第2课时　直线与圆的方程的应用

CONTENTS 目录

01

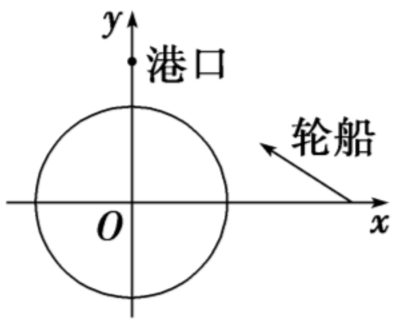
关键能力 提升

考点一　直线与圆的方程的实际应用

例1 一艘轮船沿直线返回港口的途中，接到气象台的台风预报，台风中心位于轮船正西70 km处，受影响的范围是半径为30 km的圆形区域，已知港口位于台风中心正北40 km处，如果这艘轮船不改变航线，那么它是否会受到台风的影响？

返回导航

【解】 以台风中心为原点，以东西方向为 x 轴建立平面直角坐标系(如图所示)，其中取 10 km 为单位长度，则受台风影响的圆形区域所对应的圆的方程为 $x^2+y^2=9$，港口所对应的点的坐标为(0，4)，轮船的初始位置所对应的点的坐标为(7，0)，则轮船航线所在直线 l 的方程为$\frac{x}{7}+\frac{y}{4}=1$，即 $4x+7y-28=0$，圆心(0，0)到 l：$4x+7y-28=0$ 的距离 $d=\frac{28}{\sqrt{4^2+7^2}}=\frac{28}{\sqrt{65}}$，因为$\frac{28}{\sqrt{65}}>3$，所以直线与圆相离．故轮船不会受到台风的影响．



返回导航

解题技巧

直线与圆方程的实际应用问题的解题步骤

审题	认真审题，明确题意，从题目中抽象出几何模型，明确已知和未知
建系	建立平面直角坐标系，用坐标表示点，用方程表示曲线，从而在实际问题中建立直线与圆的方程
求解	利用直线与圆的方程的有关知识求解问题
还原	将运算结果还原到实际问题中去

返回导航

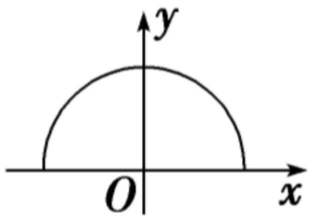
跟踪训练 一辆货车宽2米，要经过一个半径为$\sqrt{10}$米的半圆形隧道，则这辆货车的车顶(平顶)距离地面的高度不得超过(　　)

A.2.4米　　　　B．3米

C.3.6米　　　　D．2米

返回导航

解析：以半圆直径所在直线为 x 轴，过圆心且与 x 轴垂直的直线为 y 轴，建立如图所示的坐标系. 由半圆的半径为 $\sqrt{10}$ 可知，半圆所在圆的方程为 $x^2+y^2=10$.由图可知，当货车恰好在隧道中间行走时车顶可达到最高. 此时 $x=1$ 或 $x=-1$，代入 $x^2+y^2=10$，得 $y=3$(负值舍去).



返回导航

考点二　与圆有关的最值问题

例2　已知实数 x 和 y 满足 $(x+1)^2+y^2=\frac{1}{4}$，试求下列各式的最值：

(1) $\frac{y}{x}$；

【解】 设$k=\frac{y}{x}$，变形为$k=\frac{y-0}{x-0}$，此式表示圆$(x+1)^2+y^2=\frac{1}{4}$上一点$(x，y)$与点$(0，0)$连线的斜率，由$k=\frac{y}{x}$，可得$y=kx(x\neq 0)$，此直线与圆有公共点，圆心到直线的距离$d\leqslant r$，即$\frac{|-k|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant\frac{1}{2}$，解得$-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant k\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，故$\frac{y}{x}$的最大值是$\frac{\sqrt{3}}{3}$，最小值为$-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)x^2+y^2；

【解】　由题意知 x^2+y^2 表示圆$(x+1)^2+y^2=\frac{1}{4}$ 上的点到坐标原点的距离的平方，显然当圆上的点与坐标原点的距离取最大值和最小值时，其平方也相应取得最大值和最小值.

返回导航

原点(0，0)到圆心(−1，0)的距离 $d=1$，

故圆上的点到坐标原点的最大距离为 $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

最小距离为 $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$．

因此 x^2+y^2 的最大值和最小值分别为$\frac{9}{4}$和$\frac{1}{4}$．

返回导航

(3)$x+y$.

【解】 令 $x+y=b$ 并将其变形为 $y=-x+b$，问题可转化为斜率为-1的直线在经过圆$(x+1)^2+y^2=\frac{1}{4}$上的点时在 y 轴上的截距的最值.

当直线和圆相切时在 y 轴上的截距取得最大值和最小值，

此时有$\dfrac{|-1-b|}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

解得 $b=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1$，

即最大值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1$，最小值为$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1$.

解题技巧

与圆有关的最值问题的常见解法

(1)形如 $\mu=\dfrac{y-b}{x-a}$ 的最值问题，可转化为动直线斜率的最值问题.

(2)形如 $t=ax+by$ 的最值问题，可转化为动直线截距的最值问题.

