专题 6.3　反比例函数中的存在性问题专项训练（30 道）

【浙教版】

考卷信息：

本套训练卷共 30 题，针对性较高，覆盖面广，选题有深度，可加强学生对反比例函数中的存在性问题的理解！

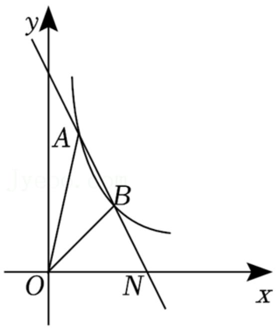
一．解答题（共 30 小题）

1．（2022 春•张家川县期末）如图，一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）与反比例函数 $y=\frac{4}{x}$（$x>0$）的图象交于 A（m，4），B（2，n）两点，与 x 轴相交于 N 点．

（1）求一次函数的表达式；

（2）求△AOB 的面积；

（3）在直线 AB 上是否存在点 P，使得 $S_{\triangle ONP}=3S_{\triangle AOB}$，若存在，求出 P 点的坐标，若不存在，请说明理由．



【分析】（1）将点 A、点 B 的坐标分别代入解析式即可求出 m、n 的值，从而求出两点坐标；

（2）将△AOB 的面积转化为 $S_{\triangle AON}-S_{\triangle BON}$ 的面积即可；

（3）设 P（m，$-2m+6$），根据 $S_{\triangle ONP}=3S_{\triangle AOB}$，列出 m 方程进行解答便可．

【解答】解：（1）∵点 A 在反比例函数 $y=\frac{4}{x}$上，

∴$\frac{4}{m}=4$，解得 $m=1$，

∴点 A 的坐标为（1，4），

又∵点 B 也在反比例函数 $y=\frac{4}{x}$上，

∴$\frac{4}{2}=n$，解得 $n=2$，

∴点 B 的坐标为（2，2），

又∵点 A、B 在 $y=kx+b$ 的图象上，

$\therefore \begin{cases} k+b=4 \\ 2k+b=2 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} k=-2 \\ b=6 \end{cases}$，

∴一次函数的解析式为 $y=-2x+6$．

（2）直线 $y=-2x+6$ 与 x 轴的交点为 N，

∴点 N 的坐标为（3，0），

$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AON}-S_{\triangle BON}=\frac{1}{2}\times3\times4-\frac{1}{2}\times3\times2=3$；

（3）令 $y=0$，得 $y=-2x+6=0$，

解得 $x=3$，

∴N（3，0），

∴$ON=3$，

设 P（m，$-2m+6$），

$\because S_{\triangle ONP}=3S_{\triangle AOB}$，

$\therefore \frac{1}{2}\times3|-2m+6|=3\times3$，

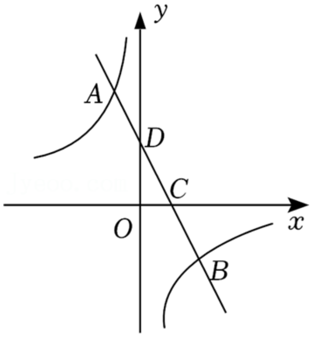
解得 $m=0$ 或 6，

∴P（0，6）或（6，-6）．

2．（2022•山西模拟）如图，一次函数 $y_1=kx+b$（$k\neq0$）的图象分别与 x 轴、y 轴交于点 C，D，与反比例函数 $y_2=\frac{m}{x}$（$m\neq0$）的图象交于 A（-1，n），B（2，-2）两点．

（1）求一次函数和反比例函数的表达式．

（2）若 x 轴上存在一点 P，使△ABP 的面积为 6，求点 P 的坐标．



【分析】（1）根据点 B 坐标求出 m，得到反比例函数解析式，据此求出点 A 坐标，再将 A，B 代入一次函数解析式；

（2）设点 P 的坐标为（a，0），求出直线 AB 与 x 轴交点，再结合△ABP 的面积为 6 得到关于 a 的方程，

解之即可．

【解答】解：（1）由题意可得：

点 B（2，﹣2）在反比例函数 $y_2=\frac{m}{x}$（$m\neq0$）的图象上，

∴m＝2×（﹣2）＝﹣4，

∴反比例函数的解析式为 $y_2=-\frac{4}{x}$，

将 A（﹣1，n）代入 $y_2=-\frac{4}{x}$，得：$n=-\frac{4}{-1}=4$，

∴A（﹣1，4），

将 A，B 代入一次函数解析式中，得$\begin{cases}2k+b=-2\\-k+b=4\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=-2\\b=2\end{cases}$，

∴一次函数解析式为 y_1＝﹣2x+2；

（2）∵点 P 在 x 轴上，

设点 P 的坐标为（a，0），

∵一次函数解析式为 y_1＝﹣2x+2，令 y＝0，则 x＝1，

∴直线 AB 与 x 轴交于点（1，0），

由△ABP 的面积为 6，可得：$\frac{1}{2}$（y_A﹣y_B）•$|a-1|$＝6，即$\frac{1}{2}\times6\cdot|a-1|$＝6，

解得：a＝﹣1 或 a＝3，

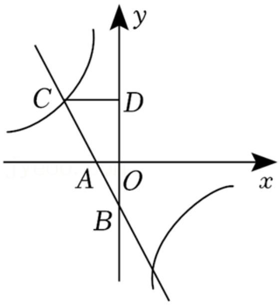
∴点 P 的坐标为（﹣1，0）或（3，0）．

3．（2022 春•侯马市期末）如图，直线 $y=-\frac{3}{2}x-2$ 分别交 x 轴、y 轴于 A、B 两点，与双曲线 $y=\frac{m}{x}$（$m\neq$ 0）在第二象限内的交点为 C，$CD\perp y$ 轴于点 D，且 CD＝4．

