

第 8 章 稳恒磁场

在静止电荷周围存在着电场。如果电荷在运动，那么它的周围不仅有电场，而且还会产生磁场。当电荷运动形成稳恒电流时，在它的周围就是稳恒磁场。磁场也是物质的一种形态。本章主要研究恒定电流及其产生的稳恒磁场的性质，以及磁场对电流（运动电荷）的作用。在安培定律基础上，引入表征磁场性质的基本物理量——磁感应强度，着重讨论毕奥-萨伐尔定律，以及描述磁场基本规律的高斯定理和安培环路定律。

通过本章学习，理解磁感应强度和磁通量的概念，掌握磁感应强度和磁通量的计算方法；理解磁场的高斯定理，掌握毕奥-萨伐尔定律、安培环路定理及其应用；掌握磁场对载流导线的作用和运动电荷在磁场中受力及运动的规律。了解物质的磁化，掌握有磁介质时的安培环路定理及其应用。

8.1 恒定电流

电荷的定向运动形成电流，在导电介质中电荷的定向运动产生传导电流（conduction current），由带电体的机械运动产生的电流叫运流电流（convection current）。电荷在导体中运动是由于导体中存在着电场，电场对电荷的作用力引起电荷的宏观定向运动。若导体内各点电流的方向和大小不随时间改变，称为恒定电流（steady current），相应导体内的电场称为恒定电场（steady electric field）。

8.1.1 电流和电流密度

根据电流（current）的定义，在导电介质中产生电流有两个条件：(1) 存在可以自由移动的电荷；(2) 导体内存在电场。形成电流的带电粒子称为载流子（current carrier）。在金属导体内，载流子是自由电子；在电解液导体中，载流子是正、负离子；在电离气体中，载流子是正、负离子和自由电子。

电流的强弱用电流 I 来描述，定义为单位时间内通过导体任一截面的电荷量。如果在 dt 时间内通过导体某截面的电荷量为 dq ，则通过该截面的电流为

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (8.1)$$

电流是七个基本物理量之一，其国际单位是安培(A)。电流是标量，习惯所说的“电流方向”是指正电荷的流动方向。

电流只能描述通过导体某一截面电流的整体特征，不涉及载流子通过该截面的分布情况。如果电流通过粗细不均匀的导体，在大、小截面上载流子的分布和流向显然不同。因此仅有电流的概念是不够的，还必须引入能够描述电流分布的物理量——电流密度矢量（current density vector）。电流密度矢量的方向代表该点电流的方向，其数值等于通过该点单位垂直截面的电流。

如图 8.1 所示，在某点做一与电流方向垂直的截面 dS ，其法线单位矢量为 \vec{e}_n ，通过电流为 dI ，则电流密度矢量 \vec{J} 可表示为

$$\vec{J} = \frac{dI}{dS} \vec{e}_n \quad (8.2)$$

通过 dS' 的电流 dI 可表示为

$$dI = J dS' \cos \theta = \vec{J} \cdot d\vec{S}' \quad (8.3)$$

于是，通过任一曲面 S 的电流 I 表示为

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (8.4)$$

可见，电流密度 \vec{J} 和电流 I 的关系就是一个矢量场和它的通量的关系。

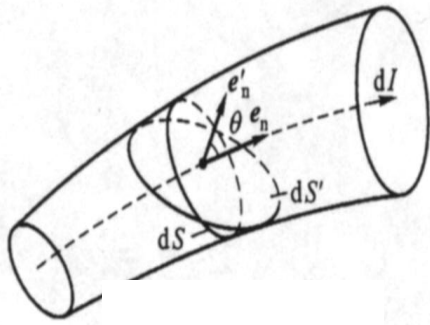


图 8.1 电流密度矢量

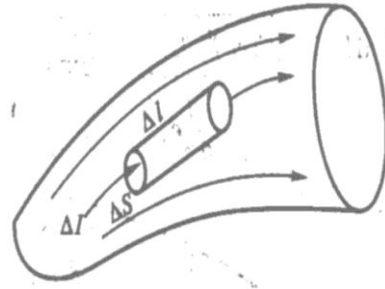


图 8.2

在大块导电介质中，各点 \vec{J} 有不同的数值和方向， \vec{J} 构成一个矢量场，即电流场。如同电场分布用电场线形象地描绘一样，电流场也可以用电流线来描绘。电流线就是这样一些曲线，其上每点的切线方向与该点电流密度矢量方向一致，通过单位垂直面积的电流线条数等于该点电流密度的数值。电流线围成的管状区域称为电流管，在恒定情况下，通过同一电流管任一截面的电流相同。

在导体内取一长为 Δl 、垂直截面积为 ΔS 的小电流管，如图 8.2 所示。在 Δt 时间内穿过面元 ΔS 的电荷应等于小柱体内的电荷量，即

$$\Delta I = \frac{\rho_e \Delta l \Delta S}{\Delta t} = \rho_e v \Delta S$$

写成矢量式

$$\vec{J} = \rho_e \vec{v} \quad (8.5)$$

式中， ρ_e 为该点电荷密度， \vec{v} 是该点电荷运动速度的平均值，称为迁移速度。

如果单位体积内的载流子数目为 n ，载流子电荷量为 e ，则上式可写成

$$\vec{J} = ne\vec{v} \quad (8.6)$$

若导体内存在几种不同的电荷，且具有不同的电荷密度和速度，则该点电流密度是它们各自在该点电流密度的矢量和，即

$$\vec{J} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i \quad (8.7)$$

8.1.2 欧姆定律

恒定电场和静电场一样，都满足环路定理，同样可以引入电势差 (electric potential difference) 的概念。电场是形成电流的必要条件，或者说，要使导体内有电流流过，两端必须有一定电压。德国物理学家欧姆 (G.S.Ohm) 通过实验发现，通过一段导体的电流与导体两端的电压成正比，这个结论称为欧姆定律 (Ohm law)。欧姆定律可以写成

$$I = \frac{U}{R} \quad (8.8)$$

比例系数 R 称为电阻 (resistance)，在国际单位制中，电阻单位是欧姆 (Ω)。欧姆定律不仅适用于金属导体，也适用于电解液。图 8.3 分别给出金属导体、半导体和气态导体的伏安特性曲线，其斜率等于电阻的倒数。

