专题 06 平面向量和复数

目录

明晰学考要求 01

1、理解平面向量的意义和两个向量相等的含义；

2、理解平面向量的几何表示和基本要素；

3、掌握平面向量加、减运算规则，理解其几何意义；

4、了解平面向量的线性运算性质及其几何意义；

5、理解平面向量数量积的概念及其物理意义，会计算平面向量的数量积；

6、了解平面向量投影的概念和意义；

7、会用数量积判断两个向量的垂直关系；

8、理解平面向量基本定理及其意义；

9、掌握平面向量的正交分解及坐标表示；

10、会用坐标表示平面向量加、减运算，数乘运算；

11、能用坐标表示平面向量的数量积，并求两个向量的夹角；

12、能用坐标表示平面向量共线、垂直的条件；

13、掌握余弦定理、正弦定理，并能解决简单的实际问题；

14、理解复数的代数表示及其几何意义，理解两个复数相等的含义；

15、掌握复数代数表示的四则运算，了解复数加法、减法运算的几何意义。

基础知识梳理 02

1、向量的有关概念

（1）向量：既有大小又有方向的量叫做向量；向量的大小叫做向量的长度(或模)

向量表示方法：向量 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\vec{a}$；模 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\vec{a}|$.

（2）零向量：长度等于 0 的向量，方向是任意的，记作 $\vec{0}$.

（3）单位向量：长度等于 1 个单位的向量，常用 $\vec{e}$ 表示.

特别的：非零向量 $\vec{a}$ 的单位向量是 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

（4）平行向量（共线向量）：方向相同或相反的非零向量，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线可记为 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$；

特别的：$\vec{0}$ 与任一向量平行或共线.

（5）相等向量：长度相等且方向相同的向量，记作 $\vec{a}=\vec{b}$.

（6）相反向量：长度相等且方向相反的向量，记作 $\vec{a}=-\vec{b}$.

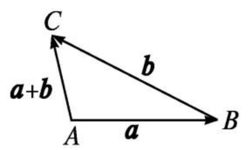
2、向量的线性运算

（1）向量的加法

①定义：求两个向量和的运算，叫做向量的加法. 两个向量的和仍然是一个向量. 对于零向量与任意向量 $\vec{a}$，我们规定 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

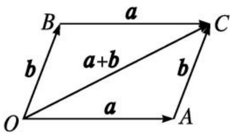
②向量加法的三角形法则(首尾相接，首尾连)

已知非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，在平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，记作 $\vec{a}+\vec{b}$，即 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. 这种求向量和的方法，称为向量加法的三角形法则.



③向量加法的平行四边形法则（作平移，共起点，四边形，对角线）

已知两个不共线向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，以 OA，OB 为邻边作 ▱$OACB$，则以 O 为起点的向量 $\overrightarrow{OC}$（OC 是 ▱$OACB$ 的对角线）就是向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和. 这种作两个向量和的方法叫做向量加法的平行四边形法则.



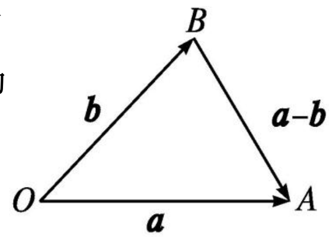
（2）向量的减法

①定义：向量$\vec{a}$加上$\vec{b}$的相反向量，叫做$\vec{a}$与$\vec{b}$的差，即$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

②向量减法的三角形法则（共起点，连终点，指向被减向量）

已知向量$\vec{a}$, $\vec{b}$, 在平面内任取一点O, 作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, 则向量$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$. 如图所示

如果把两个向量$\vec{a}$, $\vec{b}$的起点放在一起, 则$\vec{a}-\vec{b}$可以表示为从向量$\vec{b}$的终点指向向量$\vec{a}$的终点的向量.



（3）向量的数乘

向量数乘的定义:

一般地, 我们规定实数λ与向量$\vec{a}$的积是一个向量, 这种运算叫做向量的数乘, 记作$\lambda\vec{a}$. 它的长度与方向规定如下：

①$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$

②当$\lambda>0$时，$\lambda\vec{a}$的方向与$\vec{a}$的方向相同; 当$\lambda<0$时，$\lambda\vec{a}$的方向与$\vec{a}$的方向相反; 当$\lambda=0$时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

3、共线向量定理

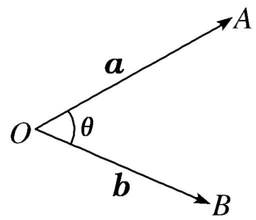
①定义：向量$\vec{b}$与非零向量$\vec{a}$共线，则存在唯一一个实数λ，$\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

②向量共线定理的注意问题：定理的运用过程中要特别注意$\vec{a}\neq\vec{0}$；特别地，若$\vec{a}=\vec{b}=\vec{0}$，实数λ仍存在，但不唯一.

4、向量的夹角

已知两个非零向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，如图所示，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则$\angle AOB=\theta$

($0\leq\theta\leq\pi$)叫做向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，记作$<\vec{a},\vec{b}>$.



(2)范围：夹角θ的范围是$[0,\pi]$.

当$\theta=0$时，两向量$\vec{a}$，$\vec{b}$共线且同向；

当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，两向量$\vec{a}$，$\vec{b}$相互垂直，记作$\vec{a}\perp\vec{b}$；

当$\theta=\pi$时，两向量$\vec{a}$，$\vec{b}$共线但反向.

5、数量积的定义：

已知两个非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，我们把数量$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$叫做$\vec{a}$与$\vec{b}$的数量积(或内积)，记作$\vec{a}\cdot\vec{b}$，即$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，其中$\theta$是$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，记作：$\theta=<\vec{a},\vec{b}>$.

