

6. 设 $k > 1$ ，则关于 x, y 的方程 $(1-k)x^2 + y^2 = k^2 - 1$ 所表示的曲线是 ()

- A. 长轴在 y 轴上的椭圆 B. 长轴在 x 轴上的椭圆
C. 实轴在 y 轴上的双曲线 D. 实轴在 x 轴上的双曲线

7. 已知 x, y 满足条件 $\begin{cases} x \geq 0, & y \geq 0 \\ y \leq x \\ 2x + y + k \leq 0 \end{cases}$ (k 为常数), 若目标函数 $z = 3x + y$ 的最大值为 9, 则 $k =$ ()

- A. -16 B. -6 C. $-\frac{27}{4}$ D. $\frac{27}{4}$

8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 内有一条以点 $P\left(1, \frac{1}{3}\right)$ 为中点的弦 AB , 则直线 AB 的方程为()

- A. $3x - 3y - 2 = 0$ B. $3x - 3y + 2 = 0$
C. $3x + 3y - 4 = 0$ D. $3x + 3y + 4 = 0$

9. 已知集合 $A = \{x \mid x > 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - x + b = 0\}$, 若 $A \cap B = \{3\}$, 则 $b =$ ()

- A. -6 B. 6 C. 5 D. -5

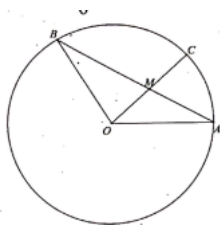
10. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 10x + 1, & x \leq 0 \\ |\lg x|, & x > 0 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ ($a \in R$) 有四个实数解 x_i ($i = 1, 2, 3, 4$), 其中

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $(x_1 + x_2)(x_3 - x_4)$ 的取值范围是 ()

- A. $(0, 101]$ B. $(0, 99]$ C. $(0, 100]$ D. $(0, +\infty)$

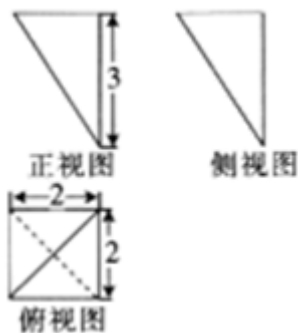
11. 点 A, B, C 是单位圆 O 上不同的三点, 线段 OC 与线段 AB 交于圆内一点 M , 若

$\vec{OC} = m\vec{OA} + n\vec{OB}$, ($m > 0, n > 0$), $m + n = 2$, 则 $\angle AOB$ 的最小值为 ()



- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

12. 已知某几何体的三视图如图所示, 其中正视图与侧视图是全等的直角三角形, 则该几何体的各个面中, 最大面的面积为 ()



- A. 2 B. 5 C. $\sqrt{13}$ D. $\sqrt{22}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 的坐标为 $(0, 5)$ ，点 B 是直线 $l: y = \frac{1}{2}x$ 上位于第一象限内的一点。已知以 AB 为直径的圆被直线 l 所截得的弦长为 $2\sqrt{5}$ ，则点 B 的坐标_____。

14. 已知曲线 $Q: \frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 (x > 0)$ ，点 A, B 在曲线 Q 上，且以 AB 为直径的圆的方程是 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ 。则 $a =$ _____。

15. 在边长为 2 的正三角形 ABC 中， $\overrightarrow{BD} = x\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CE} = y\overrightarrow{CA}, x > 0, y > 0, x + 2y = 1$ ，则 $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的取值范围为_____。

16. 已知 $(x+1)^2(x-a)^6 = a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 (a \in \mathbb{R})$ ，若 $a_1 = 0$ ，则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 =$ _____。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln(ax) - a, (a > 0)$ 。

(1) 若函数 $h(x) = e^x f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，求实数 a 的值；

(2) 定义：若直线 $l: y = kx + b$ 与曲线 $C_1: f_1(x, y) = 0, C_2: f_2(x, y) = 0$ 都相切，我们称直线 l 为曲线 C_1, C_2 的公切线，证明：曲线 $f(x) = \ln(ax) - a, (a > 0)$ 与 $g(x) = ae^x, (a > 0)$ 总存在公切线。

18. (12 分) 已知动圆 M 恒过点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，且与直线 $y = -\frac{1}{2}$ 相切。

(1) 求圆心 M 的轨迹 E 的方程；

(2) 设 P 是轨迹 E 上横坐标为 2 的点， OP 的平行线 l 交轨迹 E 于 A, B 两点，交轨迹 E 在 P 处的切线于点 T ，问：是否存在实常数 λ 使 $|PT|^2 = \lambda |TA| \cdot |TB|$ ，若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由。

19. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2 (n \geq 2)$ ，且 $a_1 \neq a_2, a_3 = \frac{1}{5}, a_1, a_2, a_5$ 成等比数列。

(1) 求证：数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $b_n = a_n a_{n+1} S_n - \frac{1}{4}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

20. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且过点 $(1, \frac{\sqrt{6}}{2})$ 。

(I) 求椭圆 C 的方程；

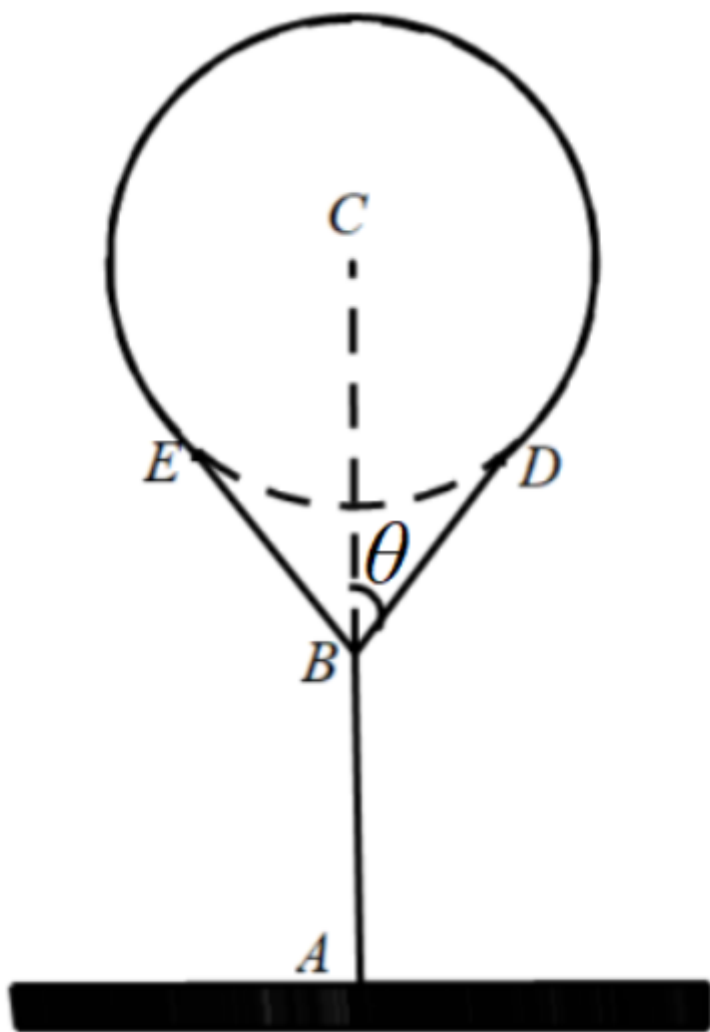
(II) 设 Q 是椭圆 C 上且不在 x 轴上的一个动点， O 为坐标原点，过右焦点 F 作 OQ 的平行线交椭圆于 M 、 N 两个不同的点，求 $\frac{|MN|}{|OQ|^2}$ 的值。

21. (12 分) 已知动圆 M 经过点 $N(2, 0)$ ，且动圆 M 被 y 轴截得的弦长为 4，记圆心 M 的轨迹为曲线 C 。

(1) 求曲线 C 的标准方程；

(2) 设点 M 的横坐标为 x_0 ， A ， B 为圆 M 与曲线 C 的公共点，若直线 AB 的斜率 $k = 1$ ，且 $x_0 \in [0, 4]$ ，求 x_0 的值。

22. (10 分) 如图，湖中有一个半径为 1 千米的圆形小岛，岸边点 A 与小岛圆心 C 相距 3 千米，为方便游人到小岛观光，从点 A 向小岛建三段栈道 AB ， BD ， BE ，湖面上的点 B 在线段 AC 上，且 BD ， BE 均与圆 C 相切，切点分别为 D ， E ，其中栈道 AB ， BD ， BE 和小岛在同一个平面上。沿圆 C 的优弧（圆 C 上实线部分）上再修建栈道 DE 。记 $\angle CBD$ 为 θ 。



(1) 用 θ 表示栈道的总长度 $f(\theta)$ ，并确定 $\sin \theta$ 的取值范围；

(2) 求当 θ 为何值时，栈道总长度最短.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

根据向量平行的坐标表示即可求解.