电阻的倒数称为电导 (conductance)，用 G 表示。在国际单位制中，电导的单位是西门子 (S)，它等于 Ω^{-1} 。

实验表明，电阻的大小与导体的材料和几何形状有关。对横截面均匀的导体材料，其电阻 R 与

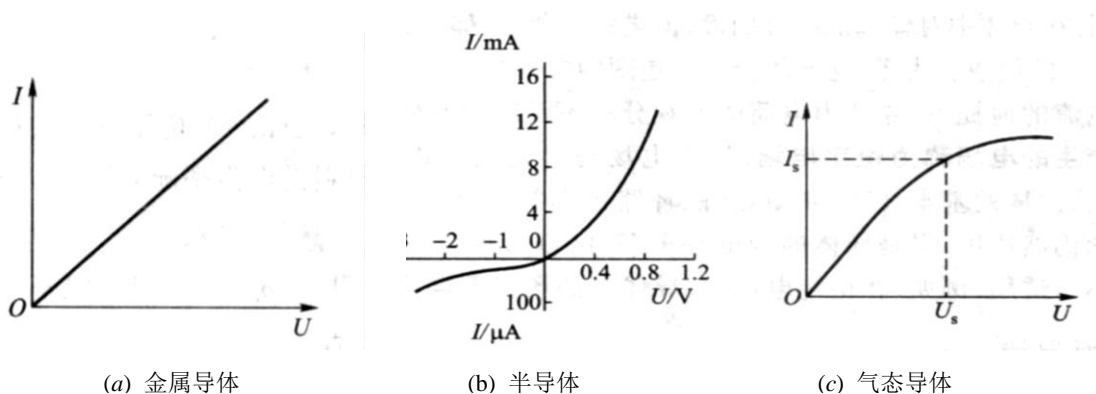


图 8.3 伏安特性曲线

长度 l 成正比，与横截面 S 成反比，有

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (8.9)$$

式中， ρ 称为材料的电阻率 (resistivity)，单位是欧姆·米 ($\Omega \cdot \text{m}$)，表示单位长度、单位面积的导体所具有的电阻。

当导体的电阻率 ρ 或横截面积 S 不均匀时，(8.9) 式应写以成如下积分形式

$$R = \int \frac{\rho dl}{S} \quad (8.10)$$

电阻率 ρ 的倒数称为电导率 (conductivity)，用 σ 表示，即

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (8.11)$$

在国际单位制中，电导率的单位是西门子·米⁻¹ (S m^{-1})。

当导体的温度升高时，电子与晶体点阵的热运动都将加强，它们之间的碰撞进一步剧烈，致使电子的定向运动易于破坏，电阻率增加。实验表明，电阻率与温度有如下关系

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t) \quad (8.12)$$

式中， α 称为电阻温度系数。表 (8.1) 给出一些材料的 ρ_0 和 α 值。

表 8.1 一些材料的 ρ_0 和 α 值

材料	$\rho_0 / \Omega \cdot \text{m}$	α / C^{-1}
银	1.49×10^{-8}	4.3×10^{-3}
铜	1.55×10^{-8}	4.3×10^{-3}
铝碳 (非晶态)	2.50×10^{-8}	4.7×10^{-3}
镍铬合金	3500×10^{-8}	-4.6×10^{-4}
(60%Ni, 15%Cr, 25%Fe)	110×10^{-8}	1.6×10^{-4}

下面，我们给出欧姆定律的微分形式。设想在导体中取一小电流管，如图 8.2 所示，其横截面积为 ΔS ，长为 Δl ，通过电流为 ΔI ，两端电压为 ΔU ，利用欧姆定律得出

$$\Delta I = \frac{\Delta U}{R}$$

式中， $\Delta I = J \Delta S$ ， $R = \frac{\Delta l}{\sigma \Delta S}$ ， $\Delta U = E \Delta l$ ，于是有

$$J = \sigma E$$

式中, E 是该点处的电场。由于 J 和 E 方向一致, 上式可写成矢量形式

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (8.13)$$

上式称为欧姆定律的微分形式, 它给出导体内每一点 \vec{J} 和 \vec{E} 的对应关系。尽管该式是在稳恒情况下倒出的, 但对非稳恒情况下也适用, 具有更大的普遍性。

8.1.3 电动势

在一段导体中, 欲获得稳恒电流, 需要一个稳恒不变的电场, 或者是在导体两端维持恒定不变的电势差。那么如何实现这样要求呢? 下面我们以电容器放电时产生电流为例, 说明如何实现这一要求。

如图 8.4 所示, 用导线将充电电容器的正负极板连接后, 正电荷在静电场力的作用下, 从正极板 A 沿导线向负极板 B 流动, 形成电流。两极板上的正负电荷逐渐中和而减少, 极板间的电势差也逐渐减小而趋于零, 导线中电流也会逐渐减小而趋于零。这种情况下的电流是暂时的, 所以仅靠静电场力是不能形成恒定电流。为了形成恒定电流, 需要存在着一种使正电荷从负极向正极运动的力, 能够不断的分离正负电荷以补充两极板上减少的电荷, 保持两极板间的电势差不变。显然, 这个力是与静电场力性质不同的非静电力(non-electrostatic force)。我们将能够提供这种非静电力的装置称为电源(power source)。

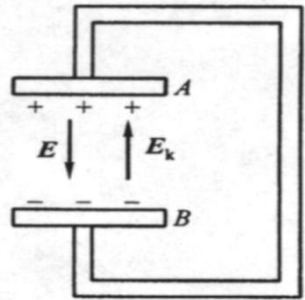


图 8.4 电源电动势

若在电源内部存在着一种使正电荷从负极向正极运动的非静电力 \vec{F}_k , 则相应存在一个非静电场, 其非静电场强(non-electrostatic field strength) 定义为

$$\vec{E}_k = \frac{\vec{F}_k}{q} \quad (8.14)$$

在 \vec{E}_k 的作用下, 电源的正板聚积着正电荷, 负板聚积着负电荷, 在两板间出现电势差, 在导体回路内产生电场, 推动电荷做定向运动, 形成电流。在推动电荷做功同时, 在导体内的载流子会发生碰撞, 产生焦耳热, 减少电场的能量。电源要补充电场的能量, 所以电源是形成稳恒电流的能源。

在电源内部存在着两种场 \vec{E}_k 和 \vec{E} , 前者是非静电场, 后者是静电场。考察电荷 q 从负极出发沿回路绕行一周, 电场力所做的功是

$$A = q \int_B^A (\vec{E} + \vec{E}_k) \cdot d\vec{l} + q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_B^A \vec{E}_k \cdot d\vec{l} + q \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

由于

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

故

$$A = q \int_B^A \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

因为在电源外 $E_k = 0$, 所以上式可写成

$$A = q \oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

令

$$\varepsilon = \frac{A}{q} = \oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} \quad (8.15)$$

ε 称为电动势 (electromotive force)。在国际单位制中, 电动势的单位为伏 (V)。

电动势的物理意义是: 在非静电场作用下, 使单位正电荷绕行一周时非静电力所做的功。电动势的大小反映电源将其它形式能量转变为电能的本领, 是电源本身的特征量。

电动势是标量, 我们规定从负极经电源内部到正极的方向为电动势的方向。

8.2 基本磁现象 安培定律

8.2.1 基本磁现象

磁现象和电现象一样, 很早以前就被人们发现了。我国是发现天然磁铁最早的国家。11 世纪 (北宋) 时, 我国科学家沈括研制出航海用的指南针, 并发现了地磁偏角。这些创造和发现都比西方科学家还早, 是我国祖先在科学领域的荣誉。

对于的磁性基本现象的认识, 可以综合如下:

(1) 天然磁铁能吸引铁、钴、镍等物质, 这一性质称为磁性 (magnetism)。磁铁的两端磁性最强, 称为磁极 (magnetic pole)。把一条磁铁 (magnet) 或磁针 (magnetic needle) 自由的悬挂起来, 它将自动地转向南北方向, 指北的一极称为指北级, 简称北极 (用 N 表示); 指南的一极称为指南极, 简称南极 (用 S 表示)。这一事实说明地球本身是一个巨大的磁体, 地球的磁 N 极在地理南极附近, 磁 S 极在地理北极附近。

(2) 磁极之间有相互作用力, 同性磁极相斥, 异性磁极相吸引。

(3) 磁铁的两个磁极不能分割成独立的 N 极或 S 极。在自然界中没有发现独立的 N 极或 S 极, 但是有独立存在的正电荷和负电荷, 这是磁极和电荷的基本区别。

(4) 1819 年丹麦物理学家奥斯特 (H.C.Oersted) 发现在载流导线周围的磁针, 会受到力的作用而偏转, 如图 8.5 所示。1820 年法国物理学家安培 (A.M.Ampere) 发现在磁铁附近的载流导线或载流线圈, 也会受到磁力的作用而发生运动, 如图 8.6 所示。

(5) 安培进一步的实验发现, 载流导线间或载流线圈间也有相互作用。两根平行载流导线, 当两电流的流向相同时, 会相互吸引, 相反则会相互排斥。

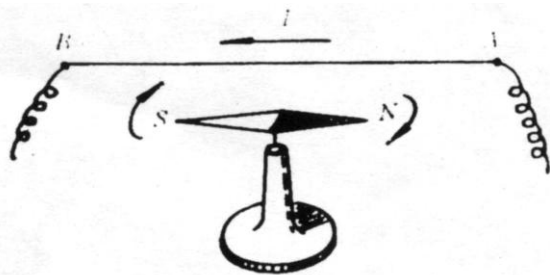
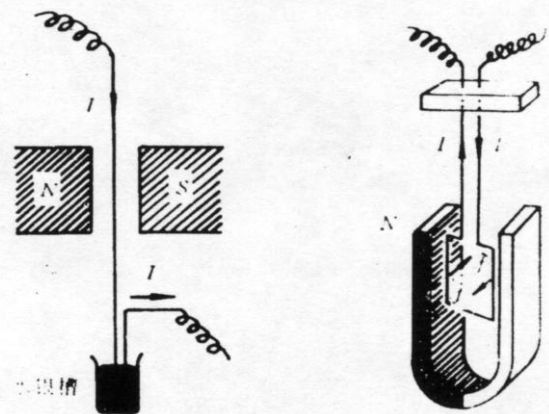


图 8.5 载流导线附近磁针受力作用偏转



(a) (b)
图 8.6 载流导线和线圈受力现象

上述事实说明磁性与电流有着密切的联系。为了解释磁性问题, 1822 年, 安培提出了有关物质磁性本质的假说, 他认为一切磁现象的根源是电流。磁性物质的分子中存在着回路电流, 称为分子电流 (molecular current)。分子电流相当于基元磁铁, 物质的磁性决定于物质中的分子电流。根据安培假说, 很容易说明两极不能单独存在的原因。因为基元磁铁的两个磁极对应分子电流的正反两个面, 这两个面显然是无法单独存在的。安培假说与现代对物质磁性的理解是相当符合的。分子电流

相当于分子中电子绕原子核的转动和电子本身的自旋运动。

现已明确磁现象起源于电荷的运动。运动电荷之间，除了电荷之间的库仑力以外，还有磁力（magnetic force）作用。

【著名实验】为了定量研究电流之间的相互作用，安培设计了四个极其精巧的实验，并在这些实验的基础上进行数学推导，得到普遍的电动力公式。

实验一证明电流反向，作用力也反向。如图 8.7 (a) 所示，安培用一无定向秤检验对折的通电导线有无磁力作用。所谓无定向秤，实际上是两个方向相反的通电线圈悬吊在水银槽下。如果两个线圈受力不均衡，就会发生偏转。实验结果是；当对折导线通电时，无定向秤丝毫不动，证明强度相等、方向相反的两个靠得很近的电流对另一电流产生的吸力和斥力在绝对值上是相等的。

实验二证明磁作用的方向性。如图 8.7 (b) 所示，安培仍用无定向秤，将对折导线中的一根绕成螺旋状，结果也是没有作用，说明弯曲的电流和直线的电流是等效的，因此可以把弯曲电流看成是许多小段电流(即电流元)组成，它的作用就是各小段电流作用的合成。

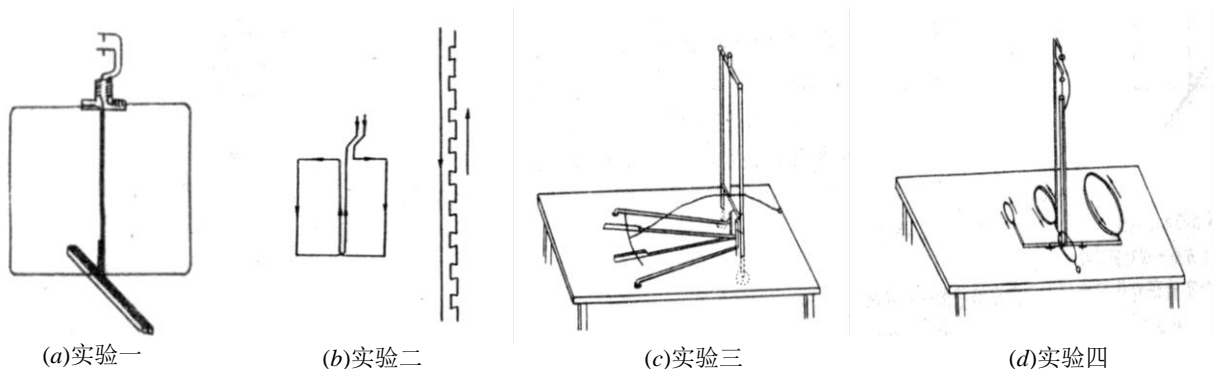


图 8.7 安培实验

实验三研究作用力的方向。如图 8.7 (c) 所示，安培把圆弧形导体架在水银槽上，经水银槽通电。改变通电回路或用各种通电线圈对它作用，圆弧导体都不动，说明作用力一定垂直于载流导体。

实验四检验作用力与电流及距离的关系。如图 8.7 (d) 所示，安培用三个相似的线圈，其半径之比分别等于其距离之比。通电后，中间的线圈丝毫不动，说明第一个线圈和第三个线圈对第二个线圈的作用相互抵消。由此得出结论：载流导线的长度与作用距离增加相同倍数时，作用不变。

在这些实验的基础上，安培推出了普遍的电动力公式，即：电流元之间的作用力为

$$F = \frac{i_1 i_2 dl_1 dl_2}{r^2} [\sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \omega + k \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2]$$

其中 θ_1 、 θ_2 分别为电流元 $i_1 dl_1$ 、 $i_2 dl_2$ 与其联线的夹角， ω 为电流元平面之间的夹角； k 是常数，安培确定 $k = -1/2$ 。