规定：零向量与任一向量的数量积为零．记作：$\vec{0}\cdot\vec{a}=0$.

6、平面向量的基本定理

（1）定理：如果 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这个平面内任意向量 $\vec{a}$，有且只有一对实数 λ_1，λ_2，使 $\vec{a}=\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}$.

（2）基底：

不共线的向量 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底.

（1）不共线的两个向量可作为一组基底，即 $\vec{0}$ 不能作为基底；

（2）基底一旦确定，分解方式唯一；

（3）$\vec{a}$ 用基底 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 两种表示，即 $\vec{a}=\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}=\mu_1\vec{e_1}+\mu_2\vec{e_2}$，则 $\begin{cases}\lambda_1=\mu_1\\ \lambda_2=\mu_2\end{cases}$，进而求参数.

7、平面向量的坐标运算

（1）向量加减：若 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，则 $\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2)$；

（2）数乘向量：若 $\vec{a}=(x,y)$，则 $\lambda\vec{a}=(\lambda x,\lambda y)$；

（3）任一向量：设 $A=(x_1,y_1),B=(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$.

8、平面向量共线的坐标表示

若 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，则 $\vec{a}\parallel\vec{b}$ 的充要条件为 $x_1y_2-x_2y_1=0$

9、平面向量数量积的性质及其坐标表示

已知向量 $\vec{\boldsymbol{a}}=(x_1,y_1),\vec{\boldsymbol{b}}=(x_2,y_2)$，$\theta$ 为向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角：

（1）数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2$

（2）模：$|\vec{\boldsymbol{a}}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

（3）夹角：$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

（4）非零向量 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 的充要条件：$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

10、正弦定理

（1）正弦定理的描述

①文字语言：在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等.

②符号语言：在 ΔABC 中， 若角 A、B 及 C 所对边的边长分别为 a，b 及 c，则有 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

（2）正弦定理的推广及常用变形公式

在 ΔABC 中， 若角 A、B 及 C 所对边的边长分别为 a，b 及 c，其外接圆半径为 R，则

①$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

②$a\sin B=b\sin A$；$b\sin C=c\sin B$；$a\sin C=c\sin A$；③$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

④$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{a+c}{\sin A+\sin C}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=2R$

⑤$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$（可实现边到角的转化）

⑥$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$（可实现角到边的转化）

11、余弦定理

（1）余弦定理的描述

①文字语言：三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍.

②符号语言：在ΔABC中，内角A,B,C，所对的边分别是a,b,c，则：

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$；

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

（2）余弦定理的推论

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$；

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$；

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

12、三角形常用面积公式

①$S=\frac{1}{2}\times底\times高$；

②$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$；

③$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$（其中，a,b,c是三角形ABC的各边长，r是三角形ABC的内切圆半径）；

④$S=\frac{abc}{4R}$(其中，a,b,c是三角形ABC的各边长，R是三角形ABC的外接圆半径).

13、复数的概念

我们把形如$a+bi,a,b\in R$的数叫做复数,其中i叫做虚数单位,满足$i^2=-1$.全体复数所构成的集合$C=\{a+bi\mid a,b\in R\}$叫做复数集.

复数的表示:复数通常用字母z表示,即$z=a+bi,a,b\in R$,其中的a与b分别叫做复数z

的实部与虚部.

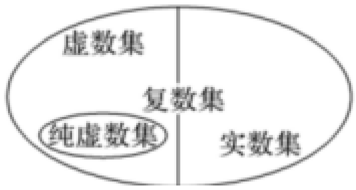
14、复数相等

在复数集 $C=\{a+bi\,|\,a,b\in R\}$ 中任取两个数 $a+bi$，$c+di$，（$a,b,c,d\in R$），我们规定 $a+bi=c+di\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$.

15、复数的分类

对于复数 $a+bi$ ($a,b\in R$), 当且仅当 $b=0$ 时, 它是实数；当且仅当 $a=b=0$ 时, 它是实数 0；当 $b\neq 0$ 时, 它叫做虚数；当 $a=0$ 且 $b\neq 0$ 时, 它叫做纯虚数. 这样, 复数 $z=a+bi$ ($a,b\in R$) 可以分类如下：

$$\text{复数}\begin{cases}\text{实数}\ (b=0)\\ \text{虚数}\ (b\neq 0)\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0)\\ \text{非纯虚数}\ (a\neq 0)\end{cases}\end{cases}$$



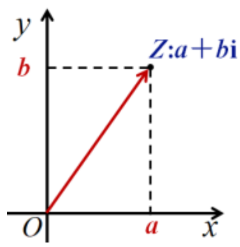
16、复数的几何意义

（1）复数的几何意义——与点对应

复数的几何意义 1：复数 $z=a+bi$ ($a,b\in R$) $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 复平面内的点 $Z(a,b)$

（2）复数的几何意义——与向量对应

复数的几何意义 2：复数 $z=a+bi$ ($a,b\in R$) $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 平面向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,b)$



17、复数的模

向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模叫做复数 $z=a+bi$ $a,b\in R$) 的模，记为 $|z|$ 或 $|a+bi|$

公式：$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$，其中 $a,b\in R$

复数模的几何意义：复数 $z=a+bi$ 在复平面上对应的点 $Z(a,b)$ 到原点的距离；

特别的，$b=0$ 时，复数 $z=a+bi$ 是一个实数，它的模就等于 $|a|$ (a 的绝对值).