（1）求双曲线的解析式；

（2）设点 Q 是双曲线上的一点，且△QOB 的面积是△AOB 的面积的 2 倍，求点 Q 的坐标；

（3）在 y 轴上存在点 P，使 $PA+PC$ 最短，请直接写出点 P 的坐标．



【分析】（1）把 $x=-4$ 代入可求出点 C 的坐标，再代入反比例函数关系式可确定 k 的值，进而确定反比例函数关系式；

（2）根据直线的关系式可求出与 x 轴、y 轴的交点坐标，进而求出三角形 AOB 的面积，得到三角形 BOQ 的面积后设点 Q 的坐标，由三角形的面积公式列方程求解即可；

（3）求出点 A 关于 y 轴对称的点 A' 的坐标，求出直线 CA' 与 y 轴的交点坐标即可．

【解答】解：（1）$CD=4$，即点 C 的横坐标为 -4，

当 $x=-4$ 时，$y=-\frac{3}{2}\times(-4)-2=4$，

∴点 $C(-4，4)$，

又∵点 $C(-4，4)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，

∴$k=-4\times4=-16$，

∴反比例函数的关系式为 $y=-\frac{16}{x}$；

（2）∵直线 $y=-\frac{3}{2}x-2$ 分别交 x 轴、y 轴于 A、B 两点，

∴点 $A(-\frac{4}{3}，0)$，点 $B(0，-2)$，

即 $OA=\frac{4}{3}$，$OB=2$，

∴$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times2=\frac{4}{3}$，

设 $Q(x，-\frac{16}{x})$，

由于△QOB 的面积是△AOB 的面积的 2 倍，

∴△QOB 的面积为 $\frac{4}{3}\times2=\frac{8}{3}$，

即 $\frac{1}{2}OB\times|x|=\frac{8}{3}$，

解得 $x=\pm\frac{8}{3}$，

当 $x=\frac{8}{3}$时，$y=-16\times\frac{3}{8}=-6$，

当 $x=-\frac{8}{3}$时，$y=-16\times(-\frac{3}{8})=6$，

∴点 Q（$\frac{8}{3}$，－6）或（$-\frac{8}{3}$，6）；

（3）点 A（$-\frac{4}{3}$，0）关于 y 轴的对称点 A' （$\frac{4}{3}$，0），

设直线 CA' 的关系式为 $y=kx+b$，则

$\begin{cases}-4k+b=4\\ \frac{4}{3}k+b=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=-\frac{3}{4}\\ b=1\end{cases}$，

∴直线 CA' 的关系式为 $y=-\frac{3}{4}x+1$，

当 $x=0$ 时，$y=1$，

即直线 $y=-\frac{3}{4}x+1$ 与 y 的交点坐标为 P（0，1），

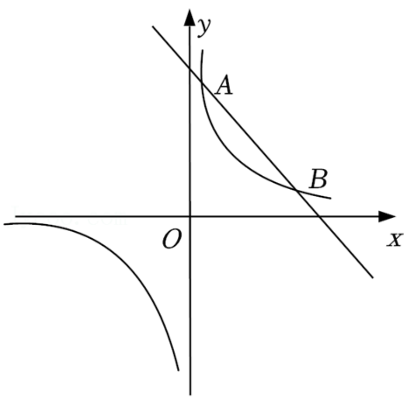
此时，点 P（0，1）使 $PA+PC$ 最小．

4．（2022 春•惠山区期末）如图，一次函数 $y_1=ax+b$ 与反比例函数 $y_2=\frac{k}{x}$的图象相交于 A（1，6），B（6，1）两点．

（1）求一次函数 y_1 的表达式与反比例函数 y_2 的表达式；

（2）当 $y_1>y_2$，时，直接写出自变量 x 的取值范围为 <u>$1<x<6$ 或 $x<0$</u>；

（3）在平面内存在点 P，使得点 A、点 B 关于点 P 成中心对称的点恰好落在坐标轴上，请直接写出点 P 的坐标为 <u>（$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$）或（3，3）</u>．



【分析】（1）将 A（1，6），B（6，1）两点代入 $y=ax+b$，解方程组即可；

（2）观察图象即可得出答案；

（3）根据题意，AB∥$A'B'$，AB＝$A'B'$，据此求得 B'（0，5）或（0，﹣5），然后利用中点公式即可求得．

【解答】解：（1）将 A（1，6），B（6，1）两点代入 y＝ax+b，得：$\begin{cases}a+b=6\\6a+b=1\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}a=-1\\b=7\end{cases}$，

