

本章复习提升

易混易错练

易错点1 对导数的定义理解不够精确致错

1. (2024 北京东城高二下期末统测, ★☆☆) 已知函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 1, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} = \quad (\quad)$$

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

2. (★★☆) 利用导数的定义, 求 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ 在 $x=1$ 处的导数.

易错点2 混淆“过某点”与“在某点处”的切线致错

3. (★★☆) 已知函数 $f(x)=x^3+2x-8$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, -8)$ 处的切线方程为_____;

若曲线 $y=f(x)$ 的某一切线与直线 $y=-\frac{1}{5}x+1$ 垂直, 则切点坐标为_____.

4. (2024 江苏南京秦淮中学高三上期初调研节选, ★☆☆) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x$, 求过坐标原点且与函数 $f(x)$ 的图象相切的直线方程.

易错点 3 对复合函数的求导法则理解不透致错

5. (★★) 已知函数 $f(x) = \ln(1-x)$, 则 $f'(x) =$ _____.
6. (★★) 求曲线 $y = e^{-2x} + 1$ 在点 $(0, 2)$ 处的切线与直线 $y=0$ 和 $y=x$ 围成的三角形的面积.

易错点 4 忽视取极值的条件致错

7. (★★) 函数 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 2$ 的极值点是 ()
- A. $x=1$ B. $x=-1$ 或 $x=1$ 或 $x=0$
- C. $x=0$ D. $x=-1$ 或 $x=1$
8. (★★) 设 $x=1$ 与 $x=2$ 是函数 $f(x) = a \ln x + bx^2 + x$ 的两个极值点.
- (1) 试确定常数 a 和 b 的值;
- (2) 试推断 $x=1, x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点还是微小值点, 并说明理由.

易错点 5 利用导数探讨函数单调性时忽视定义域致错

9. (★★) 求函数 $y = x\sqrt{ax - x^2} (a > 0)$ 的单调递减区间.

10. (★★) 已知函数 $f(x) = ax^{\frac{a}{x}} - 2 \ln x$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是单调函数, 求实数 a 的取值范围;

(2) 探讨函数 $f(x)$ 的单调性.

易错点 6 混淆极值与最值致错

11. (★★) 求函数 $f(x) = \sin 2x - x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

12. (★★) 已知函数 $f(x) = 2ax - \ln(2x)$, $x \in (0, e]$, 其中 e 是自然对数的底数, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

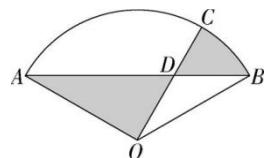
(2) 是否存在实数 a , 使 $f(x)$ 的最小值是 3? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由.

易错点 7 利用导数探讨实际问题时忽视定义域致错

13. (2024 江苏连云港赣榆高二下 4 月线上测试, ★★) 为响应“生产发展、生活富有、乡风文明、村容整齐、管理民主”的社会主义新农村建设的方针, 某自然村将村边一块废弃的扇形荒地(如图)租给蜂农养蜂、产蜜与售蜜. 已知扇形 AOB 中, $\angle AOB = \frac{2}{3}\pi$, $OB = 2\sqrt{3}$ (百米), 荒地内安排修建两条直路 AB, OC , 其中点 C 在弧 $\widehat{AB}$ 上(C 与 A, B 均不重合), 在小路 AB 与 OC 的交点 D 处设立售蜜点, 图中阴影部分为蜂巢区, 空白部分为蜂源植物生长区. 设 $\angle BDC = \theta$ ($\theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$), 蜂巢区的面积为 S (平方百米).

(1) 求 S 关于 θ 的函数关系式;

(2) 当 θ 为何值时, 蜂巢区的面积 S 最小, 并求 S 的最小值.



一、分类探讨思想在利用导数解决函数问题中的应用

1. (2024 江苏宿迁中学高二下期中, ★★) 已知函数 $f(x) = a \ln x + x^2$. 其中 $a \in \mathbb{R}$.

(1) 探讨函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a=1$, 求证: $f(x) \leq x^2 + x - 1$.

2. (2024 福建福州高三上期末质量检测, ★★) 已知函数 $f(x) =$

$$\cos x + ax^2 - 1.$$

(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 证明: $f(x) \geq 0$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有且只有一个零点, 求 a 的取值范围.

二、转化与化归思想在利用导数解决函数问题中的应用

3. (★★) 设函数 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 的导函数, 若 $f(x) - f(-x) = 2x^3$, 且当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 3x^2$, 则不等式 $f(x) - f(x-1) > 3x^2 - 3x + 1$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, 2)$ B. $(\frac{1}{2}, +\infty)$

C. $(-\infty, \frac{1}{2})$ D. $(2, +\infty)$

4. (2024 江苏无锡太湖高级中学高二下月考, ★★) 已知函数 $f(x) = (ax+b) \ln x$.

(1) 当 $a=1, b=0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 当 $a=1, b=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 2x - 2$ 的解集;

(3) 若 $a=1, b=1$, 且当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 恒有 $f(x) > \lambda(x-1)$ 成立, 求实数 λ 的取值范围.

5. (2024 河北衡水武邑中学高三上期末, ★★) 已知函数 $f(x) = e^x \cos x - x \sin x, g(x) = \sin x - \sqrt{2}e^x$, 其中 e 是自然对数的底数.