这个公式为安培的电动力学提供了基础。值得注意的是，安培的电动力公式从形式上看，与牛顿的万有引力定律非常相似。安培正是遵循牛顿的路线，仿照力学的理论体系，创建了电动力学。他认定电流元之间的相互作用力是电磁现象的核心，电流元相当于力学中的质点，它们之间存在超距作用，就象万有引力一样。

8.2.2 安培定律

载流导线可以分成无数多个无限小段，从中任取一微小段 dl ，按照该处电流方向定义线元矢量 $d\vec{l}$ ，则电流与线元矢量的乘积 $I d\vec{l}$ ，定义为该处的电流元（current element）矢量。

安培分析了大量的实验资料以后，证明两个电流之间存在着作用力，并总结出两个电流元之间

相互作用的磁力公式，称为安培定律（Amperèlaw）。如图 8.8 所示，第一个电流元 $I_1 d\vec{l}_1$ 对第二个电流元 $I_2 d\vec{l}_2$ 的作用力是

$$d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{l}_2 \times \left(k \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \quad (8.16)$$

式中， k 是比例系数，决定于所采用的单位制，并与所在空间的介质性质有关。

在国际单位制中，真空中 k 值规定为

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

μ_0 称为真空磁导率（permeability of vacuum），其数值是

$$\mu_0 = 12.57 \times 10^{-7} \text{ 亨利} \cdot \text{米}^{-1} \text{ (H m}^{-1}\text{)}$$

考虑到载流导线往往是闭合回路，如图 8.8(a) 所示。依据力的叠加原理，闭合回路 C_1 中电流 I_1 对闭合回路 C_2 中电流 I_2 的磁力是

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \oint_{C_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad (8.17)$$

上式为安培定律的表达式。 \vec{r}_{12} 是电流元 $I_2 d\vec{l}_2$ 相对于电流元 $I_1 d\vec{l}_1$ 的位置矢量。电流之间的作用力一般也称为安培力（Amperèforce）。

磁力与电力的显著区别之一是：电力是纵向力，两个点电荷之间的作用力总在它们的连线上；磁力是横向力，电流元受到的磁力总与电流元的方向垂直，运动电荷受到的磁力和电荷的运动方向垂直。所以，安培力不满足力的作用与反作用定律。

在国际单位制中，电流的单位是安培，是基本单位，利用安培定律可以说明安培的定义。设真空中有间隔为 d 的两个平行直线电流，如图 8.8 (b) 所示，由安培定律可以得到（推导略）导线单位长度受到的作用力的大小是

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d}$$

若取 $d = 1\text{m}$, $I_1 = I_2$ 是待定的单位电流，称为 1 安培（A），于是

$$\frac{dF}{dl} = 2 \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

所以安培的规定是：放在真空中的两条无限长平行导线，各通有相等的恒定电流，当两导线相距 1 米，每一导线每米长度上受力是 2×10^{-7} 牛顿时，各导线上的电流是 1 安培（A）。

8.3 磁场 毕奥-萨伐尔定律

8.3.1 磁场 磁感应强度

在静电场中，电荷之间的相互作用力（即电力）是通过电场来传递的，与此相似，磁力是通过磁场（magnetic field）来传递的。任何运动电荷或电流，在周围空间均产生磁场。

磁场和电场一样，也是一种特殊形态的物质。磁场的对外表现是：

- (1) 磁场对引入磁场中的运动电荷或载流导体有磁力的作用；
- (2) 载流导体在磁场中移动时，磁场的作用力对载流导体做功，可见，磁场具有能量。这表明了磁场的物质性。

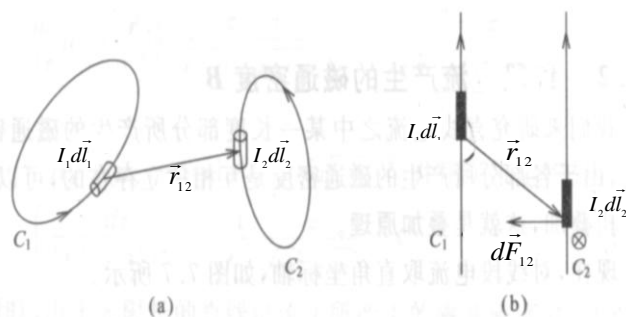


图 8.8 安培力

实验表明，磁场有强弱，也有方向。为了描述磁场的性质，引入一个重要的物理量——磁感应强度 \vec{B} (magnetic induction intensity)，其地位与电场强度 \vec{E} 相当。我们曾利用电场对试验电荷的作用来描述电场，现在也可以利用类似的方法来描述磁场。

选择试验电流元 $I d\vec{l}$ 放在磁场中某点处，假设其不影响磁场的原有分布。显然，试验电流元所受安培力 $d\vec{F}$ 与电流元 $I d\vec{l}$ 、以及磁场中该点的性质有关。当电流元 $I d\vec{l}$ 沿某一特定方向时，该电流元在磁场中所受的磁力为零，我们把这个特定方向定义为磁感应强度 \vec{B} 的方向；当电流元 $I d\vec{l}$ 沿着与磁场垂直的方向时，所受磁力为最大 dF_{\max} ，而且最大磁力 dF_{\max} 正比于电流元 $I d\vec{l}$ 的大小，但比值 $dF_{\max} / (I d\vec{l})$ 却在该点有确定的量值，而与 $I d\vec{l}$ 的大小无关。由此可见比值 $dF_{\max} / (I d\vec{l})$ 反映了该点磁场的强弱，我们把比值 $dF_{\max} / (I d\vec{l})$ 定义为该点磁感应强度 \vec{B} 的大小，即

$$B = \frac{dF_{\max}}{I dl} \quad (8.18)$$

这就是说，描述磁场性质的物理量——磁感应强度 \vec{B} 可定义如下：磁场中某点的磁感应强度 \vec{B} 的大小，等于电流元 $I d\vec{l}$ 与磁场方向垂直时，所受的最大磁力 dF_{\max} 与电流元 $I d\vec{l}$ 的大小的比值；而磁感应强度 \vec{B} 的方向就是电流元 $I d\vec{l}$ 所受磁力为零且与小磁针 N 极指向相同的方向。

在国际单位制中，按 (8.18) 式，力的单位为牛顿 (N)，电流的单位为安培 (A)，长度的单位为米 (m)，则磁感应强度的单位是特斯拉 (T)。

8.3.2 毕奥-萨伐尔定律

如图 8.10 所示，考虑电流元 $I d\vec{l}$ 在真空中的磁场。按照磁感应强度的定义，由安培定律得出该电流在 P 点的磁感应强度是

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (8.19)$$

上式是 19 世纪 20 年代由法国物理学家毕奥 (J.B.Biot)、萨伐尔 (F.Savart) 两人研究和分析了大量实验资料总结出的结论，所以称为毕奥——萨伐尔定律 (Biot-Savart law)。

