi x}{2}$.

(1) 证明：当$x\in[0,1]$时，$f(x)\leqslant 0$;

(2) 记$g(x)=f(x)-a\ln|x|$，若$g(x)$有且仅有2个零点，求a的值.

答案和解析

1.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查交集运算，属基础题.

根据集合的交集运算求解即可.

【解答】

解： 因为$A=\{x|x=2n,n\in Z\}$， $B=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$.

所以$A\cap B=\{0,2,4\}$.

故选D.

2.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查复数除法运算，复数的模，属基础题.

先根据复数的除法运算求出复数z，再求模.

【解答】

解：因为$(1-i)z=-i$，即$z=\dfrac{-i}{1-i}=\dfrac{(-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1-i}{2}$.

所以$|z|=\sqrt{(\dfrac{1}{2})^2+(-\dfrac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故选A

3.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查函数的单调性判断，判断正弦型，余弦型函数的单调性，属基础题.

根据二次函数判断A，反比例函数判断B，根据正弦型函数单调性判断C，根据余弦型函数的单调性判断D.

【解答】

解： 对于A，根据二次函数的性质可得$y=(x-2)^2$在区间$(0,2)$上单调递减，故A错误.

对于B，反比例函数$y=\dfrac{1}{x}$在$(-\infty,0)$上单调递减，

$y=\dfrac{1}{x}$的图象向右平移2个单位可得$y=\dfrac{1}{x-2}$，

故 $y=\dfrac{1}{x-2}$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递减，

故 $y=\dfrac{1}{x-2}$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减，故 *B* 错误.

对于 *C*， $y=\sin(x-2)$ ，由于 $-\pi<-2<x-2<0$ ，

所以函数 $y=\sin(x-2)$ 在 $\left(0,2-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(2-\dfrac{\pi}{2},2\right)$ 上单调递增，故 *C* 错误.

对于 *D*， $y=\cos(x-2)$ ，由于 $-\pi<-2<x-2<0$ ，所以函数 $y=\cos(x-2)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递增，故 *D* 正确.

故选 D.

4.【答案】*A*

【解析】【分析】

本题考查平面向量的数量积运算，考查向量的模，属基础题.

根据数量积的运算及模的运算求解即可.

【解答】

解：因为 $|\overrightarrow{a}|=1$ ， $\left\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right\rangle=\dfrac{\pi}{6}$， $|\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}|=1$.

所以 $\left(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)^2=1$ ，

即 $|\overrightarrow{a}|^2-4|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\left\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right\rangle+4\left|\overrightarrow{b}\right|^2=1$.

可得 $4\left|\overrightarrow{b}\right|^2-2\sqrt{3}\left|\overrightarrow{b}\right|=0$，又 $\left|\overrightarrow{b}\right|\neq0$ ，

解得 $\left|\overrightarrow{b}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故选 A.

5.【答案】*A*

【解析】解析：（函数应用问题）

设梯形的下底边即水渠底部边长 *a* 米，腰长 *x* 米.则梯形的上底边长为 $a+x$ 米，高为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ 米，

梯形面积为： $S_{梯形}=\dfrac{1}{2}(2a+x)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ 平方米.

水渠面积为 $100\times100\times(2x+a)=30000.a=3-2x$.

所以 $S_{梯形}=\dfrac{1}{2}(2a+x)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(-3x^2+6x)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}(x^2-2x)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}(x-1)^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ 平方米.

梯形的高为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 米时，约 0.58 米.即故选 *A*

6.【答案】*C*

【解析】【分析】

本题考查方差计算，属基础题.

先根据平均数计算增加的数据，再计算方差即可.

【解答】

解：设增加的数为 k，原来的 9 个数分别为a_1， a_2， $\cdots$， a_9，

则$a_1+a_2+\cdots+a_9=72$， $a_1+a_2+\cdots+a_9+k=90$，

所以$k=18$，

又因为$\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}(a_i-8)^2=12$，即$\sum_{i=1}^{9}(a_i-8)^2=108$，

所以$\frac{1}{10}[\sum_{i=1}^{9}(a_i-9)^2+(k-9)^2]=\frac{1}{10}[\sum_{i=1}^{9}(a_i-8)^2-2\sum_{i=1}^{9}(a_i-8)+9+81]=19.8$，

故选C.

7.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查球的切接问题，属中档题.

