

2023 届福建省莆田四中高三下第一次学情调查数学试题

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

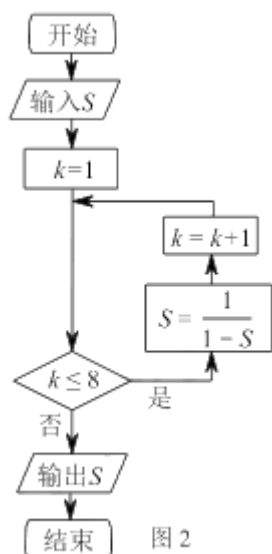
1. 设集合 $A = \{4, 5, 7, 9\}$, $B = \{3, 4, 7, 8, 9\}$, 全集 $U = A \cup B$, 则集合 $C_U(A \cap B)$ 中的元素共有 ()

- A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

2. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(x)$, 当 $x \in [-3, -2]$ 时, $f(x) = -x - 2$, 则 ()

- A. $f\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) > f\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)$ B. $f(\sin 3) < f(\cos 3)$
- C. $f\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right) < f\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$ D. $f(2020) > f(2019)$

3. 执行如图所示的程序框图，当输出的 $S = 2$ 时，则输入的 S 的值为()



- A. -2 B. -1 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

4. 把函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，再将图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，那么所得图象的一个对称中心为 ()

- A. $(\frac{\pi}{3}, 0)$ B. $(\frac{\pi}{4}, 0)$ C. $(\frac{\pi}{12}, 0)$ D. $(0, 0)$

5. 祖暅原理：“幂势既同，则积不容异”.意思是说：两个同高的几何体，如在等高处的截面积恒相等，则体积相等.设 A 、 B 为两个同高的几何体， P : A 、 B 的体积不相等， q : A 、 B 在等高处的截面积不恒相等.根据祖暅原理可知，

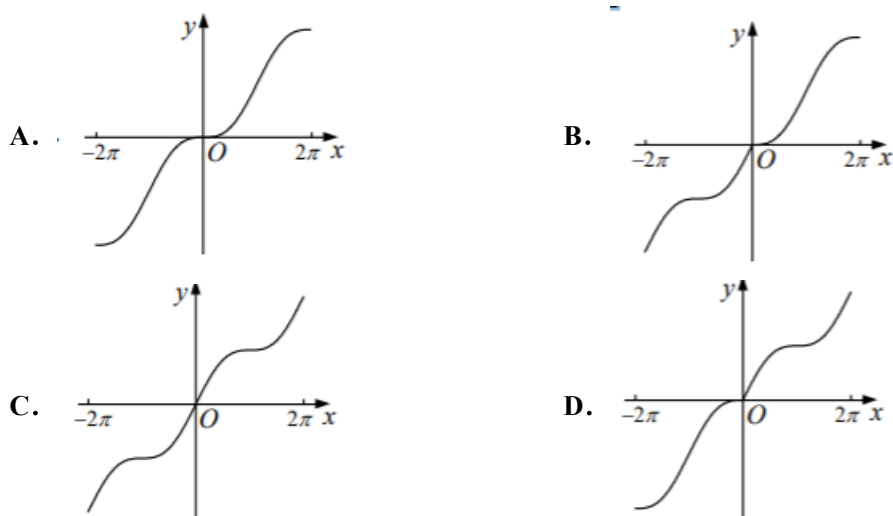
p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 函数 $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, 则“ $y = |xf(x)|$ 的图象关于 y 轴对称”是“ $y = f(x)$ 是奇函数”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 函数 $y = \sin|x| + x$ 在 $x \in [-2\pi, 2\pi]$ 上的大致图象是 ()



8. 在三角形 ABC 中, $a = 1$, $\frac{b+c}{\sin A} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B - \sin C}$, 求 $b \sin A =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

9. 记递增数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $a_1 = 1$, $a_9 = 9$, 且对 $\{a_n\}$ 中的任意两项 a_i 与 a_j ($1 \leq i < j \leq 9$), 其和

$a_i + a_j$, 或其积 $a_i a_j$, 或其商 $\frac{a_j}{a_i}$ 仍是该数列中的项, 则 ()