18、共轭复数

（1）定义

一般地，当两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数叫做互为共轭复数；虚部不等于 0 的两个共轭复数也叫共轭虚数.

（2）表示方法

表示方法：复数 z 的共轭复数用 $\overline{z}$ 表示，即如果 $z=a+bi$，则 $\overline{z}=a-bi$.

19、复数的四则运算

（1）复数的加法法则

设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$，（$a,b,c,d\in R$）是任意两个复数，那么它们的和：

$z_1+z_2=(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(c+d)\mathrm{i}$ （2）复数的减法法则

类比实数集中减法的意义，我们规定，复数的减法是加法的逆运算，即把满足：$(c+di)+(x+yi)=a+bi$ 的复数 $x+yi$ 叫做复数 $a+bi$ 减去复数 $c+di$ 的差，记作 $(a+bi)-(c+di)$

（3）复数的乘法法则

我们规定，复数乘法法则如下： 设 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ 是任意两个复数，那么它们的乘积为

$z_1z_2=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$，

即 $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

（4）复数的除法法则

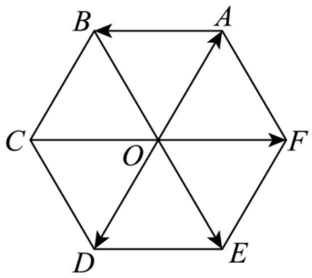
$(a+bi)\div(c+di)=\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$（$c+di\neq0$）

考点精讲精练 03

考点一：平面向量的概念

【典型例题】

例题 1．（2023 广西）如图，O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，下列向量中，与 $\overrightarrow{AB}$ 是平行向量的为（　）



A．$\overrightarrow{OD}$　　B．$\overrightarrow{OA}$　　C．$\overrightarrow{OF}$　　D．$\overrightarrow{OE}$

【答案】C

【知识点】平行向量（共线向量）

【分析】根据平行向量的定义判断即可.

【详解】方向相同或相反的非零向量叫做平行向量，也叫共线向量.

由图可知，$\overrightarrow{OF}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相反，因此是平行向量.

故选：C.

例题 2．（2023 黑龙江）下列量中是向量的为（　）

A．频率 B．拉力 C．体积 D．距离【答案】B

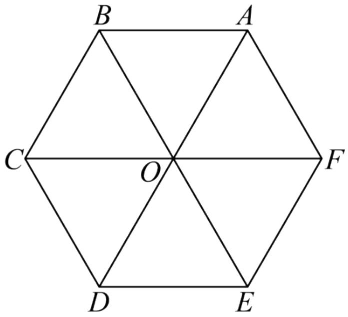
【知识点】平面向量的概念与表示

【分析】根据向量与数量的意义直接判断即可.

【详解】显然频率、体积、距离，它们只有大小，不是向量，而拉力既有大小，又有方向，所以拉力是向量.

故选：B

例题 3．（2023 北京）如图，点 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心，下列向量中，与 $\overrightarrow{OA}$ 相等的是（　）



A．$\overrightarrow{DO}$　　B．$\overrightarrow{EO}$　　C．$\overrightarrow{FO}$　　D．$\overrightarrow{CO}$

【答案】A

【知识点】相等向量

【分析】根据相等向量的定义即可得答案.

【详解】解：因为相等向量是指长度相等且方向相同的向量,O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心，

所以 $\overrightarrow{DO}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 模相等求且方向相同，所以是相等向量，故 A 正确；

$\overrightarrow{EO}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 只是模相等的向量，故 B 错误；

$\overrightarrow{FO}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 只是模相等的向量，故 C 错误；

$\overrightarrow{CO}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 只是模相等的向量，故 D 错误.

故选：A.

【即时演练】

1．判断下列各命题的真假：①向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同或相反；②两个有共同起点而且相等的向量，其终点必相同；③零向量是没有方向的；④有向线段就是向量，向量就是有向线段．其中假命题的个数为（　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

【答案】B

【知识点】零向量与单位向量、平行向量（共线向量）、判断命题的真假

【分析】根据零向量的定义及共线向量的定义判断即可得.

【详解】对①：因为零向量的方向是任意的且零向量与任何向量共线，

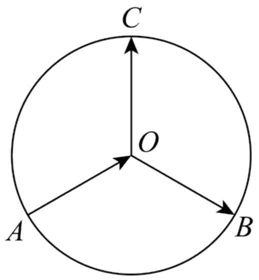
故当与中有一个为零向量时，其方向是不确定的，故为假命题；对②：两个有共同起点而且相等的向量，其终点必相同，故为真命题；

对③：零向量也是向量，故也有方向，只是方向是任意的，故为假命题；

对④：向量可用有向线段来表示，但并不是有向线段，故为假命题.

故选：B.

2．如图，在圆O中，向量$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{AO}$是（　）



A．有相同起点的向量　　　　B．相反向量

C．模相等的向量　　　　D．相等向量

【答案】C

【知识点】相等向量、平行向量（共线向量）、平面向量的概念与表示、向量的模

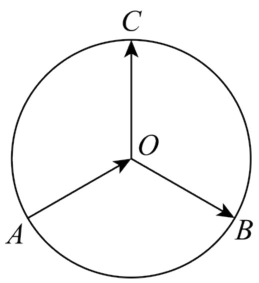
【分析】根据向量的几何表示，可判断出选项 A 和 C 的正误，再利用相反向量及相等向量的概念，结合图形，即可判断选项 B 和 D 的正误.