∴一次函数的解析式为：y＝﹣x+7，

将 A（1，6）代入反比例函数 $y=\frac{k}{x}$得：k＝6，

∴反比例函数的解析式为：$y=\frac{6}{x}$；

（2）由图象可知，当 y_1＞y_2 时，自变量 x 的取值范围为：1＜x＜6 或 x＜0；

故答案为：1＜x＜6 或 x＜0；

（3）设 A、B 关于点 P 成中心对称的点为 A'、B'，则直线 $A'B'$∥AB，A、B、A'、B' 四点构成平行四边形，

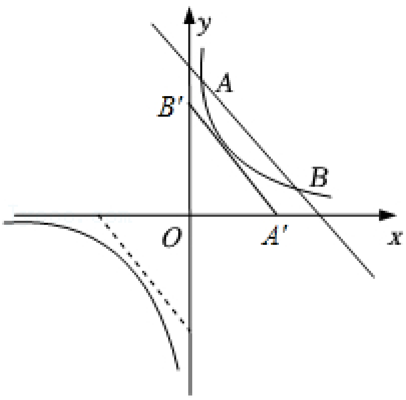
∴直线 $A'B'$ 的解析式为 y＝﹣x±5，

∴B'（0，5）或（0，﹣5），

∵A（1，6），B（6，1），

∴P（$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$）或（3，3），

故答案为（$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$）或（3，3）．

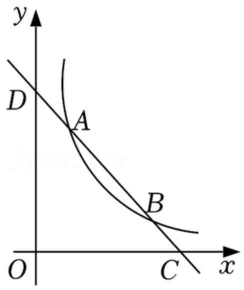


5．（2022•柳南区二模）如图，在平面直角坐标系中，直线 AB 与反比例函数$y=\frac{k}{x}(x>0)$的图象交于点 A（1，n）和点 B（3，1），与 x 轴交于点 C，与 y 轴交于点 D．

（1）求反比例函数的表达式及一次函数解析式；

（2）双曲线上是否存在一点 P，使点 P 到原点的距离最小，如果存在，求出 P 点坐标，并求出最小距

离．如果不存在，请说明理由．



【分析】（1）把点 B（3，1）代入$y=\frac{k}{x}(x>0)$即可求得 k，把 A（1，n）代入反比例函数的解析式即可求得 n，然后利用待定系数法即可求得一次函数的解析式；

（2）解方程组$\begin{cases}y=x\\y=\frac{3}{x}\end{cases}$即可求得．

【解答】解：（1）∵直线 AB 与反比例函数$y=\frac{k}{x}(x>0)$的图象交于点 A（1，n）和点 B（3，1），

∴把点 B（3，1）代入$y=\frac{k}{x}(x>0)$得，$1=\frac{k}{3}$，

∴$k=3$，

∴反比例函数的表达式为 $y=\frac{3}{x}$，

把 A（1，n）代入 $y=\frac{3}{x}$得，$n=\frac{3}{1}=3$，

设直线 AB 的解析式为：$y=kx+b$，

∴$\begin{cases}k+b=3\\3k+b=1\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=-1\\b=4\end{cases}$，

∴一次函数解析式为：$y=-x+4$；

（2）存在，

当 P 点中心直线 $y=x$ 上时，点 P 到原点的距离最小，

解$\begin{cases}y=x\\y=\frac{3}{x}\end{cases}$得$\begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=\sqrt{3}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\y=-\sqrt{3}\end{cases}$，

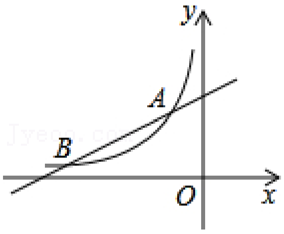
∴P 的坐标为（$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$）．

6．（2022•呼和浩特一模）如图，一次函数 $y=k_1x+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$（$x<0$）的图象相交于点 A（－1，2）点 B（－4，n）．

（1）求此一次函数和反比例函数的表达式；

（2）如图所示，请直接写出不等式 $k_1x+b\geq\frac{k_2}{x}$的解集；

（3）在 x 轴上存在一点 P，使△PAB 的周长最小，直接写出点 P 的坐标．



【分析】（1）把点 A 的坐标代入反比例函数解析式求出 m 的值，然后再把点 B 的坐标代入反比例函数求出 n 的值，从而求出点 B 的坐标，再把点 A、B 的坐标代入一次函数表达式，利用待定系数法即可求出一次函数的解析式；

（2）根据两函数的交点坐标可得答案；

（3）作点 B 关于 x 轴的对称点 C，连接 AC，交 x 轴于点 P，此时△PAB 的周长最小，设直线 AC 的表达式为 $y=ax+c$，根据待定系数法求得解析式，令 $y=0$，即可求得 P 的坐标．

【解答】解：（1）∵点 A（﹣1，2）在反比例函数图象上，

∴$\frac{k_2}{-1}=2$，

解得 $k_2=-2$，

∴反比例函数的解析式是 $y=-\frac{2}{x}$，

∵点 B（﹣4，n）在反比例函数图象上，

∴$n=-\frac{2}{-4}=\frac{1}{2}$，

∴点 B 的坐标是（﹣4，$\frac{1}{2}$），

∵一次函数 $y=k_1x+b$ 的图象经过点 A（﹣1，2）、点 B（﹣4，$\frac{1}{2}$）．

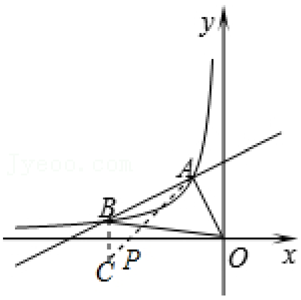
∴$\begin{cases}-k_1+b=2\\-4k_1+b=\frac{1}{2}\end{cases}$

解得$\begin{cases}k_1=\frac{1}{2}\\b=\frac{5}{2}\end{cases}$．

∴一次函数解析式是 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$；

（2）不等式 $k_1x+b\geq\frac{k_2}{x}$的解集为：﹣4≤x≤﹣1；

（3）作 B 点关于 x 轴的对称点 C，连接 AC 交 x 轴于 P，则 $PA+PB=AC$，此时 $PA+PB$ 最小，即△PAB 的周长最小，



∵点 C（﹣4，$-\frac{1}{2}$）和 B 关于 x 轴对称，

∴点 C 的坐标为（﹣4，$-\frac{1}{2}$），

设直线 AC 的表达式为 $y=ax+c$，

∴$\begin{cases}-a+c=2\\-4a+c=-\frac{1}{2}\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}a=\frac{5}{6}\\c=\frac{17}{6}\end{cases}$，