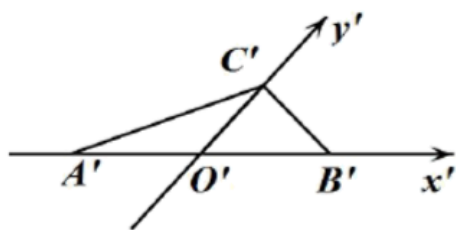
- A. $a_5 > 3, S_9 < 36$ B. $a_5 > 3, S_9 > 36$
C. $a_6 > 3, S_9 > 36$ D. $a_6 > 3, S_9 < 36$

10. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_2 = \frac{1}{9}$, $S_3 = \frac{7}{27}$, 则 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 的最小值为 ()

- A. $(\frac{4}{27})^2$ B. $(\frac{4}{27})^3$ C. $(\frac{4}{27})^4$ D. $(\frac{4}{27})^5$

11. 水平放置的 $VABC$, 用斜二测画法作出的直观图是如图所示的 $V'A'B'C'$, 其中 $O'A' = O'B' = 2$, $O'C' = \sqrt{3}$, 则

$VABC$ 绕 AB 所在直线旋转一周后形成的几何体的表面积为 ()



- A. $8\sqrt{3}\pi$ B. $16\sqrt{3}\pi$ C. $(8\sqrt{3}+3)\pi$ D. $(16\sqrt{3}+12)\pi$

12. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 满足以下条件 ①双曲线 E 的右焦点与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 重合 ②

双曲线 E 与过点 $P(4, 2)$ 的幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 的图象交于点 Q , 且该幂函数在点 Q 处的切线过点 F 关于原点的对称点. 则双曲线的离心率是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\sqrt{5}+1$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(x-4)$, 当 $x \in [-2, 2]$ 时, $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 + a, & -2 \leq x \leq a \\ 1-x, & a < x < 2 \end{cases}$, 若函数 $f(x)$ 在 $[0, 2020)$

上有 1515 个零点, 则实数 a 的范围为_____.

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x - y + 1 > 0 \\ x + y - 3 < 0 \end{cases}$, 则 $z = 2x - y$ 的取值范围为_____.

15. (5 分) 国家禁毒办于 2019 年 11 月 5 日至 12 月 15 日在全国青少年毒品预防教育数字化网络平台上开展 2019 年全国青少年禁毒知识答题活动, 活动期间进入答题专区, 点击“开始答题”按钮后, 系统自动生成 20 道题. 已知某校高二年级有甲、乙、丙、丁、戊五位同学在这次活动中答对的题数分别是 17, 20, 16, 18, 19, 则这五位同学答对题数的方差是_____.

16. 直线 $4kx - 4y - k = 0$ 与抛物线 $y^2 = x$ 交于 A, B 两点, 若 $|AB| = 4$, 则弦 AB 的中点到直线 $x + \frac{1}{2} = 0$ 的距离等于_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在综合素质评价的某个维度的测评中, 依据评分细则, 学生之间相互打分, 最终将所有的数据合成一个分数, 满分 100 分, 按照大于或等于 80 分的为优秀, 小于 80 分的为合格, 为了解学生的在该维度的测评结果, 在毕业班中随机抽出一个班的数据. 该班共有 60 名学生, 得到如下的列联表:

	优秀	合格	总计
--	----	----	----

男生	6		
女生		18	
合计			60

已知在该班随机抽取 1 人测评结果为优秀的概率为 $\frac{1}{3}$.

- (1) 完成上面的列联表；
- (2) 能否在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下认为性别与测评结果有关系？
- (3) 现在如果了解全校学生在该维度的表现情况，采取简单随机抽样方式在全校学生中抽取少数一部分来分析，请你选择一个合适的抽样方法，并解释理由.