【详解】对于选项 A，因为向量$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$的起点为O，而向量$\overrightarrow{AO}$的起点为A，所以选项 A 错误，

对于选项 B，因为相反向量是方向相反，长度相等的向量，而向量$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{AO}$方向不同，所以选项 B 错误，

对于选项 C，向量$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{AO}$的模长均为圆O的半径，所以选项 C 正确，

对于选项 D，因为相等向量是方向相同，长度相等的向量，而向量$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{AO}$方向不同，所以选项 D 错误，



故选：C.

3．（多选）下列说法正确的是（　）

A．零向量是没有方向的向量　　　　B．零向量的长度为 0

C．相等向量的方向相同　　　　D．同向的两个向量可以比较大小

【答案】BC

【知识点】零向量与单位向量、相等向量【分析】利用零向量的定义及相等向量的定义，可判断出选项 A、B 和 C 的正误，再由向量的定义知选项 D 错误.

【详解】对于选项 A，因为零向量的方向是任意的，所以选项 A 错误，

对于选项 B，因为零向量是方向任意，长度为 0 的向量，所以选项 B 正确，

对于选项 C，因为相等向量是方向相同，长度相等的向量，所以选项 C 正确，

对于选项 D，向量不能比较大小，向量的模长可以比较大小，所以选项 D 错误，

故选：BC.

考点二：平面向量的运算

【典型例题】

例题 1．（2022 河北）已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=3$，则$|\vec{a}-\vec{b}|=$（　）

A．$\sqrt{11}$　　B．$\sqrt{10}$　　C．3　　D．2

【答案】A

【知识点】已知数量积求模、已知模求数量积

【分析】将$|\vec{a}+\vec{b}|,|\vec{a}-\vec{b}|$分别进行平方，借助$2\vec{a}\cdot\vec{b}$的值联系起它们的关系，从而求解.

【详解】由题知，$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=9=1^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2$，

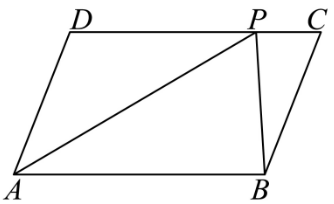
则$2\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=1^2-(-1)+3^2=11$，

则$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{11}$.

故选：A

例题 2．（2024 湖北）如图，平行四边形$ABCD$中，P是CD边上的一点，则（　）



A．$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PA}$　　B．$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{DP}$

C．$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PA}$　　D．$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{BA}$

【答案】B

【知识点】向量加法的法则、向量减法的法则

【分析】根据向量线性运算化简求解即可.【详解】$\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PA}$，故 A 错误；$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{DP}$，故 B 正确；

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}$，故 C 错误；$\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{BA}$，故 D 错误.

故选：B

例题 3．（2024 安徽）已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}, |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1$，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 上的投影向量为（　）

A．$\vec{b}$　　B．$\sqrt{3}\vec{b}$　　C．$\vec{a}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}$

【答案】B

【知识点】求投影向量、用定义求向量的数量积

【分析】应用投影向量公式结合数量积公式计算即可.

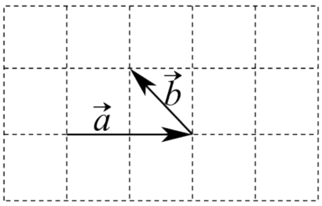
【详解】向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 上的投影向量为

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\times\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{6}}{|\vec{b}|}\times\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$=|\vec{a}|\cos\frac{\pi}{6}\times\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\vec{b}}{1}=\sqrt{3}\vec{b}.$$

故选：B.

例题 4．（2024 北京）已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 在正方形网格中的位置如图所示.若网格中每个小正方形的边长均为 1，则 $|\vec{a}|=$______；$\vec{a}\cdot\vec{b}=$______.



【答案】　2　-2

【知识点】向量的模、用定义求向量的数量积

【分析】向量的模长即向量起点至终点的距离，由图可知结果；向量的数量积等于向量的模乘以另一个向量在这个向量上的投影，由图可知结果.

【详解】由图可知 $|\vec{a}|=2$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$，其中 $|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ 为 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影，

由图可知投影长度为 1，且方向与 $\vec{a}$ 相反，

故 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=2\times(-1)=-2$.

故答案为：2；-2.

【即时演练】1．已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}^2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{b}|$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（　）

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{6}$　　D．$\frac{2\pi}{3}$

【答案】A

【知识点】数量积的运算律、向量夹角的计算

【分析】掌握平面向量的数量积$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$.

【详解】$\because |\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{b}|$,

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{b}|^2$,

$\therefore \vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{b}^2$,

又$\because \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}^2$,

$\therefore \vec{a}^2=2\vec{b}^2$,即$|\vec{a}|=\sqrt{2}|\vec{b}|$,

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\sqrt{2}|\vec{b}|^2\cos\theta=\vec{b}^2$,

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\because \theta\in(0,\pi)$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{4}$.

故选：A.

2. $\dfrac{1}{2}(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})-3(\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c})=$（　）

A. $-\dfrac{5}{2}\vec{a}-4\vec{c}$　　B. $-\dfrac{5}{2}\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c}$

C. $-\dfrac{5}{2}\vec{a}+7\vec{b}+\dfrac{3}{2}\vec{c}$　　D. $-\dfrac{5}{2}\vec{a}+5\vec{b}-\dfrac{9}{2}\vec{c}$

【答案】C

【知识点】平面向量的混合运算、空间向量加减运算的几何表示

【分析】根据向量的加减法即可得到答案.

【详解】$\dfrac{1}{2}(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})-3(\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c})=-\dfrac{5}{2}\vec{a}+7\vec{b}+\dfrac{3}{2}\vec{c}$.

故选：C.