对任意形状的载流导线所激发的磁场，按照场的叠加原理，利用毕奥——萨伐尔定律得出

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (8.20)$$

这里积分号下的 L 表示沿电流分布的曲线 L 进行积分。

电流源于电荷的定向运动，所以电流的磁场实质是运动电荷产生磁场的叠加。设在电流元内运动粒子的电量是 q，速度是 \vec{v} ，单位体积内的粒子数是 n，则

$$I d\vec{l} = J dS d\vec{l} = nq \vec{v} d\vec{l} dS = Nq \vec{v}$$

式中，dS 是电流元的横截面积，N 是电流元内的带电粒子总数。将上式带入 (8.19) 式，得出

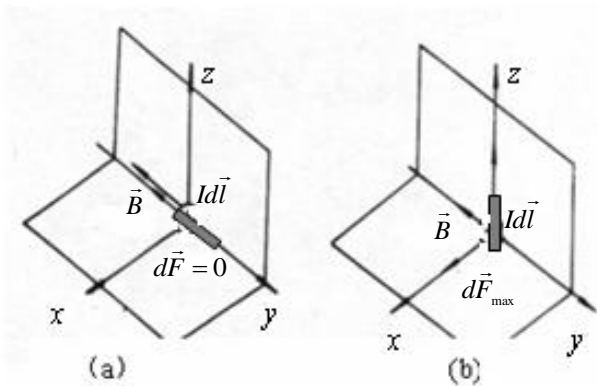


图 8.9 磁感应强度定义

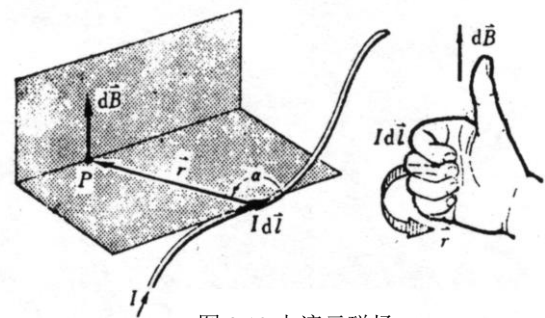


图 8.10 电流元磁场

$$d\vec{B} = N \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

于是，一个带电粒子的磁感应强度是

$$\vec{B}_1 = \frac{d\vec{B}}{N} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \quad (8.21)$$

应该注意，(8.20) 式为矢量积分。具体计算时，首先要分析载流导线上各电流元所产生的 $d\vec{B}$ 的方向是否一致。若 $d\vec{B}$ 方向相同，则上述矢量积分即化为代数量的普通积分。如果各个 $d\vec{B}$ 的方向不同，应该先将 $d\vec{B}$ 沿选定的各坐标轴投影，再对 $d\vec{B}$ 的各坐标分量进行积分。积分遍及整个载流导线。下面具体计算几种典型载流体的磁场。

(1) 载流直导线的磁场

设在真空中有一条长为 L 、通有电流为 I 的载流直导线，计算邻近直导线一点 P 处的磁感应强度。

在直导线上任取电流元 $I d\vec{l}$ ，如图 8.11 所示。按毕奥-萨伐尔定律，电流元在 P 点所产生的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}$$

$d\vec{B}$ 的方向由 $I d\vec{l} \times \vec{r}$ 确定，即垂直纸面向内，在图中用 \otimes 表示，这相当于看到箭的尾端（如果是垂直纸面向外，则用 \odot 表示，相当于看到箭的尖端）。由于长直导线 L 上每一电流元在 P 点的磁感应强度 $d\vec{B}$ 的方向都是相同的（即均垂直纸面向内），所以 P 点的磁感应强度是

$$B = \int_L dB = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cdot \sin \alpha}{r^2}$$

作 \overline{PO} 直线垂直直导线 L ，且令 $\overline{PO} = a$ ，取 \overline{PO} 与 \vec{r} 的夹角 β 作为新的变量，则由图可知

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta \quad \sin \alpha = \cos \beta \quad r = \frac{a}{\cos \beta} \quad l = a \tan \beta$$

微分最后一式，得

$$dl = \frac{a}{\cos^2 \beta} \cdot d\beta$$

把上列各式代入前式中，并取积分下限为 β_1 ，上限为 β_2 ，得

$$B = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cdot \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta \cdot d\beta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [\sin \beta_2 - \sin \beta_1] \quad (8.22)$$

式中，角 β_1 是由垂线 \overline{PO} 转向直电流 L 的起点形成的角度；而角 β_2 是由 \overline{PO} 转向直电流 L 的终点形成的角度。如果 \overline{PO} 是顺着电流的流向转向电流起点或终点，则相应的角度取正值，反之，取负值（如图 8.10 所示， β_1, β_2 皆取正值）。

如果所求点 P 靠近直导线的中部，而且 $a \ll L$ 时，则直导线可视为“无限长”，这时： $\beta_1 \approx -\pi/2$ ， $\beta_2 \approx \pi/2$ 。因此，无限长直导线的磁场是

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (8.23)$$

(2) 载流圆形线圈的磁场

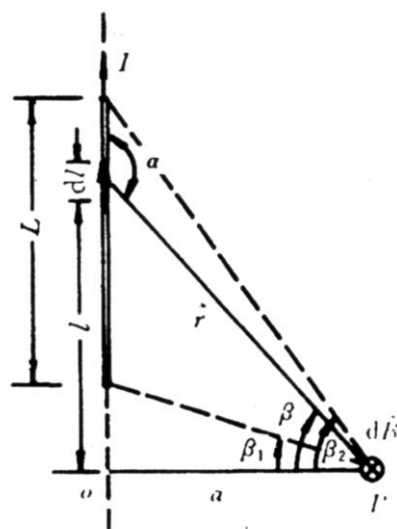


图 8.11 载流直导线的磁场

设真空中有半径为 R 、通有电流为 I 的圆线圈，计算其轴线上一点 P 的磁感应强度。

取轴线为 ox 轴，圆心 o 为原点。在圆线圈上任取电流元 $I d\vec{l}$ ，如图 8.12 所示。由毕奥-萨伐尔定律，该电流元在 P 点的磁感应强度 $d\vec{B}$ 的大小是

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cdot \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}$$

这里电流元 $I d\vec{l}$ 与矢径 \vec{r} 的夹角 $\alpha = 90^\circ$ ， $d\vec{B}$ 的方向如图 8.12 所示。显然，线圈上各电流元在 P 点产生的磁感应强度方向是不同的。为此将 $d\vec{B}$ 分解成两个分量：垂直于轴线的分量 dB_{\perp} 和平行于轴线的分量 dB_{\parallel} 。由于对称关系， dB_{\perp} 互相抵消，而 dB_{\parallel} 互相加强，所以 P 点的磁感应强度为

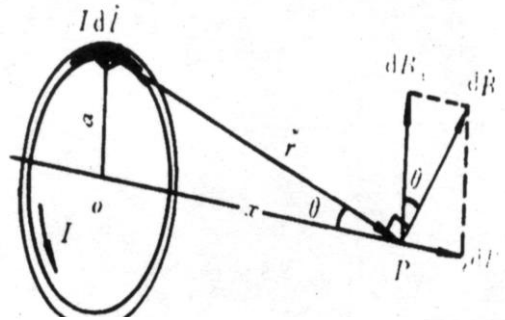


图 8.12 载流圆形线圈的磁场

$$B = \int_L dB_{\parallel} = \int_L dB \cdot \sin \theta = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin \theta = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} 2\pi R$$