∴直线 AC 的表达式为：$y=\frac{5}{6}x+\frac{17}{6}$，

当 $y=0$ 时，则 $x=-\frac{17}{5}$，

∴P 点坐标为（$-\frac{17}{5}$，0）．

7．（2022•海淀区校级模拟）一次函数 $y=ax-1$ 的图象与 x 轴交于点 C（2，0），与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$）的图象的交点为 A 和 B，且点 B 的横坐标是﹣2，

（1）求反比例函数解析式；

（2）若 x 轴上存在点 D，使得 $BC=CD$，直接写出点 D 的坐标．

【分析】（1）把 C 的坐标代入 $y=ax-1$ 求得 a 的值，进而求得 B 的坐标，然后利用待定系数法即可求得反比例函数的解析式；

（2）根据等腰三角形的性质即可求得．

【解答】解：（1）∵一次函数 $y=ax-1$ 的图象与 x 轴交于点 C（2，0），

∴$2a-1=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$，

∴一次函数为 $y=\frac{1}{2}x-1$，

把 $x=-2$ 代入得，$y=\frac{1}{2}\times(-2)-1=-2$，

∴B（﹣2，﹣2），

∵点 B 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）的图象上，

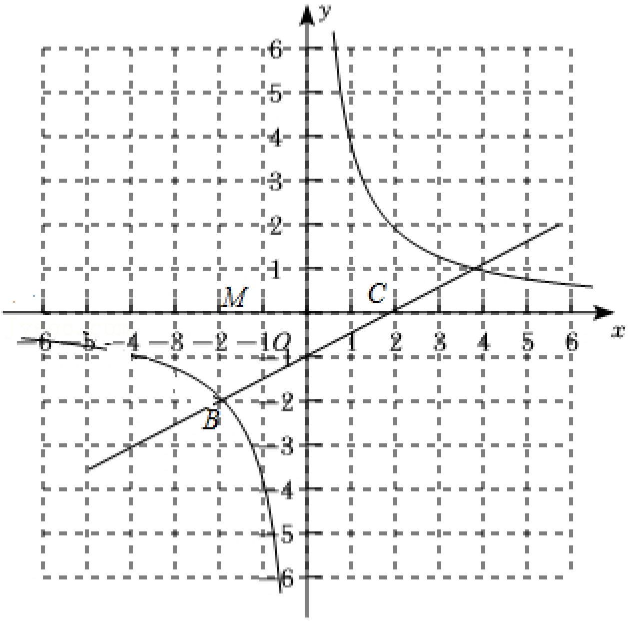
∴$k=-2\times(-2)=4$，

∴反比例函数解析式为 $y=\frac{4}{x}$；

（2）∵B（﹣2，﹣2），C（2，0），

∴$BC=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

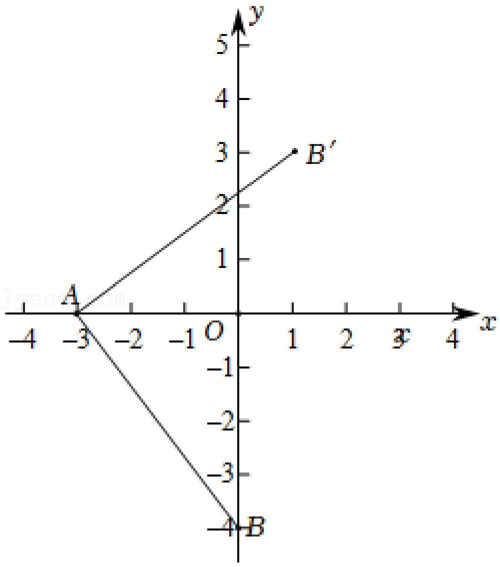
∴D（$-2\sqrt{5}+2$，0）或（$2\sqrt{5}+2$，0）．



8．（2022•香洲区校级一模）如图，A（﹣3，0），B（0，﹣4），将线段 AB 绕点 A 逆时针旋转 90°，点 B 的对应点 B' 恰好在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）的图象上．

（1）求 k 值；

（2）反比例函数的图象与线段 AB 是否存在交点？若存在，请求出交点坐标；若不存在，请说明理由．



【分析】（1）如图，过点 B' 作 $B'D\perp x$ 轴于点 D，利用旋转的性质证明△$AB'D$≌△BAO（AAS），即可求得点 B' 的坐标，再运用待定系数法即可求得答案；

（2）运用待定系数法求出直线 AB 的解析式，联立方程即可求得交点坐标．

【解答】解：（1）如图，过点 B' 作 $B'D\perp x$ 轴于点 D，

则∠ADB'＝90°，

∵∠AOB＝90°，

∴∠ADB'＝∠AOB，∠BAO+∠ABO＝90°，

∵将线段 AB 绕点 A 逆时针旋转 90° 得线段 AB'，

∴∠BAO+∠$B'AD$＝90°，AB'＝AB，

∴∠$B'AD$＝∠ABO，

∴△$AB'D$≌△BAO（AAS），

∴$B'D$＝OA＝3，AD＝OB＝4，

∴OD＝AD﹣OA＝4﹣3＝1，

∴B'（1，3），

∴$3=\frac{k}{1}$，

∴k＝3；

（2）设直线 AB 的解析式为 y＝mx+n，

∵A（﹣3，0），B（0，﹣4），

∴$\begin{cases}-3m+n=0\\n=-4\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}m=-\frac{4}{3},\\n=-4\end{cases}$