【详解】

$$\vec{a} = (4, 2), \vec{b} = (x, 3), \vec{a} \parallel \vec{b},$$

$$\therefore 4 \times 3 = 2x,$$

$$\text{即 } x = 6,$$

故选：A

【点睛】

本题主要考查了向量平行的坐标运算，属于容易题.

2、D

【解析】

由题设中所给的定义，方程 $f(x) = f'(x)$ 的实数根 x_0 叫做函数 $f(x)$ 的“新驻点”，根据零点存在定理即可求出 a 的大致范围

【详解】

解：由题意方程 $f(x) = f'(x)$ 的实数根 x_0 叫做函数 $f(x)$ 的“新驻点”，

对于函数 $g(x) = \ln x$ ，由于 $g'(x) = \frac{1}{x}$ ，

$$\therefore \ln x = \frac{1}{x},$$

设 $h(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ ，该函数在 $(0, +\infty)$ 为增函数，

$$\therefore h(1) = -1 < 0, \quad h(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \ln \sqrt{e} > 0,$$

$\therefore h(x)$ 在 $(1, 2)$ 上有零点，

故函数 $g(x) = \ln x$ 的“新驻点”为 a ，那么 $1 < a < 2$

故选：D.

【点睛】

本题是一个新定义的题，理解定义，分别建立方程解出 a 存在范围是解题的关键，本题考查了推理判断的能力，属于基础题..

3、B

【解析】

由题意，可设直线 DE 的方程为 $x = my + 2$ ，利用韦达定理判断第一个结论；将 $x = ty - 2$ 代入抛物线 C 的方程可得，

$y_A y_1 = 8$ ，从而， $y_A = -y_2$ ，进而判断第二个结论 设 F 为抛物线 C 的焦点，以线段 BE 为直径的圆为 M ，则圆心 M

为线段 BE 的中点. 设 B, E 到准线的距离分别为 d_1, d_2 , $\odot M$ 的半径为 R , 点 M 到准线的距离为 d , 显然 B, E, F 三点不共线, 进而判断第三个结论.

【详解】

解: 由题意, 可设直线 DE 的方程为 $x = my + 2$,

代入抛物线 C 的方程, 有 $y^2 - 4my - 8 = 0$.

设点 B, E 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

则 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -8$.

所 $x_1 x_2 = (my_1 + 2)(my_2 + 2) = m^2 y_1 y_2 + 2m(y_1 + y_2) + 4 = 4$.

则直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积为 $\frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -2$. 所以①正确.

将 $x = ty - 2$ 代入抛物线 C 的方程可得, $y_A y_1 = 8$, 从而, $y_A = -y_2$,

根据抛物线的对称性可知, A, E 两点关于 x 轴对称,

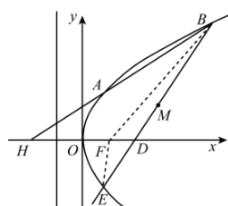
所以直线 $AE \parallel y$ 轴. 所以②正确.

如图, 设 F 为抛物线 C 的焦点, 以线段 BE 为直径的圆为 M ,

则圆心 M 为线段 BE 的中点. 设 B, E 到准线的距离分别为 d_1, d_2 , $\odot M$ 的半径为 R , 点 M 到准线的距离为 d ,

显然 B, E, F 三点不共线,

则 $d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{|BF| + |EF|}{2} > \frac{|BE|}{2} = R$. 所以③不正确.



故选: B.

【点睛】

本题主要考查抛物线的定义与几何性质、直线与抛物线的位置关系等基础知识, 考查运算求解能力、推理论证能力和创新意识, 考查数形结合思想、化归与转化思想, 属于难题.

4、B

【解析】

试题分析：该几何体上面是长方体，下面是四棱柱；长方体的体积 $V_1 = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ ，四棱柱的底面是梯形，体积为

$$V_2 = \frac{1}{2}(2+6) \cdot 2 \cdot 4 = 32, \text{ 因此总的体积 } V = 16 + 32 = 48.$$

考点：三视图和几何体的体积.

5、A

【解析】

求出所求圆的半径，可得出所求圆的标准方程.

【详解】

圆心为 $(2,1)$ 且和 x 轴相切的圆的半径为 1，因此，所求圆的方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$.

故选：A.

【点睛】

本题考查圆的方程的求解，一般求出圆的圆心和半径，考查计算能力，属于基础题.

6、C

【解析】

根据条件，方程 $(1-k)x^2 + y^2 = k^2 - 1$. 即 $\frac{y^2}{k^2 - 1} - \frac{x^2}{k + 1} = 1$ ，结合双曲线的标准方程的特征判断曲线的类型.

