

晋城市 2024 年高三第二次模拟考试

数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分.满分 150 分，考试时间 120 分钟.
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚.
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上.选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效.
4. 本卷命题范围：高考范围.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 z 满足 $(4-3i)z=1+2i$ ，则 $|z|=(\quad)$

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数的除法运算求 z ，再根据复数的模长公式运算求解.

【详解】因为 $(4-3i)z=1+2i$ ，则 $z=\frac{1+2i}{4-3i}=\frac{(1+2i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=-\frac{2}{25}+\frac{11}{25}i$ ，

$$\text{所以 } |z|=\sqrt{\left(-\frac{2}{25}\right)^2+\left(\frac{11}{25}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

故选：A.

2. 已知圆锥的侧面积为 12π ，它的侧面展开图是圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的扇形，则此圆锥的体积为 $(\quad)$

- A. $6\sqrt{2}\pi$ B. $\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ C. $6\sqrt{3}\pi$ D. $\frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】设圆锥的底面半径为 r ，母线长为 l ，根据圆锥的侧面积公式以及扇形弧长得 $l=3r=6$ ，再结合锥体的体积公式运算求解.

【详解】设圆锥的底面半径为 r ，母线长为 l ，

由题意可得：
$$\begin{cases} \pi r l = 12\pi \\ \frac{2\pi}{3} l = 2\pi r \end{cases}, \text{ 解得 } l = 3r = 6,$$

则圆锥的高 $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 4\sqrt{2}$,

所以此圆锥的体积为 $\frac{1}{3} h \times \pi r^2 = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

故选：B.

3. 已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$, 则向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的投影向量为 ()

- A. $-\frac{1}{3}\vec{a}$ B. $-\vec{a}$ C. $\frac{1}{3}\vec{a}$ D. $\vec{a}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意，结合向量的运算法则，求得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$ ，结合向量的投影向量的计算方法，即可求解.

【详解】由向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$,

可得 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 13 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 7$, 解得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$,

所以向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的投影向量 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{-3}{9} \cdot \vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{a}$.

故选：A.

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 的两条渐近线均和圆 $C: x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$ 相切，且双曲线

的左焦点为圆 C 的圆心，则该双曲线的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ B. $\frac{4x^2}{9} - \frac{4y^2}{7} = 1$ C. $\frac{4x^2}{7} - \frac{4y^2}{9} = 1$ D. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意求圆 C 的圆心和半径，利用点到直线距离可得焦点到渐近线的距离 $d = b$ ，结合题意分析求解即可.

【详解】因为圆 $C: x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$ 的圆心为 $C(-4, 0)$ ，半径 $r = 3$,

又因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线为 $y = \frac{b}{a}x$ ，即 $bx - ay = 0$ ，

双曲线的左焦点 $(-c, 0)$ 到渐近线 $bx - ay = 0$ 的距离 $d = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b$ ，

由题意可知： $c = 4, b = 3$ ，可得 $a^2 = c^2 - b^2 = 7$ ，

所以该双曲线的方程为 $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ 。

故选：D。

5. 将函数 $f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，若函数

$g(x)$ 在区间 $(0, \varphi)$ 上恰有两个零点，则 φ 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}\right)$ B. $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}\right)$ C. $\left(\frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}\right]$ D. $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}\right]$

【答案】C

【解析】

【分析】根据三角函数图象的平移变换可得 $g(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4} - 3\varphi\right)$ ，由 $g(x)$ 在 $(0, \varphi)$ 上有 2 个零点得 $-2\pi \leq \frac{\pi}{4} - 3\varphi < -\pi$ ，解之即可求解。

【详解】将函数 $f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 φ 个单位长度，

得 $g(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4} - 3\varphi\right)$ 的图象，由 $0 < x < \varphi$ ，得 $\frac{\pi}{4} - 3\varphi < 3x + \frac{\pi}{4} - 3\varphi < \frac{\pi}{4}$ ，

又 $g(x)$ 在 $(0, \varphi)$ 上有 2 个零点，所以 $-2\pi \leq \frac{\pi}{4} - 3\varphi < -\pi$ ，

解得 $\frac{5\pi}{12} < \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$ ，即实数 φ 的取值范围为 $\left(\frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 。

故选：C

6. “五一”假期将至，某旅行社适时推出了“晋祠”“五台山”“云冈石窟”“乔家大院”“王家大院”共五条旅游线路可供旅客选择，其中“乔家大院”线路只剩下一个名额，其余线路名额充足。现有小张、小胡、小李、小郭这四人前去报名，每人只选择其中一条线路，四人选完后，恰好选择了三条不同的线路。则不同的报名情况总共有 ()

- A. 360 种 B. 316 种 C. 288 种 D. 216 种

【答案】C

【解析】

【分析】根据四人是否有人选择“乔家大院”线路进行分类讨论，由此求得正确答案.