3. 在▱$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=2\vec{a},\overrightarrow{AD}=3\vec{b}$，则$\overrightarrow{AC}=$（　）

A. $\vec{a}+\vec{b}$　　B. $\vec{a}-\vec{b}$

C. $2\vec{a}+3\vec{b}$　　D. $2\vec{a}-3\vec{b}$【答案】C

【知识点】向量加法的法则

【分析】根据给定条件，利用向量加法的平行四边形法则求解即得.

【详解】在▱$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=2\vec{a},\overrightarrow{AD}=3\vec{b}$，则$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\vec{a}+3\vec{b}$.

故选：C

4. 已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=4$且向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$,则 $2\vec{a}+\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影数量为____.

【答案】8

【知识点】用定义求向量的数量积、数量积的运算律

【分析】利用数量积来计算投影数量即可.

【详解】因为$|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=4$且向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$,

所以$\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=2\vec{a}^2+\vec{b}\cdot\vec{a}=2\times9+3\times4\times\dfrac{1}{2}=24$，

则$2\vec{a}+\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影数量为：$\dfrac{\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{24}{3}=8$，

故答案为：8.

考点三：平面向量基本定理

【典型例题】

例题 1. （2020 河北）在$\triangle ABC$中，点P是边BC上一点，若$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，则实数$\lambda=$（　）

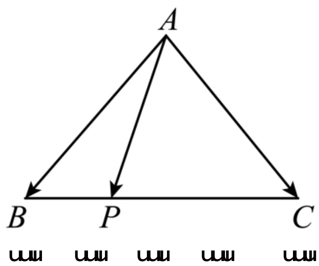
A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

【答案】D

【知识点】向量的线性运算的几何应用、平面向量共线定理的推论、利用平面向量基本定理求参数

【分析】利用向量共线定理设$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BC}$，$\mu>0$，通过线性运算得$\overrightarrow{AP}=(1-\mu)\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，结合题目条件得到方程组，解出即可.

【详解】作出如图所示图形：



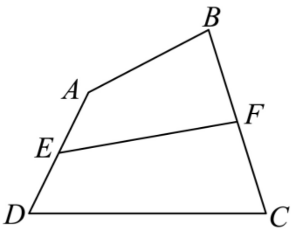
$\because B,P,C$三点共线，故可设$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BC}$，$\mu>0$，则

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\mu\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=(1-\mu)\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，

$\because\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，$\therefore\begin{cases}1-\mu=\dfrac{1}{4}\\ \mu=\lambda\end{cases}$，解得$\lambda=\dfrac{3}{4}$.

故选：D.

例题 2．（2023 湖北）如图，在任意四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AD，BC 的中点，且 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{EF}$，则实数 $\lambda=$（　）



A．$\frac{3}{2}$　　B．2　　C．$\frac{5}{2}$　　D．3

【答案】B

【知识点】平面向量基本定理的应用、向量的线性运算的几何应用、向量加法法则的几何应用

【分析】先将 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD},\overrightarrow{EF}$ 分别用 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CB}$ 表示，再结合题意即可得解.

【详解】$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$，

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，

所以 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{EF}$，

又因为 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{EF}$，

所以 $\lambda=2$.

故选：B.

例题 3．（2022 浙江）在 $\triangle ABC$ 中，设 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{FA}$，其中 $\lambda\in\mathrm{R}$.若 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 的重心重合，则 $\lambda=$（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．$\frac{3}{2}$　　D．2

【答案】D

【知识点】平面向量基本定理的应用

【分析】设 O 为 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 的重心，连接 DO 延长交 EF 与 N，连接 AO 延长交 BC 与 M，分别在 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 中用向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 表示向量 $\overrightarrow{DO}$，再根据向量相等可得答案.

【详解】设 O 为 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 的重心，连接 DO 延长交 EF 与 N，连接 AO 延长交 BC 与 M，

所以 N 是 EF 的中点，M 是 BC 的中点，所以 $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AO}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

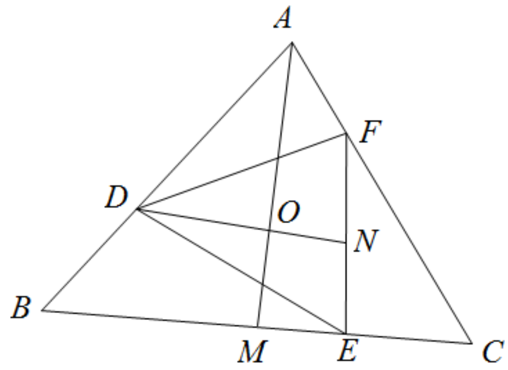
$\overrightarrow{DO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DN}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}\right)$

$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AC}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AC}\right]$

$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{1+\lambda}\right)\overrightarrow{AC}$，

可得$1=\frac{2}{3}+\frac{1}{1+\lambda}$，解得$\lambda=2$.

故选：D.



例题 4．（2022 安徽）在$\triangle ABC$中，点 D 在边 BC 上，且$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，若$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AB}$，则$\frac{\lambda}{\mu}=$__________.

【答案】2

【知识点】利用平面向量基本定理求参数

【分析】根据题意，结合向量的加减法用$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$表示出$\overrightarrow{AD}$，求出λ与μ即可.

【详解】由$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，得$\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，

则在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

因$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AB}$，故$\begin{cases}\lambda=\frac{2}{3}\\ \mu=\frac{1}{3}\end{cases}$，因此$\frac{\lambda}{\mu}=2$.

故答案为：2.