利用

$$r^2 = R^2 + x^2 \quad \sin \theta = \frac{R}{r}$$

所以

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (8.24)$$

\vec{B} 的方向沿 x 轴正向。

对圆电流中心处 O 点，令 $x=0$ ， O 点磁感应强度的量值是

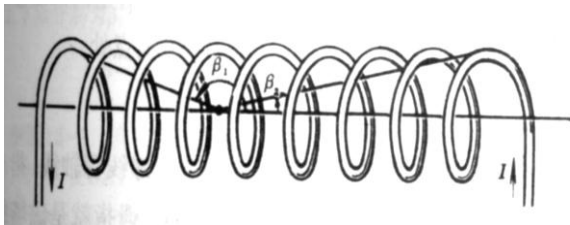
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (8.25a)$$

如果圆电流是由 N 匝导线组成，通过每匝的电流强度 I ，则圆心 O 点处磁感应强度的量值为

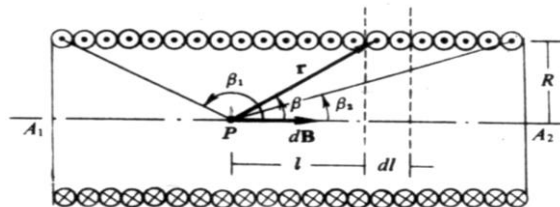
$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R} \quad (8.25b)$$

(3) 载流直螺线管内部的磁场

设真空中有一半径为 R 、通有电流 I 、每单位长度有线圈 n 匝的螺线管 (solenoid)。确定螺线管内部轴线上某点的磁感应强度。



(a) 直螺线管



(b) 直螺线管轴上各点磁感应强度计算用图

图 8.13 螺线管轴上各点磁感应强度计算

螺线管就是绕在直圆柱面上的螺旋线圈 (图 8-13a)，一般各匝线圈绕得很紧密，每匝线圈相当

于一个圆形线圈。载流直螺线管在某点处所产生的磁感应强度等于各匝线圈在该点所产生的磁感应强度的总和。任取一小段 dl ，则这小段上有线圈 ndl 匝，相当于电流强度为 $In dl$ 的一个圆形电流。应用公式 (8.24) 的结果，这小段上的线圈在轴线上 P 点所产生的磁感应强度是

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 In dl}{(R^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}$$

式中， l 是 P 点离 dl 处这一小段螺线管线圈的距离，磁感应强度的方向沿轴线向右。

螺线管各小段在 P 点产生的磁感应强度的方向都相同，因此整个螺线管产生的总磁感应强度是

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 In dl}{(R^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}$$

为了便于积分，我们引入参变量 β ，是螺线管轴线从 P 点到 dl 处小段线圈上任一点矢径之间的夹角。从图 8.13b 看出： $L=Rctg\beta$ ， $dl=-Rcsc^2\beta d\beta$ ，利用 $R^2+l^2=R^2csc^2\beta$ ，有

$$B = \int -\frac{\mu_0}{2} nI \sin \beta d\beta$$

β 的上下限分别为 β_2 和 β_1 ，代入上式得

$$B = \frac{\mu_0}{2} nI \int_{\beta_1}^{\beta_2} -\sin \beta d\beta = \frac{\mu_0}{2} nI (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \quad (8.26)$$

磁感应强度的方向沿轴线向右。 β_1 和 β_2 分别表示 P 点到螺线管两端的连线与轴线的夹角。

对无限长螺线管， $\beta_1 \rightarrow \pi$ ， $\beta_2 \rightarrow 0$ ，管内轴线上的磁感应强度为

$$B = \mu_0 nI \quad (8.27)$$

这一结果说明，任何绕得很紧密的长直螺线管内部的磁场是匀强的。轴线上各处 B 的量值变化情况如图 8.14 所示。

对长直螺线管端点（例如 A_1 点）来说， $\beta_1 \rightarrow \pi/2$ ， $\beta_2 \rightarrow 0$ ；该处磁感应强度恰是内部磁感应强度的一半

$$B = \mu_0 nI / 2$$

长直螺线管所产生的磁感应强度的方向沿螺线管轴线，指向可按右手定则确定，右手四指表示电流的方向，拇指就是磁场的指向。

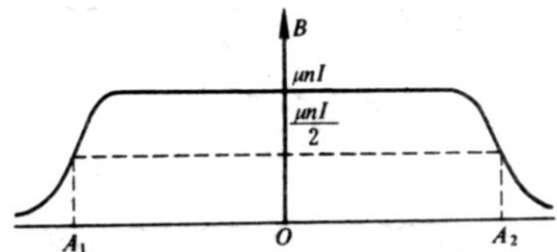


图 8.14 长直螺线管产生的磁场

8.4 磁通量 磁场中的高斯定理

8.4.1 磁感应线

类比电力线描绘电场，可以引入磁感应线描绘磁场。我们规定满足如下条件的曲线称为磁感应线 (magnetic induction line)

- (1) 磁感应线上任一点的切线方向和该点的磁场 (磁感应强度) 方向一致。
- (2) 通过磁场中某点处垂直于 \vec{B} 矢量的单位面积的磁感应线的数量等于该点 \vec{B} 矢量的量值。

图 8.15 示出几种常见的不同形状的电流产生磁场的磁感应线。从磁感应线的图示中可以得出如下结论：

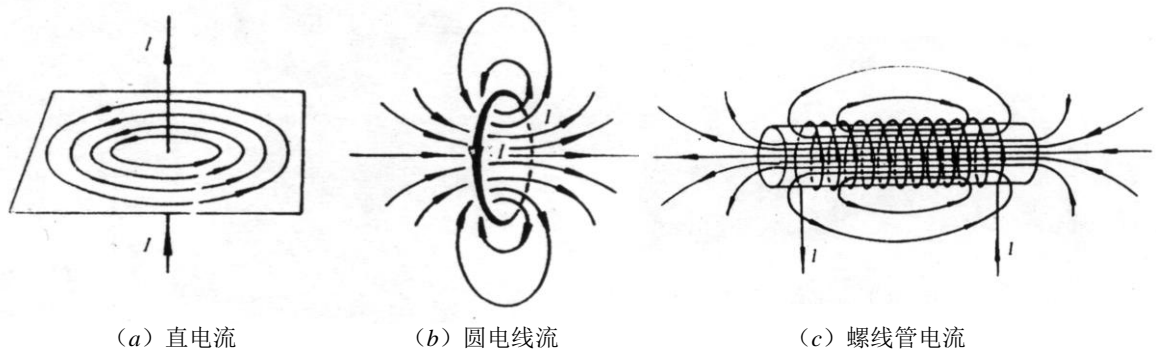


图 8.15 磁感应线

(1) 任意两条磁感应线不会相交。因为磁场中某点的磁场方向是唯一确定的。
 (2) 磁感应线是无头无尾的闭合线，和闭合电路相互套合，与静电场中的有头有尾的不闭合的电力线是截然不同的。这一情况是与正负电荷可以被分离，而 N 、 S 极不能被分离的事实相联系的。磁感应线是闭合线。因此磁场是涡旋场。