由题设 B，C，M，N 共圆，得到$MN\perp AB$，找到$\triangle A'NM$，四边形 BCMN 外接圆圆心，由棱锥外接球、面面垂直的性质确定球心位置，设$A'N=x$，求外接球半径的最小值，即可得结果.

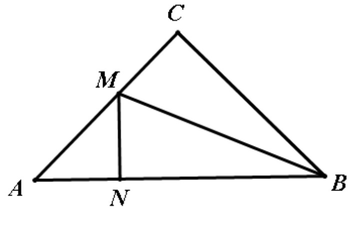
【解答】

解：由点A'，B，C，M，N 均在球 O 的球面上，则四点 B，C，M，N 共圆(M不与 A 重合)，

所以$\angle NMC+\angle B=\angle C+\angle MNB=\pi$($M$不与 C 重合)，

又三角形 ABC 为等腰直角三角形，AB 为斜边，

所以$MN\perp AB$，MB 为四边形 BCMN 的外接圆直径，



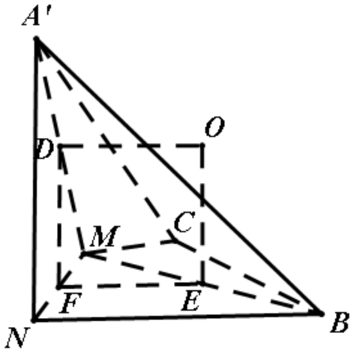
如上图，$\triangle ANM,\triangle BNM,\triangle BCM$都为直角三角形，

由平面图形到立体图形知：$MN\perp A'N$，$MN\perp BN$，

因为平面$A'MN\perp$平面 BCMN，且$A'N\perp MN$，平面$A'MN\cap$平面$BCMN=MN$，$A'N\subset$平面$A'MN$，

所以 $A'N\perp$ 平面 *BCMN*，

同理可得 $BN\perp$ 平面 $A'MN$，



取 *BM* 的中点 *E*，$A'M$ 的中点 *D*，过点 *D* 作 $DO\perp$ 平面 $A'MN$，过 *E* 作 $EO\perp$ 平面 *BCMN*，

它们交于点 *O*，再过 *D* 作 $DF\perp$ 平面 *BCMN*，交 *MN* 于点 *F*，连接 *EF*，则四边形 *EFDO* 为矩形，

所以 $DO=EF=\frac{1}{2}BN$，

设 $A'N=x$，且 $0<x\leqslant 1$，$BN=\sqrt{2}-x$，$A'M=\sqrt{2}x$，

设球半径为 *R*，则$R^2=DO^2+\left(\frac{A'M}{2}\right)^2=\frac{3(x-\frac{\sqrt{2}}{3})^2+\frac{4}{3}}{4}$，

当 $x=\frac{\sqrt{2}}{3}$ 时，R^2 的最小值为 $\frac{1}{3}$，

所以球 *O* 表面积的最小值为 $\frac{4\pi}{3}$.

故 *D* 正确.

8.【答案】*B*

【解析】【分析】

本题考查利用导数比较大小，属较难题.

构造函数，利用导数比较大小，即可解决.

【解答】

解：$a=\frac{10}{11}e^{\frac{1}{11}}=(1-\frac{1}{11})e^{\frac{1}{11}}$，

设 $f(x)=(1-x)e^x$，则 $f'(x)=-xe^x$，

当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(\frac{1}{11})<f(0)=1$，即 $a<1$;

$b=11\ln 1.1=11\ln\frac{11}{10}=-11\ln\left(1-\frac{1}{11}\right)$，

设 $g(x)=-\ln(1-x)-x$，$x\in(0,1)$，

则 $g'(x)=\dfrac{1}{1-x}-1=\dfrac{x}{1-x}$，

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以 $g(\dfrac{1}{11})>g(0)=0$，即 $-\ln\left(1-\dfrac{1}{11}\right)-\dfrac{1}{11}>0$，

所以 $\ln\dfrac{11}{10}>\dfrac{1}{11}$，所以 $11\ln 1.1>1$，即 $b>1$.

