2024届河北省新高考数学复习

专题2 数列解答题30题专项提分安排

1.（2024·河北·校联考模拟预料）已知$\left\{a_n\right\}$为等差数列，$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{5n-4}{1+5n},a_1=1$.

(1)求$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

(2)若$b_n=\frac{1}{\left(a_n+4\right)\left(a_n+14\right)},T_n$为$\left\{b_n\right\}$的前$n$项和，求$T_n$.

【答案】(1) $a_n=5n-4,\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$；

(2) $T_n=\frac{3n^2+5n}{100(n+1)(n+2)}$.

【分析】(1）利用累乘法，结合已知条件，即可求得结果；

（2）利用裂项求和法，结合（1）中所求a_n，即可求得结果.

【详解】(1） $\because\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{5n-4}{1+5n},a_1=1$.

$\therefore\frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{6},\frac{a_2}{a_3}=\frac{6}{11},\frac{a_3}{a_4}=\frac{11}{16},\cdots,\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{5n-9}{5n-4}$,

$\therefore\frac{a_1}{a_2}\times\frac{a_2}{a_3}\times\frac{a_3}{a_4}\times\cdots\times\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{1}{6}\times\frac{6}{11}\times\frac{11}{16}\times\cdots\times\frac{5n-9}{5n-4}=\frac{1}{5n-4}$,

$\therefore a_n=5n-4$；

当$n=1$时，$a_1=1$满意上式，

所以$a_n=5n-4,\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$；

（2）由（1）可得$b_n=\frac{1}{\left(a_n+4\right)\left(a_n+14\right)}=\frac{1}{5n\times(5n+10)}=\frac{1}{50}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$,

$\therefore T_n=\frac{1}{50}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{50}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{50}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{50}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{50}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3n^2+5n}{100(n+1)(n+2)}$.

2.（2024·河北·模拟预料）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=3$，且$S_n+S_{n+1}=2a_{n+1}-3$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)①$b_n=a_n\log_3 a_n$；②$b_n=\frac{1}{\log_3 a_n\cdot\log_3 a_{n+2}}$；③$b_n=a_n-\log_3 a_n$.

从上面三个条件中任选一个，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

注：假如选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

【答案】(1) $a_n=3^n$

(2)答案见解析

【分析】(1）由已知可得当$n\geq 2$时，$S_{n+1}-S_{n-1}=2a_{n+1}-2a_n$，进而得$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=3(n\geq 2)$，可求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若选①：$b_n=a_n\log_3 a_n=n\cdot 3^n$．错位相减法可求$T_n$．若选②：$b_n=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$，可求$T_n$．若选③：$b_n=3^n-n$，分组求和可求$T_n$．

【详解】(1）当$n\geq 2$时，$\because S_n+S_{n+1}=2a_{n+1}-3$，$\therefore S_{n-1}+S_n=2a_n-3$，

$\therefore S_{n+1}-S_{n-1}=2a_{n+1}-2a_n$，$\therefore a_{n+1}+a_n=2a_{n+1}-2a_n$，$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=3(n\geq 2)$，

当$n=1$时，$S_1+S_2=2a_2-3$．$\therefore a_1+a_1+a_2=2a_2-3$．$\therefore a_2=9$，

$\therefore \dfrac{a_2}{a_1}=3$，$\therefore$数列$\{a_n\}$是以$a_1=3$，3 为公比的等比数列，

$\therefore a_n=3\times 3^{n-1}=3^n$．

（2）若选①：$b_n=a_n\log_3 a_n=n\cdot 3^n$，

$\therefore T_n=1\times 3+2\times 3^2+3\times 3^3+\cdots+n\cdot 3^n$，

$\therefore 3T_n=1\times 3^2+2\times 3^3+\cdots+(n-1)\cdot 3^n+n\cdot 3^{n+1}$，

$\therefore -2T_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n\cdot 3^{n+1}$

$=\dfrac{3(1-3^n)}{1-3}-n\cdot 3^{n+1}=\dfrac{1}{2}\times 3^{n+1}-\dfrac{3}{2}-n\cdot 3^{n+1}$，

$\therefore T_n=(\dfrac{1}{2}n-\dfrac{1}{4})3^{n+1}+\dfrac{3}{4}$．

若选②：$b_n=\dfrac{1}{\log_3 a_n\cdot\log_3 a_{n+2}}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$，

$\therefore T_n=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{3})+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4})+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})+\cdots+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2})$

$=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$．

若选③：$b_n=a_n-\log_3 a_n=3^n-n$，

$\therefore T_n=(3-1)+(3^2-2)+(3^3-3)+\cdots+(3^n-n)$

$=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-(1+2+3+\cdots+n)$

$=\dfrac{3(1-3^n)}{1-3}-\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{3^{n+1}-n^2-n-3}{2}$．

【点睛】数列求和的常见方法：

①错位相减法

②裂项相消法

③分组求和

④公式法

⑤倒序相加法

3．（2024·河北张家口·统考一模）已知数列$\left\{a_n\right\}$是等比数列，且$8a_3=a_6$，

$a_2+a_5=36$.

(1)求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

(2)设$b_n=\dfrac{a_n}{\left(a_n+1\right)\left(a_{n+1}+1\right)}$，求数列$\left\{b_n\right\}$的前 n 项和T_n，并证明：$T_n<\dfrac{1}{3}$.

【答案】(1) $a_n=2^n$；

(2) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}$，证明见解析.

【分析】(1) 利用等比数列的通项公式进行求解即可；

(2) 运用裂项相消法进行运算证明即可.

【详解】(1) 设等比数列$\left\{a_n\right\}$的公比是 q，首项是a_1.