(1) $\forall x_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \exists x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 使得不等式 $f(x_1) \leq m + g(x_2)$ 成立, 试求实数 m 的取值范围;

(2) 若 $x > -1$, 求证: $f(x) - g(x) > 0$.

三、数形结合思想在利用导数解决函数问题中的应用

6. (2024 江苏连云港高二下期末, ★★) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2 (a \in \mathbb{R})$ 有三个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{e}{4}, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{e}{2}, +\infty\right)$
C. $\left(\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$ D. $\left(\frac{e^2}{2}, +\infty\right)$

7. (★★) 已知曲线 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + a$ 与 x 轴只有一个交点, 则实数 a 的取值范围为_____.

8. (★★) 已知函数 $f(x) = mx \ln x, m \in \mathbb{R}$, 若 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{e}$.

(1) 求实数 m 的值;

(2) 若 $a \in \mathbb{R}$, 探讨关于 x 的方程 $f(x) - ax^2 = 0$ 的解的个数.

答案全解全析

易混易错练

1. B 因为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 1,

$$\text{所以 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{2 \Delta x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{2} f'(x_0)$$

$$= \frac{1}{2}, \text{ 故选 B.}$$

易错警示

在导数的概念中, x 的变更量的形式是多种多样的, 可以是 $2 \Delta x$, $-\Delta x$, $\frac{1}{\Delta x}$, 等等, 但无论是哪种形式, 分子中的 x 的变更量与分母中的 x 的变更量必需保持一致.

2. 解析 $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1)$

$$= \sqrt{(1 + \Delta x)^2 + 1} - \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{(\Delta x)^2 + 2 \Delta x + 2} - \sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + 2 \Delta x + 2} - \sqrt{2}}{\Delta x},$$

$$\therefore f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + 2 \Delta x + 2} - \sqrt{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 + 2 \Delta x}{\Delta x [\sqrt{(\Delta x)^2 + 2 \Delta x + 2} + \sqrt{2}]}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + 2 \Delta x + 2} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. 答案 $y=2x-8$; (1, -5) 或 (-1, -11)

解析 由题意得 $f'(x)=3x^2+2$, 当 $x=0$ 时, $f'(0)=2$, 所以切线的斜率 $k=2$, 由直线的点斜式方程可求得切线方程为 $y-(-8)=2(x-0)$,

整理得 $y=2x-8$.

由已知直线的斜率为 $-\frac{1}{5}$, 可知所求切线的斜率存在且切线斜率 $k'=5$, 令 $f'(x)=3x^2+2=5$, 得

$$x=\pm 1,$$

当 $x=1$ 时, 代入得 $f(1)=-5$;

当 $x=-1$ 时, 代入得 $f(-1)=-11$, 所以所求切点坐标为 (1, -5) 或 (-1, -11).

4. 解析 设切点坐标为 (x_0, y_0) , 易得 $f'(x)=x^2+4x+4$,

所以切线方程为 $y - \frac{1}{3}x_0^3 - 2x_0^2 - 4x_0 = (x_0^2 + 4x_0 + 4)(x - x_0)$,

又此切线过原点 $(0, 0)$, 所以 $-\frac{1}{3}x_0^3 - 2x_0^2 - 4x_0 = -x_0^3 - 4x_0^2 - 4x_0$,

$$\text{即 } \frac{2}{3}x_0^3 + 2x_0^2 = 0,$$

解得 $x_0 = 0$ (二重根) 或 $x_0 = -3$,

当 $x_0 = 0$ 时, 切线方程为 $y = 4x$;

当 $x_0 = -3$ 时, 切线方程为 $y = x$.

易错警示

求曲线的切线方程时, 要分清是求“曲线在某点处的切线方程”, 还是求“曲线过某点的切线方程”, 前者所求得的切线有且只有一条, 此点恰好为切点, 而后者所求得的切线有一条或多条, 某点可能是切点, 也可能不是切点.

5. 答案 $\frac{1}{x-1}$

解析 $f'(x) = \frac{1}{1-x} \cdot (1-x)'$

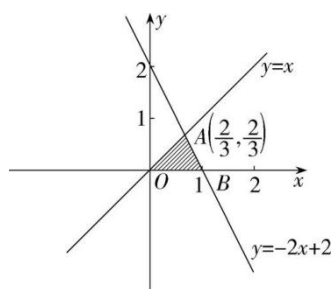
$$= \frac{1}{1-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x-1}.$$

6. 解析 依题意得 $y' = e^{-2x} \times (-2) = -2e^{-2x}$,

当 $x = 0$ 时, $y' = -2e^{-2 \times 0} = -2$,

故曲线 $y = e^{-2x} + 1$ 在点 $(0, 2)$ 处的切线方程是 $y - 2 = -2x$, 即 $y = -2x + 2$.

在平面直角坐标系中画出直线 $y = -2x + 2$ 和 $y = x$, 如图所示,



留意到直线 $y = -2x + 2$ 与 $y = x$ 的交点坐标是 $A(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, 直线 $y = -2x + 2$ 与 x 轴的交点坐标是

$B(1, 0)$,

故直线 $y = 0$, $y = x$ 和 $y = -2x + 2$ 所围成的三角形 AOB 的面积等于 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

7. C 由题意得, $f'(x) = 6x(x-1)^2(x+1)^2$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = \pm 1$.

当 $x < 0$ 时, $f'(x) \leq 0$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 的极值点为 $x = 0$. 故选 C.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/538042062023007046>