【详解】

解： $\because k > 1, \therefore 1+k > 0, k^2-1 > 0,$

方程 $(1-k)x^2 + y^2 = k^2 - 1$ ，即 $\frac{y^2}{k^2 - 1} - \frac{x^2}{k + 1} = 1$ ，表示实轴在 y 轴上的双曲线，

故选 C.

【点睛】

本题考查双曲线的标准方程的特征，依据条件把已知的曲线方程化为 $\frac{y^2}{k^2 - 1} - \frac{x^2}{k + 1} = 1$ 是关键.

7、B

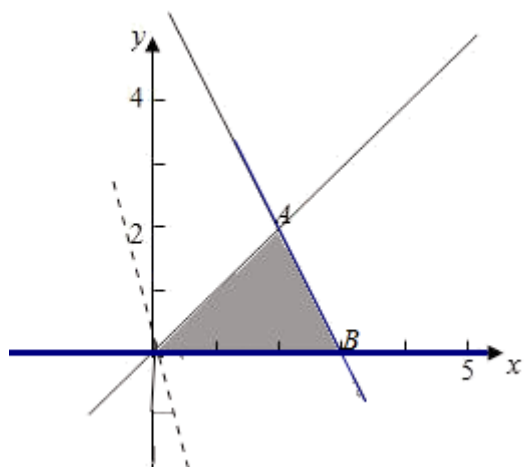
【解析】

由目标函数 $z = 3x + y$ 的最大值为 9，我们可以画出满足条件 件 $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ y \leq x \\ 2x + y + k \leq 0 \end{cases}$ (k 为常数) 的可行域，根据目标函数

的解析式形式，分析取得最优解的点的坐标，然后根据分析列出一个含参数 k 的方程组，消参后即可得到 k 的取值.

【详解】

画出 x, y 满足的 $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ y \leq x \\ 2x + y + k \leq 0 \end{cases}$ (k 为常数) 可行域如下图:



由于目标函数 $z = 3x + y$ 的最大值为 9,

可得直线 $y = 0$ 与直线 $9 = 3x + y$ 的交点 $B(3, 0)$,

使目标函数 $z = x + 3y$ 取得最大值,

将 $x = 3, y = 0$ 代入 $2x + y + k = 0$ 得: $k = -6$.

故选: B.

【点睛】

如果约束条件中含有参数, 我们可以先画出不含参数的几个不等式对应的平面区域, 分析取得最优解是哪两条直线的交点, 然后得到一个含有参数的方程 (组), 代入另一条直线方程, 消去 x, y 后, 即可求出参数的值.

8、C

【解析】

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\frac{x_1^2}{3} + y_1^2 = 1, \frac{x_2^2}{3} + y_2^2 = 1$, 相减得到 $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}k = 0$, 解得答案.

【详解】

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 设直线斜率为 k , 则 $\frac{x_1^2}{3} + y_1^2 = 1, \frac{x_2^2}{3} + y_2^2 = 1$,

相减得到: $\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{3} + (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$, AB 的中点为 $P\left(1, \frac{1}{3}\right)$,

即 $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}k = 0$, 故 $k = -1$, 直线 AB 的方程为: $y = -x + \frac{4}{3}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查了椭圆内点差法求直线方程，意在考查学生的计算能力和应用能力.

9、A

【解析】

由 $A \cap B = \{3\}$ ，得 $3 \in B$ ，代入集合 B 即可得 b .

【详解】

Q $A \cap B = \{3\}$ ， $\therefore 3 \in B$ ， $\therefore 9 - 3 + b = 0$ ，即： $b = -6$ ，

故选：A

【点睛】

本题考查了集合交集的含义，也考查了元素与集合的关系，属于基础题.

10、B

【解析】

画出函数图像，根据图像知： $x_1 + x_2 = -10$ ， $x_3 x_4 = 1$ ， $\frac{1}{10} \leq x_3 < 1$ ，计算得到答案.

【详解】

$f(x) = \begin{cases} x^2 + 10x + 1, & x \leq 0 \\ |\lg x|, & x > 0 \end{cases}$ ，画出函数图像，如图所示：

根据图像知： $x_1 + x_2 = -10$ ， $\lg x_3 = -\lg x_4$ ，故 $x_3 x_4 = 1$ ，且 $\frac{1}{10} \leq x_3 < 1$.

故 $(x_1 + x_2)(x_3 - x_4) = -10 \left(x_3 - \frac{1}{x_3} \right) \in (0, 99]$.

故选：B .

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/538004067065006051>