【即时演练】

1．在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BC}$，则$\overrightarrow{EF}=$（　）

A．$2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$　　B．$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

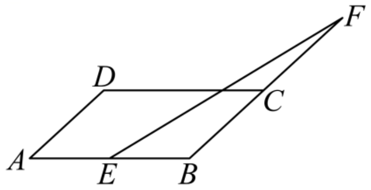
C．$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$　　D．$2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$

【答案】C

【知识点】用基底表示向量

【分析】由平面向量的基本定理求解即可.

【详解】



如图：$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$.

故选：C

2．已知在$\triangle ABC$中，M是线段BC上异于端点的任意一点．若向量$\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$，则$\frac{2}{a}+\frac{8}{b}$的最小值为（　）

A．6　　　　B．12　　　　C．18　　　　D．24

【答案】C

【知识点】条件等式求最值、平面向量共线定理的推论、基本不等式“1”的妙用求最值

【分析】根据三点共线的结论可得$a+b=1$，将$\frac{2}{a}+\frac{8}{b}$化为$\left(\frac{2}{a}+\frac{8}{b}\right)(a+b)$，展开后利用基本不等式，即可得答案.

【详解】由题意M是线段BC上异于端点的任意一点，向量$\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$可得$a+b=1$，

且$a>0$，$b>0$，所以$\frac{2}{a}+\frac{8}{b}=\left(\frac{2}{a}+\frac{8}{b}\right)(a+b)=2+\frac{2b}{a}+\frac{8a}{b}+8\geq 2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{8a}{b}}+10=18$，

当且仅当$\frac{2b}{a}=\frac{8a}{b}$，结合$a+b=1$，即$a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{2}{3}$时，等号成立，

故$\frac{2}{a}+\frac{8}{b}$的最小值为18.

故选：C

3．在$\triangle ABC$中，点D是边BC上一点，若$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则$\frac{2x+5y}{xy}$的最小值为（　）

A．$7-2\sqrt{10}$　　　　B．$7+2\sqrt{10}$　　　　C．$-2\sqrt{10}$　　　　D．7

【答案】B

【知识点】平面向量共线定理的推论、基本不等式“1”的妙用求最值【分析】根据给定条件，利用共线向量定理的推论求得$x+y=1$，$x>0$，$y>0$.，再利用基本不等式“1”的妙用求出最小值.

【详解】在$\triangle ABC$中，点D是边BC上一点，$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则$x+y=1$，$x>0$，$y>0$.

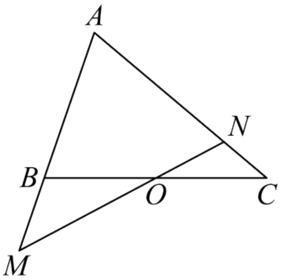
$\frac{2x+5y}{xy}=(\frac{5}{x}+\frac{2}{y})(x+y)=7+\frac{5y}{x}+\frac{2x}{y}\geq 7+2\sqrt{\frac{5y}{x}\cdot\frac{2x}{y}}=7+2\sqrt{10}$，

当且仅当$\frac{5y}{x}=\frac{2x}{y}$，即$x=\frac{5-\sqrt{10}}{3},y=\frac{\sqrt{10}-2}{3}$时取等号，

所以$\dfrac{2x+5y}{xy}$的最小值为$7+2\sqrt{10}$.

故选：B

4．如图，在$\triangle ABC$中，点O是BC的中点，过点O的直线分别交直线AB，AC于不同的两点M、N，若$\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AN}$，则$\lambda=$______.



【答案】$\frac{4}{3}$/$1\frac{1}{3}$

【知识点】用基底表示向量、平面向量共线定理的推论

【分析】根据给定条件，利用中点向量公式，结合共线向量定理的推论列式计算即得.

【详解】在$\triangle ABC$中，点O是BC的中点，则$\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

又$\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AN}$，则$\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AM}+\dfrac{\lambda}{2}\overrightarrow{AN}$，

而点M,O,N共线，因此$\dfrac{1}{3}+\dfrac{\lambda}{2}=1$，所以$\lambda=\dfrac{4}{3}$.

故答案为：$\dfrac{4}{3}$

考点四：平面向量坐标运算

【典型例题】

例题1．（2024福建）已知$\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(m,-1)$，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$m$的值为（　）A．$-2$　B．$-\dfrac{1}{2}$　C．$\dfrac{1}{2}$

D．2

【答案】D

【知识点】利用向量垂直求参数

【分析】根据向量垂直的坐标表示，列式求解，即得答案.

【详解】由题意知$\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(m,-1)$，$\vec{a}\perp\vec{b}$，

故$1\times m-2=0$，

所以$m=2$，

故选：D

例题 2．（2024 湖北）已知向量 $\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(0,1)$，则 $2\vec{a}+3\vec{b}=$（　）

A．$(2,-3)$　　B．$(-2,-3)$　　C．$(-2,3)$　　D．$(2,3)$

【答案】D

【知识点】平面向量线性运算的坐标表示

【分析】运用向量的坐标运算计算即可.

【详解】已知向量 $\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(0,1)$，则 $2\vec{a}+3\vec{b}=2(1,0)+3(0,1)=(2,3)$.

故选：D.

例题 3．（多选）（2024 湖北）已知向量 $\vec{a}=(1,1),\vec{b}=(1,-1)$，则（　）

A．$\vec{a}=\vec{b}$　　B．$|\vec{a}|=|\vec{b}|$　　C．$\vec{a}\perp\vec{b}$　　D．$\vec{a}//\vec{b}$

【答案】BC

【知识点】由坐标判断向量是否共线、垂直关系的向量表示、坐标计算向量的模

【分析】根据向量的坐标可判断 A；计算向量的模判断 B；根据向量垂直以及平行的坐标表示可判断 CD.