先证当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{11}\right]$ 时，$\dfrac{1-x}{x}e^x\ln\dfrac{1}{1-x}>1$，即证 $\dfrac{e^x}{x}>\dfrac{\frac{1}{1-x}}{\ln\frac{1}{1-x}}$，

构造函数 $h(t)=\dfrac{t}{\ln t}$，即证 $h(e^x)>h(\dfrac{1}{1-x})$，

$h^{'}(t)=\dfrac{\ln t-1}{(\ln t)^2}$，令 $h^{'}(t)=0$，解得 $t=e$，

当 $1<t<e$ 时，$h^{'}(t)<0$，所以 $h(t)$ 在 $(1,e)$ 上 单调递减，

由于 $x\in\left(0,\dfrac{1}{11}\right]$,所以 $1<e^x\leqslant e^{\frac{1}{11}}<e$，$1<\dfrac{1}{1-x}\leqslant\dfrac{11}{10}<e$，

且由函数 $f(x)$ 的单调性可知 $e^x<\dfrac{1}{1-x}$，

所以 $h(e^x)>h(\dfrac{1}{1-x})$ 成立，即当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{11}\right]$ 时，$\dfrac{1-x}{x}e^x\ln\dfrac{1}{1-x}>1$ 成立.

取 $x=\dfrac{1}{11}$ 时，有 $ab>1$.

综上可知，$1<ab<b$.

故选 B.

9.【答案】AC

【解析】【分析】

本题考查导数运算，正弦型函数，余弦型函数的性质，属较易题.

求出函数 $f(x)$ 的导数得到 $g(x)$，再利用周期公式求得两函数的周期，判断 A;求出两函数的值域就可判断 B；化简函数 $y=f(x)+g(x)$，再求出函数为奇函数时 φ 的可能取值，判断 C；运用二倍角公式化简函数，求出函数的最值判断 D.

【解答】

解：由于 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ ， $\omega>0$ ，所以 $f'(x)=\omega\cos(\omega x+\varphi)$ ，

则 $g(x)=\omega\cos(\omega x+\varphi)$ ， $g(x)$ 的最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ ，

函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$，故 *A* 正确;

由于 $f(x)\in[-1,1]$ ， $g(x)\in[-\omega,\omega]$ ，当 $\omega\neq1$ 时， $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值域不相同，故 *B* 错误;

$y=f(x)+g(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\omega\cos(\omega x+\varphi)=\sqrt{1+\omega^2}\sin[(\omega x+\varphi)+\beta]$ ，其中 $\tan\beta=\omega$ ，

当 $\varphi+\beta=k\pi$ ， $k\in Z$ 时， $y=f(x)+g(x)$ 是奇函数，故 *C* 正确;

$y=f(x)g(x)=\omega\sin(\omega x+\varphi)\cos(\omega x+\varphi)=\dfrac{\omega}{2}\sin(2\omega x+2\varphi)\in[-\dfrac{\omega}{2},\dfrac{\omega}{2}]$ ，

当 $\omega\neq1$ 时，函数 $y=f(x)g(x)$ 的最大值就不是 $\dfrac{1}{2}$，故 *D* 错误.

故选： AC.

10.【答案】*ABD*

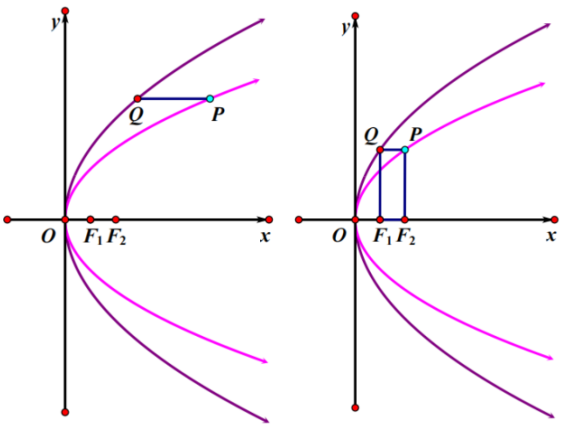
【解析】【分析】

本题考查抛物线的几何性质，属中档题.

根据抛物线的方程以及几何性质求解即可.

【解答】

解：如图所示：



图（1）　　　图（2）

由对称性，不妨设 $P(x_1,y_1)$ ， $Q(x_2,y_1)$ 在第一象限 (图 (1)) ，

则 $\begin{cases} y_1^2=4x_1 \\ y_1^2=8x_2 \end{cases}\Rightarrow x_1=2x_2$ ，

故 $|PQ|=|x_1-x_2|=x_2$;