【详解】若四人中，没有人选择“乔家大院”线路， $4 = 2 + 1 + 1$ ，

则方法数有 $C_4^2 \times A_4^3 = 144$ 种.

若四人中，恰有 1 人选择“乔家大院”线路，

则方法数有 $C_4^1 (C_3^2 \times A_4^2) = 144$ 种.

所以他们报名的情况总共有 $144 + 144 = 288$ 种.

故选：C

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_{15} > 0$ ， $S_{16} < 0$ ，则 $\frac{a_2}{a_1}$ 的取值范围是 ()

A. $\left(\frac{6}{7}, \frac{7}{8}\right)$

B. $\left(\frac{6}{7}, \frac{13}{15}\right)$

C. $\left(-\infty, \frac{6}{7}\right) \cup \left(\frac{7}{8}, +\infty\right)$

D. $\left(-\infty, \frac{6}{7}\right) \cup \left(\frac{13}{15}, +\infty\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据等差数列性质分析可得 $\begin{cases} a_8 > 0 \\ a_8 + a_9 < 0 \end{cases}$ ，进而可得 $d < 0$ ， $a_1 > 0$ ，结合通项公式可得

$$-\frac{1}{7} < \frac{d}{a_1} < -\frac{2}{15}, \text{ 即可得结果.}$$

【详解】由题意可得： $\begin{cases} S_{15} = 15a_8 > 0 \\ S_{16} = 8(a_8 + a_9) < 0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} a_8 > 0 \\ a_8 + a_9 < 0 \end{cases}$ ，可知 $a_9 < 0$ ，

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，则 $d = a_9 - a_8 < 0$ ，

可得等差数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，则 $a_1 > 0$ ，

$$\text{由 } \begin{cases} a_8 > 0 \\ a_8 + a_9 < 0 \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} a_1 + 7d > 0 \\ 2a_1 + 15d < 0 \end{cases}, \text{ 则 } -\frac{1}{7} < \frac{d}{a_1} < -\frac{2}{15},$$

$$\text{所以 } \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{d}{a_1} + 1 \in \left(\frac{6}{7}, \frac{13}{15}\right).$$

故选：B.

8. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 点 P 在以 A 为圆心, 1 为半径的圆上, 则 $|PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ 的最小值为 ()

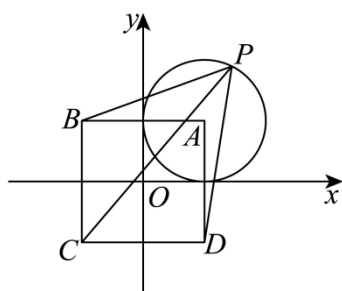
- A. $18 - 8\sqrt{2}$ B. $18 - 8\sqrt{3}$ C. $19 - 8\sqrt{3}$ D. $19 - 8\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】不妨设 $A(1,1), B(-1,1), C(-1,-1), D(1,-1)$, $P(1+\cos\theta, 1+\sin\theta), \theta \in [0, 2\pi)$, 根据两点间距离公式结合正弦函数的最值分析求解.

【详解】不妨设 $A(1,1), B(-1,1), C(-1,-1), D(1,-1)$,



因为 $|AP|=1$, 设 $P(1+\cos\theta, 1+\sin\theta), \theta \in [0, 2\pi)$,

$$\begin{aligned} |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 &= (2+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta + (2+\cos\theta)^2 + (2+\sin\theta)^2 + \cos^2\theta + (2+\sin\theta)^2 \\ &= 8\sin\theta + 8\cos\theta + 19 = 8\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 19, \end{aligned}$$

因为 $\theta \in [0, 2\pi)$, 则 $\theta + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right)$,

可知当 $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$, 即 $\theta = \frac{5\pi}{4}$ 时, $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ 取得最小值 -1 ,

所以 $|PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ 的最小值为 $19 - 8\sqrt{2}$.

故选: D.

【点睛】结论点睛: 以 (a,b) 为圆心, 半径为 r 的圆上的任一点 P 可设为 $(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9.