【详解】由于 $\vec{a}=(1,1),\vec{b}=(1,-1)$，则 $\vec{a}\neq\vec{b}$，A 错误；

由于 $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，B 正确，

因为 $1\times1+1\times(-1)=0$，故 $\vec{a}\perp\vec{b}$，C 正确；

因为 $1\times(-1)-1\times1\neq0$，故 $\vec{a},\vec{b}$ 不平行，D 错误；

故选：BC

例题 4．（2024 新疆）已知向量 $\vec{a}=(-5,7),\vec{b}=(-1,3),\vec{c}=(-2,2)$.

(1)若 $\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$，求实数 m,n 的值；

(2)若 $(2\vec{a}+k\vec{c})\perp(\vec{b}+\vec{c})$，求实数 k 的值.

【答案】(1) $m=1,n=2$

(2) $-\frac{25}{4}$【知识点】平面向量线性运算的坐标表示、由向量线性运算结果求参数、向量垂直的坐标表示

【分析】（1）利用向量线性运算的坐标表示和相等向量的定义得到关于 m,n 的方程组，解之即可得解；

（2）用向量线性运算的坐标表示求得 $2\vec{a}+k\vec{c}$ 与 $\vec{b}+\vec{c}$，再利用向量垂直的坐标表示即可得解.

【详解】（1）因为 $\vec{a}=(-5,7),\vec{b}=(-1,3),\vec{c}=(-2,2)$，$\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$，

所以 $(-5,7)=m(-1,3)+n(-2,2)=(-m-2n,3m+2n)$，

所以 $\begin{cases}-m-2n=-5\\3m+2n=7\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=1\\n=2\end{cases}$，

所以 $m=1,n=2$

（2）因为$(2\vec{a}+k\vec{c})\perp(\vec{b}+\vec{c})$，则$(2\vec{a}+k\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c})=0$，

又$2\vec{a}+k\vec{c}=(-10,14)+(-2k,2k)=(-10-2k,14+2k)$，$\vec{b}+\vec{c}=(-3,5)$，

所以$-3(-10-2k)+5(14+2k)=0$，解得$k=-\frac{25}{4}$，

故实数k的值为$-\frac{25}{4}$.

【即时演练】

1．已知向量$\vec{a}=(-1,3)$，$\vec{b}=(2,0)$，$\vec{c}=(1,3)$，若$\vec{a}$与$\lambda\vec{b}-\vec{c}$平行，则实数λ的值为（　）

A．-3　　B．-1　　C．1　　D．3

【答案】C

【知识点】由向量共线（平行）求参数

【分析】由平面向量共线的坐标表示求解即可.

【详解】因为$\vec{a}=(-1,3)$，$\vec{b}=(2,0)$，$\vec{c}=(1,3)$，所以$\lambda\vec{b}-\vec{c}=\lambda(2,0)-(1,3)=(2\lambda-1,-3)$，

由$\vec{a}$与$\lambda\vec{b}-\vec{c}$平行，得$3(2\lambda-1)-(-1)\times(-3)=0$，解得$\lambda=1$.

故选：C.

2．已知向量$\vec{a}=(4,-2)$，$\vec{b}=(2,x)$．若$\vec{a}//(2\vec{a}-\vec{b})$，则$x=$______.

【答案】-1

【知识点】平面向量线性运算的坐标表示、由向量共线（平行）求参数

【分析】先求出$2\vec{a}-\vec{b}$的坐标，再由$\vec{a}//(2\vec{a}-\vec{b})$根据向量平行的坐标性质后可求出$x$的值.

【详解】$\because\vec{a}=(4,-2)$，$\vec{b}=(2,x)$，$\therefore 2\vec{a}-\vec{b}=(6,-4-x)$，

由$\vec{a}//(2\vec{a}-\vec{b})$得$4\times(-4-x)=-12$，解得$4\times(-4-x)=-12$，解得$x=-1$.

故答案为：-1.

3．已知向量$\vec{a}=(-1,2)$，$\vec{b}=(m,-4)$．若$\vec{a}\perp(\vec{a}+\vec{b})$，则$m=$_______.　【答案】$-3$

【知识点】向量垂直的坐标表示

【分析】利用非零向量垂直时数量积为0，计算即可.

【详解】$\vec{a}+\vec{b}=(m-1,-2)$．因为$\vec{a}\perp(\vec{a}+\vec{b})$，所以$-(m-1)-2\times2=0$，解得$m=-3$.

故答案为：-3.

4．已知向量$\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(3,2)$.

(1)求向量$\vec{a}+3\vec{b},4\vec{a}-2\vec{b}$的坐标；

(2)求$\vec{a}+\vec{b}$向量的模.

【答案】(1)$\vec{a}+3\vec{b}=(10,6)$，$4\vec{a}-2\vec{b}=(-2,-4)$

(2) $2\sqrt{5}$

【知识点】平面向量线性运算的坐标表示、坐标计算向量的模

【分析】（1）根据向量的坐标运算求得正确答案.

（2）先求得 $\vec{a}+\vec{b}$，然后求得 $\vec{a}+\vec{b}$ 的模.

【详解】（1）依题意，向量 $\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(3,2)$，

$\vec{a}+3\vec{b}=(1,0)+(9,6)=(10,6)$，

$4\vec{a}-2\vec{b}=(4,0)-(6,4)=(-2,-4)$.