由$8a_3=a_6$，可得$q=2$.

由$a_2+a_5=36$，可得$a_1q\left(1+q^3\right)=36$，所以$a_1=2$，

所以$a_n=2^n$；

(2) 证明：因为$b_n=\dfrac{a_n}{\left(a_n+1\right)\left(a_{n+1}+1\right)}=\dfrac{1}{2^n+1}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}$，

所以$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(\dfrac{1}{2^1+1}-\dfrac{1}{2^2+1}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2+1}-\dfrac{1}{2^3+1}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n+1}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2^1+1}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}$.

又$\dfrac{1}{2^{n+1}+1}>0$，所以$T_n<\dfrac{1}{3}$.

4．（2024·河北唐山·统考一模）已知数列$\left\{a_n\right\}$的各项均不为零，S_n为其前 n 项和，

且$a_na_{n+1}=2S_n-1$.

(1)证明：$a_{n+2}-a_n=2$；

(2)若$a_1=-1$，数列$\left\{b_n\right\}$为等比数列，$b_1=a_1$，$b_2=a_3$.求数列$\left\{a_nb_n\right\}$的前 2024 项和

T_{2022}.

【答案】(1)证明见解析；

(2)4044.

【分析】（1）由题设递推式可得$a_{n+1}\left(a_{n+2}-a_n\right)=2a_{n+1}$，结合已知条件即可证结论.

（2）由（1）及等比数列定义写出$\{b_n\}$通项公式，进而有$a_nb_n=(-1)^n a_n$，依据奇偶项的正负性，应用分组求和法及（1）的结论求T_{2022}即可.

（1）

因为$a_na_{n+1}=2S_n-1$①，则$a_{n+1}a_{n+2}=2S_{n+1}-1$②，

②-①得：$a_{n+1}\left(a_{n+2}-a_n\right)=2a_{n+1}$，又$a_{n+1}\neq 0$，

所以$a_{n+2}-a_n=2$.

（2）

由$a_1=-1$得：$a_3=1$，于是$b_2=a_3=1$，

由$b_1=-1$得：$\{b_n\}$的公比$q=-1$.

所以$b_n=(-1)^n$，$a_nb_n=(-1)^n a_n$.

由$a_1a_2=2a_1-1$得：$a_2=3$

由$a_{n+2}-a_n=2$得：$a_{2022}-a_{2021}=a_{2020}-a_{2019}=\cdots=a_2-a_1=4$，

因此$T_{2022}=-a_1+a_2-a_3+a_4\cdots-a_{2021}+a_{2022}=\left(a_2-a_1\right)+\left(a_4-a_3\right)+\cdots+\left(a_{2022}-a_{2021}\right)$

$=1011\times\left(a_2-a_1\right)=1011\times 4=4044$.

5.（2024·河北邯郸·统考二模）已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q\neq 1$，且$a_1=2$，$2a_1+a_3=3a_2$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，求数列$\{\frac{n}{S_n+2}\}$的前n项和.

【答案】(1) $a_n=2^n$；

(2) $1-(n+2)\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$.

【分析】(1）依据等比数列的通项公式进行求解即可；

（2）利用错位相消法进行求解即可.

【详解】(1）由$2a_1+a_3=3a_2\Rightarrow 2\times 2+2\cdot q^2=3\times 2q\Rightarrow q=2$，或$q=1$（舍去），

所以$a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$；

（2）由（1）可知$a_n=2^n$，所以$S_n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$，

所以$\dfrac{n}{S_n+2}=\dfrac{n}{2^{n+1}}=n\cdot(\dfrac{1}{2})^{n+1}$，设数列$\{\dfrac{n}{S_n+2}\}$的前$n$项和为$T_n$，

$T_n=1\times(\dfrac{1}{2})^2+2\times(\dfrac{1}{2})^3+3\times(\dfrac{1}{2})^4+\cdots+n\cdot(\dfrac{1}{2})^{n+1}(1)$，

$\dfrac{1}{2}T_n=1\times(\dfrac{1}{2})^3+2\times(\dfrac{1}{2})^4+3\times(\dfrac{1}{2})^5+\cdots+n\cdot(\dfrac{1}{2})^{n+2}(2)$，

$(1)-(2)$，得$\dfrac{1}{2}T_n=(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{1}{2})^3+(\dfrac{1}{2})^4+\cdots+(\dfrac{1}{2})^{n+1}-n\cdot(\dfrac{1}{2})^{n+2}$，

即$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{\frac{1}{4}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot(\dfrac{1}{2})^{n+2}\Rightarrow T_n=1-(n+2)\cdot(\dfrac{1}{2})^{n+1}$.

6.（2024·河北石家庄·石家庄二中校考模拟预料）已知公差不为0的等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=3$且a_1,a_2,a_5成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{3^n a_n\}$的前n项和为T_n.

【答案】(1) $a_n=2n-1$

(2) $T_n=(n-1)\times 3^{n+1}+3$

【分析】（1）依据等差数列的通项公式和等比中项可求出结果；

（2）依据错位相减法可求出结果.

(1)

设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由题意可知$a_2^2=a_1a_5$.

即$(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d)$，又$a_2=a_1+d=3$，得$3d^2-6d=0$，

因为$d\neq 0$，所以$d=2$，$a_1=1$.

故通项公式$a_n=2n-1$.

(2)

$3^n a_n=(2n-1)3^n$，

$T_n=1\times 3+3\times 3^2+5\times 3^3+\cdots+(2n-1)\times 3^n$，

$3T_n=1\times 3^2+3\times 3^3+5\times 3^4+\cdots+(2n-1)\times 3^{n+1}$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/537201055011006130