水稻产量是由单位面积上的穗数、每穗粒数（每穗颖花数）、成粒率和粒重四个基本因素构成．某实验基地有两块面积相等的试验田，在种植环境相同的条件下，这两块试验田分别种植了甲、乙两种水稻，连续试验 5 次，水稻的产量如下：

甲（单位：kg）	250	240	240	200	270
乙（单位：kg）	250	210	280	240	220

则下列说法正确的是（ ）

- A. 甲种水稻产量的极差为 70
- B. 乙种水稻产量的中位数为 240
- C. 甲种水稻产量的平均数大于乙种水稻产量的平均数
- D. 甲种水稻产量的方差小于乙种水稻产量的方差

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据数表求出极差、中位数，判断 A，B；求出平均数判断 C；求出方差判断 D 作答．

【详解】根据给定数表知，甲种水稻产量的极差为 $270 - 200 = 70$ ，乙种水稻产量的中位数为 240，A，B 都正确；

甲种水稻产量平均数为 $\frac{1}{5}(250 + 240 + 240 + 200 + 270) = 240$ ，乙种水稻产量平均数为

$\frac{1}{5}(250 + 210 + 280 + 240 + 220) = 240$ ，C 错误；

甲种水稻产量方差为 $\frac{1}{5}(100 + 0 + 0 + 1600 + 900) = 520$ ，乙种水稻产量方差为

$\frac{1}{5}(100 + 900 + 1600 + 0 + 400) = 600$ ，D 正确．

故选：ABD

10. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ ，若 $f(2) = 2$ ，则下列说法正确的是（ ）

- A. $f(1) = 0$
- B. $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称
- C. $\sum_{i=1}^{2024} f(2^i) = 2023 \times 2^{2025} + 2$
- D. $\sum_{i=1}^{2024} f(2^i) = 2024 \times 2^{2026} + 2$

【答案】AC

【解析】

【分析】对于 A：令 $x = 1, y = 2$ 代入运算即可判断；对于 B：令 $x = y = -1$ 解得 $f(-1) = 0$ ，令 $x = 2, y = -1$

解得 $f(-2) = -2$ ，即可判断；对于 CD：若 $x, y > 0$ ，可得 $\frac{f(xy)}{xy} = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y}$ ，分析可知 $\left\{ \frac{f(2^i)}{2^i} \right\}$

是以首项 $\frac{f(2)}{2} = 1$ ，公差为 1 的等差数列，结合等差数列以及裂项相消法分析求解.

【详解】因为 $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ ，且函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，

对于选项 A：令 $x=1, y=2$ ，可得 $f(2) = f(2) + 2f(1)$ ，解得 $f(1) = 0$ ，故 A 正确；

对于选项 B：令 $x=y=-1$ ，可得 $f(1) = -f(-1) - f(-1)$ ，解得 $f(-1) = 0$ ，

令 $x=2, y=-1$ ，可得 $f(-2) = xf(-1) - f(2) = -f(2) = -2$ ，

所以 $f(x)$ 的图象不关于 y 轴对称，故 B 错误；

对于选项 CD：若 $x, y > 0$ ，可得 $\frac{f(xy)}{xy} = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y}$ ，

令 $x=2^i, y=2, i \in \mathbf{N}^*$ ，可得 $\frac{f(2^{i+1})}{2^{i+1}} = \frac{f(2^i)}{2^i} + \frac{f(2)}{2} = \frac{f(2^i)}{2^i} + 1$ ，

可知数列 $\left\{ \frac{f(2^i)}{2^i} \right\}$ 是以首项 $\frac{f(2)}{2} = 1$ ，公差为 1 的等差数列，

可得 $\frac{f(2^i)}{2^i} = 1 + i - 1 = i$ ，

则 $f(2^i) = i \cdot 2^i = (i-1) \cdot 2^{i+1} - (i-2)2^i$ ，

所以 $\sum_{i=1}^{2024} f(2^i) = [0 - (-2)] + (2^3 - 0) + \cdots + (2023 \times 2^{2025} - 2022 \times 2^{2024}) = 2023 \times 2^{2025} + 2$ ，

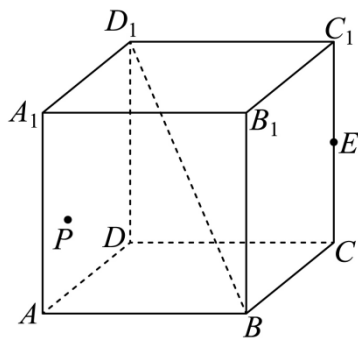
故 C 正确，D 错误；

故选：AC.