∴直线 AB 的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x-4$，

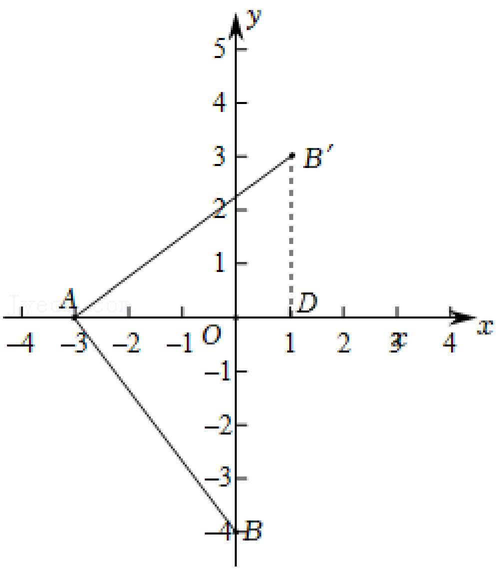
将 $y=\frac{3}{x}$代入 $y=-\frac{4}{3}x-4$，得：$\frac{3}{x}=-\frac{4}{3}x-4$，

∴$4x^2+12x+9=0$，

解得：$x_1=x_2=-\frac{3}{2}$，

∴$y=-2$，

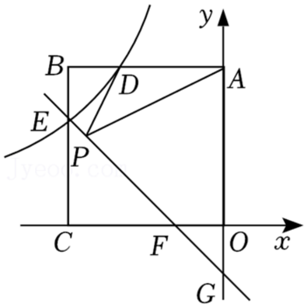
∴反比例函数的图象与线段 AB 有且只有一个交点，该交点坐标为（$-\frac{3}{2}$，-2）．



9．（2022 秋•绵阳期末）如图，在正方形 $OABC$ 中，点 O 为坐标原点，点 C（﹣3，0），点 A 在 y 轴正半轴上，点 E，F 分别在 BC，CO 上，$CE=CF=2$，一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）的图象过点 E 和 F，交 y 轴于点 G，过点 E 的反比例函数 $y=\frac{m}{x}$（$m\neq0$）的图象交 AB 于点 D．

（1）求反比例函数和一次函数的解析式；

（2）在线段 EF 上是否存在点 P，使 $S_{\triangle ADP}=S_{\triangle APG}$，若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．



【分析】（1）由点 C（－3，0），$CE=CF=2$，可得 E（－3，2），F（－1，0），用待定系数法即得一次函数的解析式为 $y=-x-1$，反比例函数解析式为 $y=-\frac{6}{x}$；

（2）在 $y=-x-1$ 中，得 G（0，－1），在 $y=-\frac{6}{x}$中，得 D（－2，3），设 P（t，－t－1），根据 $S_{\triangle ADP}=S_{\triangle APG}$ 有$\frac{1}{2}\times 2\bullet[3-(-t-1)]=\frac{1}{2}\times 4\times(-t)$，即可解得 P（$-\frac{4}{3}$，$\frac{1}{3}$）．

【解答】解：（1）∵点 C（－3，0），

∴正方形 $OABC$ 边长为 3，即 $OA=AB=BC=CO=3$，

∵$CE=CF=2$，

∴$OF=1$，

∴E（－3，2），F（－1，0），

把 E（－3，2），F（－1，0）代入 $y=kx+b$ 得$\begin{cases}-3k+b=2\\-k+b=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=-1\\b=-1\end{cases}$，

∴一次函数的解析式为 $y=-x-1$，

把 E（－3，2）代入 $y=\frac{m}{x}$得 $2=\frac{m}{-3}$，

解得 $m=-6$，

∴反比例函数解析式为 $y=-\frac{6}{x}$，

答：反比例函数解析式为 $y=-\frac{6}{x}$，一次函数的解析式为 $y=-x-1$；

（2）存在点 P，使 $S_{\triangle ADP}=S_{\triangle APG}$，

在 $y=-x-1$ 中，令 $x=0$ 得 $y=-1$，

∴G（0，－1），

∴$AG=4$，

在 $y=-\frac{6}{x}$中，令 $y=3$ 得 $x=-2$，

∴D（－2，3），

∴AD＝2，

设 P（t，－t－1），

∵$S_{\triangle ADP}$＝$S_{\triangle APG}$，

∴$\frac{1}{2}\times 2\cdot[3-(-t-1)]=\frac{1}{2}\times 4\times(-t)$，

解得 $t=-\frac{4}{3}$，

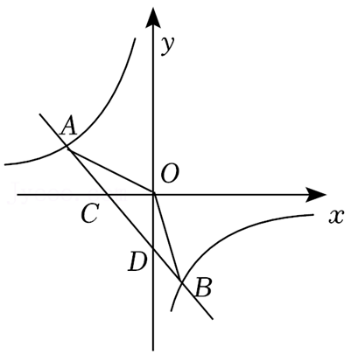
∴P（$-\frac{4}{3}$，$\frac{1}{3}$）．

10．（2022 秋•会宁县期末）如图，一次函数 y＝－x－1 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$的图象交于点 A、B，与 x 轴交于点 C，$S_{\triangle AOC}$＝1．