应该指出，电流方向与磁场方向是密切相关的，磁感应线的回转方向和电流方向可用右手定则来确定。而且，磁场较强的地方，磁感应线较密；反之，磁感应线较疏。

8.4.2 磁通量 磁场中的高斯定理

在磁场中通过任一给定曲面的磁感应线的数量，称为通过该面的磁感应通量或磁通量 (magnetic flux)，用 Φ_m 表示。在国际单位制中，磁通量的单位为韦伯 (Wb)。 $1\text{Wb}=1\text{T}\times 1\text{m}^2$ ，所以 1T 也可用 $1\text{Wb}\cdot\text{m}^{-2}$ 表示。

关于磁通量 (简称 \vec{B} 通量) 的计算与静电场中电通量 (\vec{D} 通量) 的计算类似。对放置在磁场 \vec{B} 中的某一曲面 S ，在 S 上取面积元 $d\vec{S}$ ， $d\vec{S}$ 的法线方向与该点处磁感应强度之间的夹角为 θ ，如图 8.16 所示。通过面积元 $d\vec{S}$ 的磁通量为

$$d\Phi_m = B \cos \theta ds = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

所以，通过有限曲面 S 的通量为

$$\Phi_m = \int_S d\Phi_m = \int_S B \cos \theta dS = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (8.28)$$

对闭合曲面来说，一般取向外的指向为正法线的方向。这样，从闭合曲面穿出的磁通量为正，穿入的磁通量为负。由于磁感应线是闭合线，因此穿入闭合曲面的磁感应线数必然等于穿出闭合曲面磁感应线数，所以通过任一闭合曲面的总磁通量必为零，即

$$\oint_S B \cos \theta dS = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8.29)$$

上式与静电学中的高斯定理很相似，但两者却有本质区别。在静电场中，由于自然界有独立存在的正负自由电荷，因此通过闭合曲面的电通量可以不等于零。而在磁场中，由于自然界没有独立存在的 N 、 S 极，所以通过任意闭合曲面的磁通量必等于零。由此可见，式 (8.29) 是表示磁场重要特性的公式，称为磁场中的高斯定理 (Gauss theorem in magnetic field)。它说明磁场是无源场。

例 8.1 如图 8.17 所示，在通有电流为 I 的无限长直导线是附近有一矩形回路，且二者共面。试计算通过该回路所包围面积的磁通量。

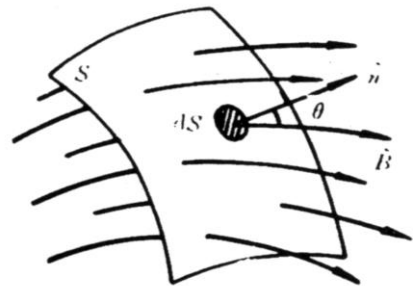


图 8.16 磁通量计算

解 取直电流处为坐标原点, 向右为 x 轴, 在 S 面内任一点的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad (\text{方向垂直纸面向内})$$

在 S 面内取一长为 l , 宽为 dx 的面积元 $dS = ldx$, 则通过面积元的磁通量为

$$d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S} = BdS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot ldx$$

所以通过回路所包围面积 S 的磁通量为

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 Il}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

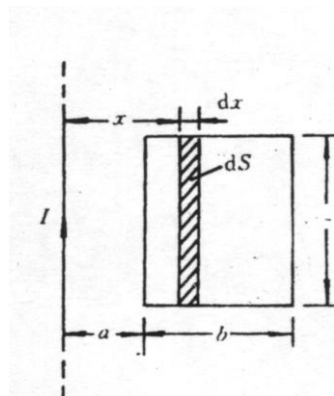


图 8.17 例 8.1 图

8.5 磁场对载流导线和运动电荷的作用

8.5.1 磁场对载流导线的作用

一、磁场对载流导线的作用

磁场对载流导线的作用力是安培力。由安培定律和毕奥——萨伐尔定律比较可知, 电流元 $I d\vec{l}$ 在磁场中所受的安培力可以表示为

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (8.30)$$

式中, \vec{B} 为 $I d\vec{l}$ 所在处的磁感应强度。

对于有限长的载流导线所受到的磁场作用力, 可以视为各电流元所受的力

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int_L I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (8.31)$$

这里矢量积分, 积分号下的 L 表示积分时应考虑整个载流导线的长度。

如果在均匀磁场 \vec{B} 中放置长为 l 的载流直导线, 如图 8.18 所示。这时每个电流元 $I d\vec{l}$ 的受力大小和方向均相同, 所以作用在直导线上的合力是各电流元所受分力的简单求和, 即

$$F = BIl \sin \theta \quad (8.32)$$

方向垂直纸面向里。显然, 导线与磁场平行时, 导线所受磁力为零; 导线与磁场垂直时, 导线所受磁力最大为 $F_{\max} = BIl$ 。

如果各电流元所受的力方向不一致, 就必须把各个力分解成分量, 再对整个导线取积分。

二、磁场对载流线圈的作用 磁矩

如图 8.19 所示, 在均匀磁场 \vec{B} 中放置刚性矩形载流线圈 (current-carrying coils) $abcd$, 边长分别为 l_1 和 l_2 , 电流为 I 。线圈平面与磁场方向成任意角 θ , 对边 ab 、 cd 与磁场垂直。