【点睛】关键点点睛：根据题意整理可得若 $x, y > 0$ ，可得 $\frac{f(xy)}{xy} = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y}$ ，进而可得

$\frac{f(2^{i+1})}{2^{i+1}} = \frac{f(2^i)}{2^i} + 1$ ，结合等差数列分析求解.

11. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是侧面 ADD_1A_1 内的一点，点 E 是线段 CC_1 上的一点，则下列说法正确的是（ ）



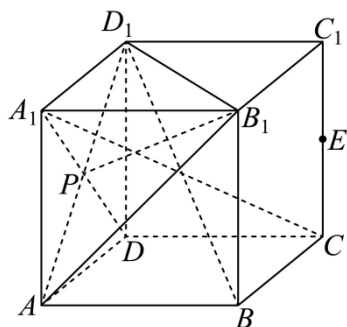
- A. 当点 P 是线段 A_1D 的中点时, 存在点 E , 使得 $A_1E \perp$ 平面 PB_1D_1
- B. 当点 E 为线段 CC_1 的中点时, 过点 A, E, D_1 的平面截该正方体所得的截面的面积为 $\frac{9}{4}$
- C. 点 E 到直线 BD_1 的距离的最小值为 $\sqrt{2}$
- D. 当点 E 为棱 CC_1 的中点且 $PE = 2\sqrt{2}$ 时, 则点 P 的轨迹长度为 $\frac{2\pi}{3}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】由题意分别画出图形, 再逐项解决线面垂直、截面面积、距离最值和轨迹问题即可.

【详解】对于 A, 如下图所示, 连接 A_1C, AB_1 ,



因为点 P 是线段 A_1D 的中点, 所以点 P 也是线段 AD_1 的中点,

所以平面 PB_1D_1 即为平面 AB_1D_1 .

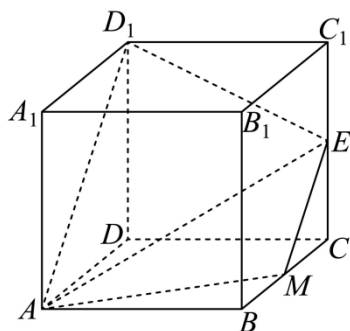
根据正方体的性质, $AD_1 \perp$ 平面 A_1DC , $AB_1 \perp$ 平面 A_1BC ,

所以 $AD_1 \perp A_1C, AB_1 \perp A_1C$,

又因为 $AD_1 \cap AB_1 = A$, $AD_1 \subset$ 平面 AB_1D_1 , $AB_1 \subset$ 平面 AB_1D_1 ,

所以 $A_1C \perp$ 平面 AB_1D_1 , 所以 E 与 C 重合时, $A_1E \perp$ 平面 PB_1D_1 , 故 A 正确;

对于 B, 如下图所示, 取 BC 的中点 M ,



根据 E, M 分别为 CC_1, BC 的中点, 易得 $EM \parallel AD_1$,

所以 A, M, E, D_1 四点共面,

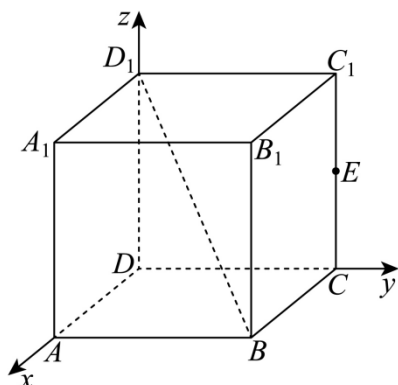
所以截面为四边形 $AMED_1$, 且该四边形为等腰梯形.

又因为 $ME = \sqrt{2}, AD_1 = 2\sqrt{2}, AM = ED_1 = \sqrt{5}$,

所以等腰梯形 $AMED_1$ 的高为 $\sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

所以截面面积为 $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2}$, 故 B 错误;

对于 C, 如图建立空间直角坐标系,



由图可得, $B(2, 2, 0), D_1(0, 0, 2)$, 所以 $\overrightarrow{BD_1} = (-2, -2, 2)$,

设 $E(0, 2, m)(0 \leq m \leq 2)$, 所以 $\overrightarrow{BE} = (-2, 0, m)$,

所以点 E 到直线 BD_1 的距离 $d = \sqrt{|\overrightarrow{BE}|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{BD_1}|} \right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}(m-1)^2 + 2}$,

所以 $m = 1$ 时, 距离最小, 最小为 $\sqrt{2}$, 故 C 正确;

对于 D, 如图所示, 取 DD_1 的中点 G , 连接 EG, GP, PE ,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/537133143031006102>