（1）求点 A 的坐标与反比例函数的表达式．

（2）设直线 AB 与 y 轴相交于点 D，经过计算可知点 B 的坐标为（2，－3）．若点 Q 是 y 轴上一点，是否存在点 Q，使得 $S_{\triangle AQD}$＝$S_{\triangle AOB}$？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由．

（3）求－x－1$\geq\frac{k}{x}$的 x 的取值范围．



【分析】（1）根据一次函数的解析式求得 C 点的坐标，根据三角形的面积求得 A 的纵坐标，代入直线解析式即可求得坐标，然后根据待定系数法求得即可；

（2）设点 Q（0，y），由一次函数 y＝－x－1 可知 D（0，－1），则 DQ＝$|y+1|$，根据题意$s_{\triangle ADQ}=\frac{1}{2}\times 3\times|y+1|=\frac{5}{2}$，解方程求得 y 的值，即可求得 Q 的坐标；

（3）观察图象即可求得．

【解答】解：（1）直线 AB 与 x 轴的交点 C（－1，0）．设 A（x，y），

∵$S_{\triangle AOC}$＝1，

∴$\frac{1}{2}\times y\times 1=1$，

∴y=2，

∴A（x，2）将点A代入y=－x－1得，x=－3，

∴A（－3，2），

∴k=－3×2=－6，

∴反比例函数的表达式为$y=-\frac{6}{x}$；

（2）存在，

∵$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times 2\times 1+\frac{1}{2}\times 1\times 3=\frac{5}{2}$，

设点Q（0，y），

由一次函数y=－x－1可知D（0，－1），

∴$S_{\triangle ADQ}=\frac{1}{2}\times 3\times|y+1|=\frac{5}{2}$，

∴$y=\frac{2}{3}$或$y=-\frac{8}{3}$，

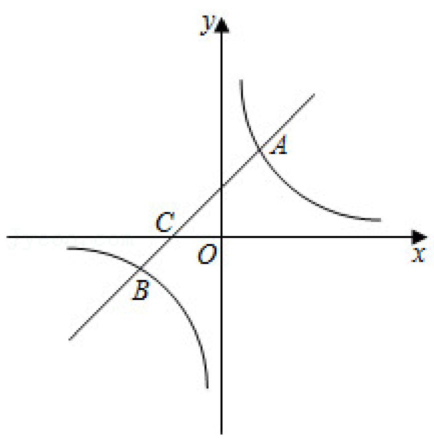
∴$Q(0，\frac{2}{3})$或$(0，-\frac{8}{3})$；

（3）由图象可知，$-x-1\geq\frac{k}{x}$的x的取值范围是x≤－3或0＜x≤2.

11．（2022•永昌县一模）如图，一次函数y=kx+b（k≠0）的图象与反比例函数$y=\frac{m}{x}$（m≠0）的图象相交于点A（1，2），B（a，－1）．

（1）求反比例函数和一次函数的解析式；

（2）若直线y=kx+b（k≠0）与x轴交于点C，x轴上是否存在一点P，使$S_{\triangle APC}$=4？若存在，请求出点P坐标；若不存在，说明理由．



【分析】（1）把点 A（1，2）代入 $y=\frac{m}{x}$得到反比例函数的解析式为 $y=\frac{2}{x}$；把点 A（1，2），B（﹣2，﹣1）代入 $y=kx+b$ 得到一次函数的解析式为：$y=x+1$；

（2）当 $y=0$ 时，得到 C（﹣1，0），设 P（x，0），根据三角形的面积公式即可得到结论．

【解答】解：（1）把点 A（1，2）代入 $y=\frac{m}{x}$得，$2=\frac{m}{1}$，

∴$m=2$，

∴反比例函数的解析式为 $y=\frac{2}{x}$；

把 B（a，﹣1）代入 $y=\frac{2}{x}$得，$a=-2$，

∴B（﹣2，﹣1），

把点 A（1，2），B（﹣2，﹣1）代入 $y=kx+b$ 得$\begin{cases}k+b=2\\-2k+b=-1\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=1\\b=1\end{cases}$，

∴一次函数的解析式为：$y=x+1$；

（2）当 $y=0$ 时，$0=x+1$，

解得：$x=-1$，

∴C（﹣1，0），

设 P（x，0），

∴$S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}\times|x+1|\times 2=4$，

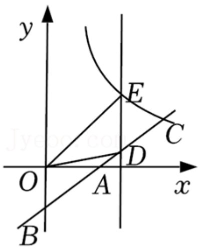
∴$x=3$ 或 $x=-5$，

∴P（3，0）或（﹣5，0）．

12．（2022•徐州模拟）如图，在平面直角坐标系中，已知点 A（2，0），B（0，$-\frac{3}{2}$），作直线 AB 与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$（$x>0$）的图象交于点 C，且 A 是线段 BC 的中点．

（1）求 m 的值；

（2）D 是线段 BC 上一动点，过点 D 作 $DE\parallel y$ 轴，交反比例函数的图象于点 E，是否存在点 D，使△ODE 的面积有最大值？若存在，求出最大值及点 D 的坐标．



【分析】（1）根据待定系数法即可求得 m 的值；

（2）根据待定系数法求得直线 AB 的解析式，设出 D、E 的坐标，然后根据三角形面积公式和二次函数的性质即可求得结论．

【解答】解：（1）∵点 A（2，0），B（0，$-\frac{3}{2}$），

∴$OA=2$，$OB=\frac{3}{2}$,

过 C 作 $CF\perp x$ 轴于 F，

∴$\angle AOB=\angle AFC=90°$，

∵A 是线段 BC 的中点，

∴$AB=AC$，

∵$\angle BAO=\angle CAF$，

∴$\triangle AOB\cong\triangle AFC$（$AAS$），

∴$AF=AO=2$，$CF=OB=\frac{3}{2}$,

∴$OF=4$

∴C（4，$\frac{3}{2}$），

∴$m=4\times\frac{3}{2}=6$;