（2）由于 $\vec{a}+\vec{b}=(4,2)$，

所以 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

考点五：平面向量数量积

【典型例题】

例题 1．（2022 河北）已知向量 $\vec{a}=(3,1),\vec{b}=(2,-4)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　）

A．2　　B．-2　　C．10　　D．-10

【答案】A

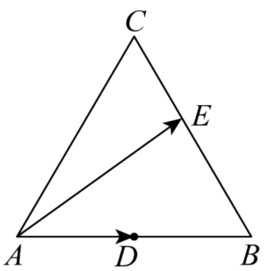
【知识点】数量积的坐标表示

【分析】根据平面向量数量积的坐标表示计算即可求解.

【详解】由题意知，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2+1\times(-4)=2$.

故选：A.

例题 2．（2024 浙江）已知 $\triangle ABC$ 的边长均为 1，点 D 为边 AB 的中点，点 E 为边 BC 上的动点，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$ 的取值范围是（　）



A．$\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right]$　　B．$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$　　C．$\left[\frac{1}{2},1\right]$　　D．$\left[\frac{1}{4},1\right]$

【答案】B

【知识点】数量积的坐标表示

【分析】以 D 为坐标原点，建立平面直角坐标系，设 $\overrightarrow{CE}=t\overrightarrow{CB}\left(0\le t\le1\right)$，利用坐标法计算数量积，结合 t 的取值范围，即可得解.

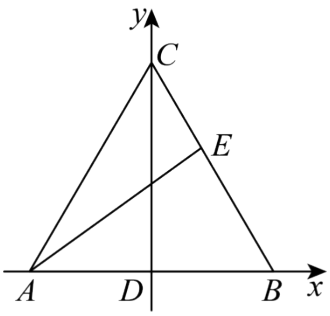
【详解】如图以 D 为坐标原点，建立平面直角坐标系，则 $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$B\left(\frac{1}{2},0\right)$，$C\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$D(0,0)$，

设 $\overrightarrow{CE}=t\overrightarrow{CB}(0\le t\le 1)$，则 $\overrightarrow{CE}=t\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}t,-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$，

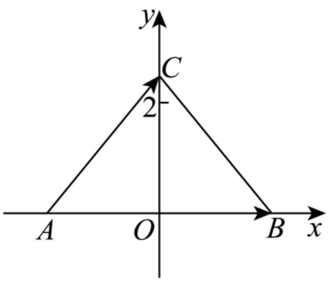
所以 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AD}=\left(\frac{1}{2},0\right)$，

所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}(t+1)\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$.

故选：B



例题 3．（2024 湖南）如图，已知点$A(-2,0)$，$B(2,0)$，点 C 是 y 轴上的动点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$（　）



A．2　　B．4　　C．6　　D．8【答案】D

【知识点】数量积的坐标表示

【分析】根据数量积的坐标表示求解即可.

【详解】设 $C(0,m)$，

则 $\overrightarrow{AB}=(4,0),\overrightarrow{AC}=(2,m)$，

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(4,0)\cdot(2,m)=8$.

故选：D

例题 4．（2020 山东）若向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1,\vec{b}=(-2,2),\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　）

A．-2　　B．$-\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

【答案】A

【知识点】用定义求向量的数量积、向量模的坐标表示

【分析】求出$|\vec{b}|$，再根据数量积定义运算.

【详解】$\because \vec{b}=(-2,2)$，$\therefore |\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=1\times 2\sqrt{2}\times\cos\frac{3\pi}{4}=2\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2$.

故选：A.

例题 5．（2024 天津）已知向量$\vec{a}=(-1,2)$，$\vec{b}=(1,-2)$，$\vec{c}=(2,x)$.

(1)若$\vec{a}\perp\vec{c}$，求x的值；

(2)若$\vec{c}//\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$，求$|\vec{c}|$的值.

【答案】(1) $x=1$

(2) $|\vec{c}|=2\sqrt{5}$.

【知识点】由向量共线（平行）求参数、已知向量垂直求参数、数量积的坐标表示、向量垂直的坐标表示

【分析】（1）依题意可得$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，根据数量积的坐标表示得到方程，解得即可；

（2）首先求出$2\vec{a}+\vec{b}$的坐标，根据向量共线的坐标表示求出x，即可求出$\vec{c}$，再计算其模.

【详解】（1）因为$\vec{a}=(-1,2)$，$\vec{c}=(2,x)$，

由$\vec{a}\perp\vec{c}$，可得$\vec{a}\cdot\vec{c}=-2+2x=0$，解得$x=1$.

（2）依题意$2\vec{a}+\vec{b}=2(-1,2)+(1,-2)=(-1,2)$，

若$\vec{c}//\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$，则有$-x=2\times 2$，解得$x=-4$，

所以$\vec{c}=(2,-4)$，$|\vec{c}|=2\sqrt{5}$.

【即时演练】1．已知向量$\vec{a}=(3,4)$，向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$|\vec{a}-\vec{b}|$的最小值为（　）

A．3　　B．4　　C．$\frac{5}{2}$　　D．$\frac{5\sqrt{3}}{2}$

【答案】D

【知识点】已知数量积求模、坐标计算向量的模

【分析】把$|\vec{a}-\vec{b}|$平方转化为数量积运算，结合二次函数知识得最小值.

【详解】设$|\vec{b}|=x$，又$|\vec{a}|=5$，

所以$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{25-2\times 5x\cos\frac{\pi}{3}+x^2}=\sqrt{x^2-5x+25}=\sqrt{(x-\frac{5}{2})^2+\frac{75}{4}}$，

所以当$x=\frac{5}{2}$时，$|\vec{a}-\vec{b}|_{\min}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，

故选：D.