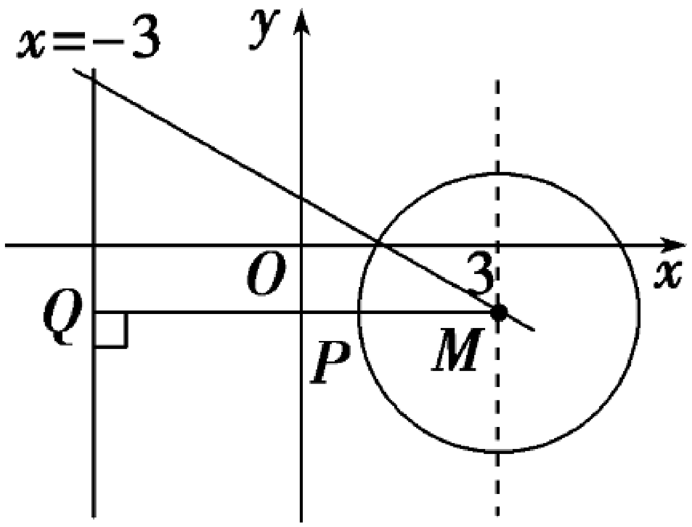
(3)形如$(x-a)^2+(y-b)^2$ 的最值问题，可转化为动点到定点的距离的平方的最值问题.

跟踪训练 设P是圆$(x-3)^2+(y+1)^2=4$上的动点，Q是直线$x=-3$上的动点，则$|PQ|$的最小值为(　　)

A.6　　　　B．4

C.3　　　　D．2

解析：画出已知图，利用数形结合的思想求解．如图，圆心$M(3，-1)$与定直线$x=-3$的最短距离为$|MQ|=3-(-3)=6$.因为圆的半径为2，所以$|PQ|$的最小值为$6-2=4$.



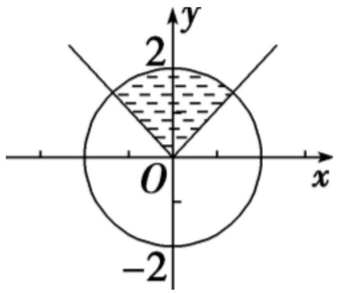
02 课堂巩固　自测

1．$y=|x|$的图象和圆 $x^2+y^2=4$ 所围成的较小的面积是(　　)

A.$\dfrac{\pi}{4}$　　　　B．$\dfrac{3\pi}{4}$

C.$\dfrac{3\pi}{2}$　　　　D．π

解析： 如图，所求面积是圆 $x^2+y^2=4$ 面积的$\dfrac{1}{4}$．



即$\dfrac{1}{4}\times 2^2\times\pi=\pi$.

返回导航

2. 圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上的点到直线 $x+y-14=0$ 的最大距离与最小距离的差是(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$

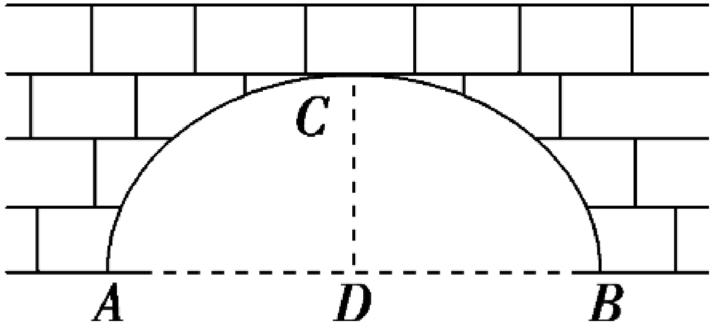
C. $6\sqrt{2}$　　D. $8\sqrt{2}$

解析： 圆的标准方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=18$，其圆心为$(2，2)$，$r=3\sqrt{2}$．

圆心到直线的距离为 $d=\dfrac{|2+2-14|}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$．

最大距离与最小距离的差为 $d+r-(d-r)=6\sqrt{2}$．

3．如图，圆弧形拱桥的跨度$AB=12$ m，拱高$CD=4$ m，则拱桥的直径为________ m．



解析： 设圆心为 O，半径为 r，则由勾股定理得，$|OB|^2=|OD|^2+|BD|^2$，即 $r^2=(r-4)^2+6^2$，解得 $r=\frac{13}{2}$，所以拱桥的直径为 13 m．

答案： 13

4．实数x，y满足方程$x+y-4=0$，求x^2+y^2的最小值．

解： 令 $x^2+y^2=r^2$，则 x^2+y^2 的最小值为圆 $x^2+y^2=r^2$ 与直线相切时的圆的半径的平方，所以 $r=\dfrac{|0-0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$，即 x^2+y^2 的最小值为 8.

03 课后达标 检测

[A　基础达标]

1．以 $M(-4，3)$为圆心的圆与直线 $2x+y-5=0$ 相离，那么圆 M 的半径 r 的取值范围是(　　)

A.$0<r<2$　　B．$0<r<\sqrt{5}$

C.$0<r<2\sqrt{5}$　　D．$0<r<10$

解析：圆心 M 到直线 $2x+y-5=0$ 的距离 $d=\frac{|2\times(-4)+3-5|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$，

由 $0<r<d$，知 C 项正确.

2．直线$\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$截圆$x^2+y^2=4$得到的劣弧所对的圆心角为

(　　)

A.30°　　　　B．45°

C.60°　　　　D．90°

解析：因为圆心到直线的距离为$d=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，又因为圆的半径为2，所以劣弧所对的圆心角为60°.