（2）设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$，

把点 A（2，0），B（0，$-\frac{3}{2}$），代入得$\begin{cases}2k+b=0\\b=-\frac{3}{2}\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=\frac{3}{4}\\b=-\frac{3}{2}\end{cases}$,

∴直线 AB 的解析式为 $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$;

∵点 D 为线段 AB 上的一个动点，

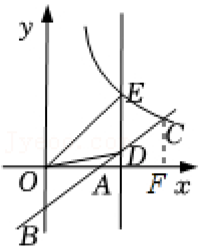
∴设 D（x，$\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$）（$0<x\leqslant4$），

∵$DE // y$ 轴，

∴E（x，$\frac{6}{x}$），

∴$S_{\triangle ODE}=\frac{1}{2}x\cdot\left(\frac{6}{x}-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{4}x+3=-\frac{3}{8}(x-1)^2+\frac{27}{8}$，

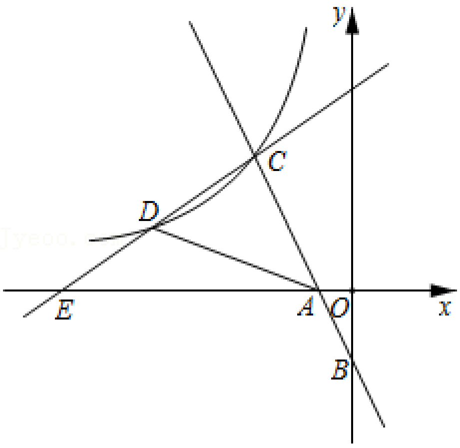
∴当 $x=1$ 时，$\triangle ODE$ 的面积的最大值为$\frac{27}{8}$，点 D 的坐标为（1，$-\frac{3}{4}$）．



13．（2022 春•沙坪坝区期中）如图，一次函数 $y=ax+b$（$a\neq 0$）的图象分别与 x 轴、y 轴交于点 A（﹣1，0），B，且 $OB=2OA$．直线 AB 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$，$x<0$）的图象交于点 C（﹣3，n）．

（1）求一次函数与反比例函数的表达式；

（2）在该反比例函数图象上存在点 D，且 D 到 x 轴的距离为 2；连接 AD，直线 CD 交 x 轴于点 E，求 $\triangle ACD$ 的面积．



【分析】（1）先求得点 B 的坐标，然后根据求得直线 AB 的解析式，进而求得 C 的坐标，代入入 $y=\frac{k}{x}$ 中，即可求得反比例函数的解析式；

（2）求得点 D 的坐标，从而求得直线 CD 的解析式，进一步求得点 E 的坐标，然后根据 $S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ACE}-S_{\triangle ADE}$ 求得即可．

【解答】解：（1）∵A（﹣1，0），

∴$OA=1$，

又∵$OB=2OA=2$，

∴B（0，－2），

将 A（－1，0），B（0，－2）分别代入 $y=ax+b$ 中，

得$\begin{cases}-a+b=0\\b=-2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=-2\\b=-2\end{cases}$，

∴一次函数的表达式 $y=-2x-2$，

将 C（－3，n）代入 $y=-2x+2$ 中，得 $n=-2\times(-3)-2=4$，

∴C（－3，4），

将 C（－3，4）代入 $y=\frac{k}{x}$中，得 $4=\frac{k}{-3}$，

∴$k=-12$，

∴该反比例函数的表达式为 $y=-\frac{12}{x}$；

（2）∵点 D 到 x 轴的距离为 2，

∴$y_D=2$，

∵点 D 在函数 $y=-\frac{12}{x}$的图象上，

∴$x_D=\frac{-12}{2}=-6$，

∴D（－6，2），

∴直线 CD 的表达式为 $y=\frac{2}{3}x+6$，

∵直线 CD 交 x 轴于 E，

∴E（－9，0），

∴$AE=8$，

∴$S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ACE}-S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AE\bullet y_C-\frac{1}{2}AE\bullet y_D$

$=\frac{1}{2}\times4\times8-\frac{1}{2}\times2\times8$

$=8$．

14．（2022•拱墅区校级四模）定义：若一次函数 $y=ax+b$（$a\neq0$）和反比例函数 $y=-\frac{c}{x}$（$c\neq0$）满足 $a-b=b-c$，则称 $y=ax^2+bx+c$ 为一次函数和反比例函数的“等差”函数．

（1）$y=3x+b$ 和 $y=-\frac{5}{x}$是否存在“等差”函数？若存在，请写出它们的“等差”函数；

（2）若 $y=10x+b$ 和 $y=-\frac{c}{x}$存在“等差”函数，且“等差”函数的图象与 $y=-\frac{c}{x}$的图象的一个交点的横

坐标为 1，求反比例函数的表达式．

【分析】（1）假设存在，根据等差函数定义得出 $b=4$，从而得出解析式；

（2）根据等差函数定义得出 $10+c=2b$，即 $c=2b-10$，根据“等差”函数的图象与 $y=-\frac{c}{x}$的图象的一个交点的横坐标为 1，列出方程即可求得 b，进而求得 c，即可解决问题．