由式 (8.32) 知, 导线 bc 和 da 所受磁场作用力分别为

$$F_1 = BIl_1 \sin \theta$$

$$F_1' = BIl_1 \sin(\pi - \theta) = BIl_1 \sin \theta$$

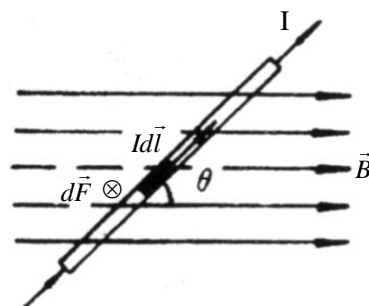


图 8.18 载流直导线在均匀磁场 \vec{B} 中受力

如图 8.19a 所示, 这两个力 F_1 和 F_1' 在同一直线上, 大小相等而方向相反, 互相抵消, 合力为零。

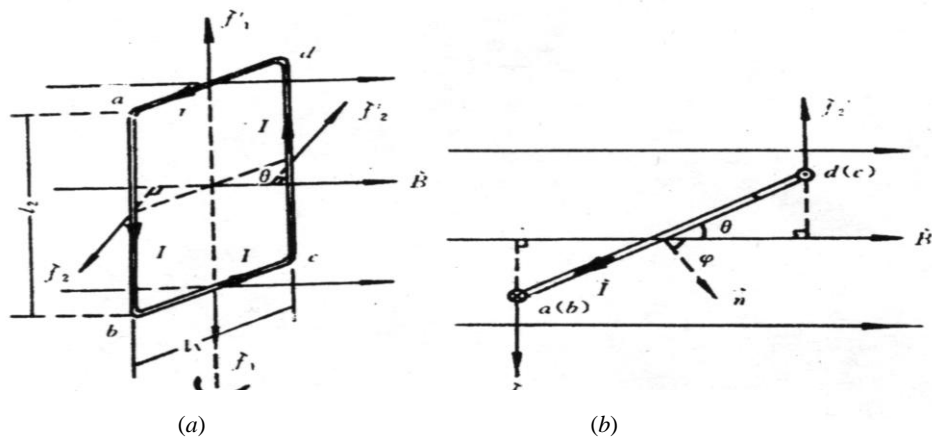


图 8.19 磁场对载流线圈的作用

同理, 导线 ab 和 cd 所受的磁场作用力是

$$F_2 = F_2' = BIl_2$$

这两力大小相等, 方向相反, 但力的作用线不再同一直线上, 因此形成一力偶, 力臂为 $l_1 \cos \theta$ 。所以磁场作用在载流线圈上的力矩大小为

$$M = F_2 \cdot l_1 \cos \theta = BIl_2 l_1 \cos \theta = BIS \cos \theta$$

式中, $S = l_1 l_2$ 为矩形线圈面积。

通常用线圈平面的法线方向来表示线圈的方位。线圈平面的正法线方向 \bar{n} 与载流线圈电流方向符合右手螺旋定则, 即电流流向表示螺旋的旋转方向, 则螺旋前进方向是载流线圈的正法线方向, 如图 8.19b 中所示。若线圈平面的正法线方向 \bar{n} 和磁场方向 \bar{B} 的夹角是 φ , $\theta + \varphi = \pi/2$, 有

$$M = BIS \sin \varphi$$

如果线圈是 N 匝, 那么线圈所受力矩的大小为

$$M = NBIS \sin \varphi$$

在此力矩作用下, 使载流线圈按逆时针方向转动。式中 NIS 是反映载流线圈性质的物理量, 是载流线圈的磁矩 (magnetic moment) 的大小, 用 p_m 表示, 而且它是一个矢量, 其方向就是载流线圈的正法线方向。因此, 载流线圈的磁矩定义为

$$\bar{p}_m = NIS \cdot \bar{n} \quad (8.33)$$

所以, 载流线圈在均匀磁场中所受的磁力矩 (magnetic moment of force) 是

$$\bar{M} = \bar{p}_m \times \bar{B} \quad (8.34)$$

上式不仅对矩形载流线圈成立, 对于处在均匀磁场中的任意形状的平面载流线圈也同样成立。

由 (8.34) 式可知, 当 $\varphi = \pi/2$ 时, 载流线圈磁矩 \bar{p}_m 与磁场方向垂直, 线圈所受磁力矩为最大 $M_{\max} = p_m \cdot B$, 该磁力矩有使 φ 减小的趋势; 当时 $\varphi = 0$, 即载流线圈磁矩 \bar{p}_m 的方向与磁场方向相同, 线圈所受磁力矩为零 ($M=0$), 这是载流线圈稳定平衡的位置; 当 $\varphi = \pi$ 时, 即 \bar{p}_m 的方向与磁场方向相反, 线圈所受磁力矩也为零, 但这是不稳定平衡位置。

综上所述, 均匀磁场中的平面载流线圈, 在磁力矩的作用下, 将发生转动而不会发生整个线圈的平动。而且, 载流线圈在均匀磁场中的转动促使载流线圈的磁矩 \bar{p}_m 的方向与外磁场 \bar{B} 的方向相同, 使线圈达到稳定平衡。

磁场对载流线圈作用力矩的规律是制造各种电动机和电流计的基本原理。

例 8.2 如图 8.20 所示, 在一长直流 I_1 附近放置长为 l , 电流为 I_2 的水平直导线, 求载流直导线 I_2 所受的磁力。

解 在 I_2 的导线上离 I_1 为 x 处取一电流元 $I_2 dx$ ，该电流元所在处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

其方向垂直纸面向里。因此，电流元所受磁力的大小为

$$dF = BI_2 dx = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} I_2 dx$$

方向为垂直 I_2 向上。

由于直线电流 I_2 上任意电流元所受磁力的方向都是相同的，因此整个直电流 I_2 所受的磁力为

$$F = \int dF = \int_a^{a+l} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{a+l}{a}$$

方向为垂直向上。

例 8.3 如图 8.21 所示，在均匀磁场 \vec{B} 中放置正三角形载流线圈，其边长为 l ，电流为 I ，且磁场方向与线圈平面平行。求载流线圈所受的磁力矩。

解 由于载流线圈处在均匀磁场中，可以直接用磁力矩公式 $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$ 计算线圈所受磁力矩。

载流线圈的面积是

$$S = \frac{1}{2} l^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

载流线圈的磁矩为

$$p_m = IS = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 I \quad \text{方向为 } \odot$$

\vec{p}_m 的方向与磁场 \vec{B} 的方向垂直，即 $\varphi = \pi/2$ 。因此，载流线圈所受磁力矩为

$$M = p_m B \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 I B \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} B I l^2 \quad \text{方向为 } \uparrow$$

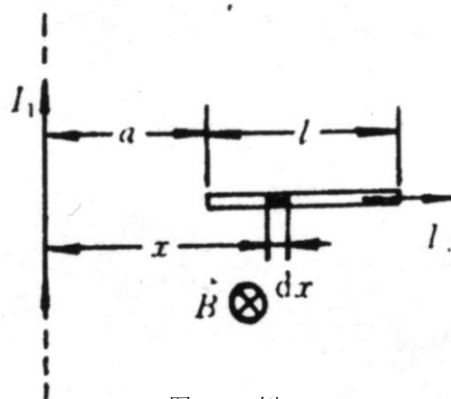


图 8.20 例 8.2

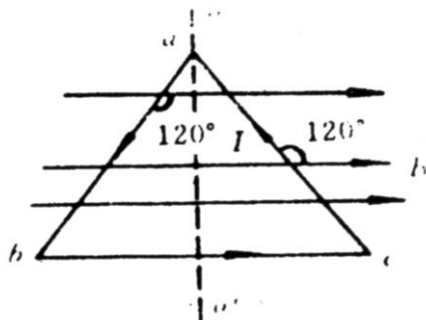


图 8.21 例 8.3

8.5.2 运动电荷在磁场中受力

一、洛伦兹力

电流来源于电荷的运动，磁场对电流的作用，实质是运动电荷受到磁力的作用，此力称为洛伦兹力 (Lorentz force)。安培力是洛伦兹力的宏观表现。

设在电流元内运动粒子的电量是 q ，速度是 \vec{v} ，单位体积内的粒子数是 n ，则

$$I d\vec{l} = J dS d\vec{l} = nq\vec{v} dl dS = Nq\vec{v}$$

带入 (8.30) 式，有

$$d\vec{F} = Nq\vec{v} \times \vec{B}$$

单个运动带电粒子的洛伦兹力是

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{N} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (8.35)$$

上式称为洛伦兹力公式 (Lorentz force formula)。力 \vec{f} 的方向除与电荷的运动方向和磁场方向有关外，还与电荷的正负有关。如果是正电荷， $q > 0$ ，由矢积的右手螺旋法则可确定正电荷受力 \vec{F} 与 $(\vec{v} \times \vec{B})$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/538010026133006051>