【解答】解：（1）存在，

假设 $y=3x+b$ 和 $y=-\frac{5}{x}$存在“等差”函数，

则 $a=3$，$c=5$，$3-b=b-5$，

解得：$b=4$，

∴存在“等差”函数，其解析式为 $y=3x^2+4x+5$；

（2）根据题意知：$a=10$，$10+c=2b$，

∴$c=2b-10$，

则“等差”函数的解析式为 $y=10x^2+bx+2b-10$，反比例函数的解析式为 $y=-\frac{2b-10}{x}$，

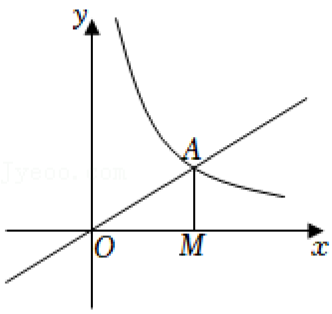
根据题意，将 $x=1$ 代入$\begin{cases}y=10x^2+bx+2b-10\\y=-\frac{2b-10}{x}\end{cases}$，整理得：$10+b+2b-10=-2b+10$，解得 $b=2$，$c=-6$，

故一次函数的解析式为 $y=10x+2$，反比例函数的解析式为 $y=\frac{6}{x}$．

15．（2022•涪城区校级模拟）如图，正比例函数 $y=\frac{1}{2}x$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$）在第一象限的图象交于 A 点，过 A 点作 x 轴的垂线，垂足为 M，已知△OAM 的面积为 1．

（1）求反比例函数的解析式；

（2）如果 B（a，b）为反比例函数在第一象限图象上的点，且 $b=2a$，试探究在 x 轴上是否存在点 P，使$|PA-PB|$最大？若存在，求点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．



【分析】（1）结合反比例函数系数 k 的几何意义即可得出$\frac{1}{2}|k|=1$，结合第一象限内含有函数的图象，即

可求出 k 的值，从而问题得解；

（2）先根据反比例函数与一次函数的解析式求出 A 点坐标，再根据 B（a，b）为反比例函数在第一象限图象上的点，且 $b=2a$ 得出 B 点坐标，．

【解答】解：（1）∵△OAM 的面积为 1，

∴$\frac{1}{2}|k|=1$，解得：$k=\pm2$，

∵第一象限内有反比例函数图象，

∴反比例函数的解析式为 $y=\frac{2}{x}$.

（2）存在，理由如下：

联立一次函数与反比例函数解析式：

$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ y=\frac{2}{x} \end{cases}$，解得：$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$或$\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$（舍去）．

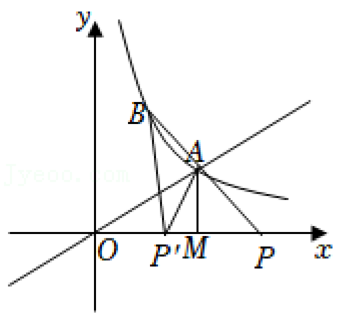
∴点 A 的坐标为（2，1）．

∵B（a，b）为反比例函数在第一象限图象上的点，且 $b=2a$，

∴a•$2a=2$，解得 $a=1$（负值舍去），

∴点 B 的坐标为（1，2）．

如图，点 P' 是 x 轴上任意一点，



由三角形三边关系可知，$|PA-PB|\leqslant AB$，

即当 B，A，P 三点共线时，$|PA-PB|=AB$ 取得最大值.

将点 A（2，1），B（1，2）代入到 $y=ax+b$ 中得：

$\begin{cases} 2a+b=1 \\ a+b=2 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}$，

∴直线 AB 的解析式为 $y=-x+3$，

令 $y=-x+3$ 中 $y=0$，则 $x=3$，

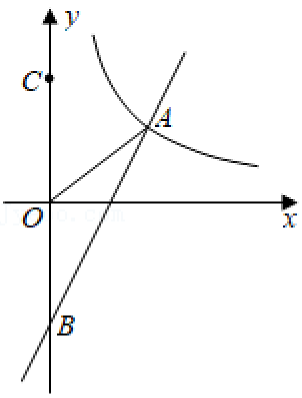
∴点 P 的坐标为（3，0）．

∴在 x 轴上存在一点 P 使$|PA-PB|$最大，点 P 的坐标为（3，0）.

16．（2022•金坛区二模）如图，已知一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）的图象分别与反比例函数 $y=\frac{a}{x}$（$x>0$）的图象交于点 A（4，3），与 y 轴的负半轴交于点 B，且 $OA=OB$.

（1）求一次函数和反比例函数的表达式；

（2）已知点 C（0，5），若在该一次函数图象上存在一点 D，满足 $DB=DC$，求此时点 D 的坐标.



【分析】（1）利用待定系数法即可解答；

（2）设点 M 的坐标为（x，$2x-5$），根据 $MB=MC$，即可求解.

【解答】解：（1）把点 A（4，3）代入函数 $y=\frac{a}{x}$得：$a=3\times4=12$，

∴$y=\frac{12}{x}$.

$OA=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

∵$OA=OB$，

∴$OB=5$，

∴点 B 的坐标为（0，-5），

把 B（0，-5），A（4，3）代入 $y=kx+b$ 得$\begin{cases}b=5\\4k+b=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=2\\b=-5\end{cases}$，

∴$y=2x-5$；

（2）∵点 D 在一次函数 $y=2x-5$ 上，

∴设点 M 的坐标为（x，$2x-5$），

∵$DB=DC$，

$\sqrt{x^2+(2x-5+5)^2}=\sqrt{x^2+(2x-5-5)^2}$，

解得：$x=2.5$，