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2 \geq k)$	0.25	0.10	0.025
k	1.323	2.706	5.024

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} - a$, $g(x) = \frac{a-1}{x} + \frac{a+|a|}{2} \cdot \frac{x}{e^{x-1}}$, ($a \in R$)

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；
- (2) 若 $f(x)$ 在定义域内有且仅有一个零点，且此时 $f(x) \geq g(x) + m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

19. (12 分) 在全面抗击新冠肺炎疫情这一特殊时期，我市教育局提出“停课不停学”的口号，鼓励学生线上学习.某校数学教师为了调查高三学生数学成绩与线上学习时间之间的相关关系，对高三年级随机选取 45 名学生进行跟踪问卷，其中每周线上学习数学时间不少于 5 小时的有 19 人，余下的人中，在检测考试中数学平均成绩不足 120 分的占 $\frac{8}{13}$,

统计成绩后得到如下 2×2 列联表：

	分数不少于 120 分	分数不足 120 分	合计
线上学习时间不少于 5 小时		4	19
线上学习时间不足 5 小时			
合计			45

- (1) 请完成上面 2×2 列联表；并判断是否有 99% 的把握认为“高三学生的数学成绩与学生线上学习时间有关”；

(2) ①按照分层抽样的方法，在上述样本中从分数不少于 120 分和分数不足 120 分的两组学生中抽取 9 名学生，设抽到不足 120 分且每周线上学习时间不足 5 小时的人数是 X ，求 X 的分布列（概率用组合数算式表示）；

②若将频率视为概率，从全校高三该次检测数学成绩不少于 120 分的学生中随机抽取 20 人，求这些人中每周线上学习时间不少于 5 小时的人数的期望和方差.

（下面的临界值表供参考）

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

（参考公式 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 其中 $n = a+b+c+d$ ）

20. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{3}$ ，离心率 $e = \frac{1}{2}$ ，其右焦点为 F .

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过 F 作夹角为 $\frac{\pi}{4}$ 的两条直线 l_1, l_2 分别交椭圆 C 于 P, Q 和 M, N ，求 $\frac{|PQ|}{|MN|}$ 的取值范围.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x - m \ln(x+1)$ ，其中 $m \in R$.

(I) 若 $m > 0$ ，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(II) 设 $g(x) = f(x) + \frac{1}{e^x}$. 若 $g(x) > \frac{1}{x+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，求实数 m 的最大值.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - (a+2)x + a \ln x$ (a 为实常数).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的单调性；

(2) 若存在 $x \in [1, e]$ ，使得 $f(x) \leq 0$ 成立，求实数 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. A

【解析】

试题分析: $U = A \cup B = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $A \cap B = \{4, 7, 9\}$, 所以 $C_U(A \cap B) = \{3, 5, 8\}$, 即集合 $C_U(A \cap B)$ 中共有 3 个元素, 故选 A.

考点: 集合的运算.

2、B

【解析】

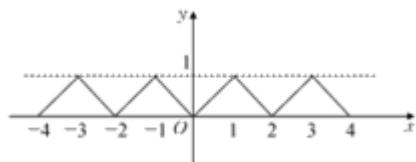
根据函数的周期性以及 $x \in [-3, -2]$ 的解析式, 可作出函数 $f(x)$ 在定义域上的图象, 由此结合选项判断即可.

【详解】

由 $f(x+2) = f(x)$, 得 $f(x)$ 是周期函数且周期为 2,

先作出 $f(x)$ 在 $x \in [-3, -2]$ 时的图象, 然后根据周期为 2 依次平移,

并结合 $f(x)$ 是偶函数作出 $f(x)$ 在 R 上的图象如下,



选项 A, $0 < \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} < 1$,

所以 $f\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) < f\left(\cos \frac{\pi}{6}\right)$, 选项 A 错误;

选项 B, 因为 $\frac{3\pi}{4} < 3 < \pi$, 所以 $0 < \sin 3 < \frac{\sqrt{2}}{2} < -\cos 3 < 1$,

所以 $f(\sin 3) < f(-\cos 3)$, 即 $f(\sin 3) < f(\cos 3)$, 选项 B 正确;

选项 C, $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $1 > -\sin \frac{4\pi}{3} > -\cos \frac{4\pi}{3} > 0$,

所以 $f\left(-\sin \frac{4\pi}{3}\right) > f\left(-\cos \frac{4\pi}{3}\right)$, 即 $f\left(\sin \frac{4\pi}{3}\right) > f\left(\cos \frac{4\pi}{3}\right)$,

选项 C 错误;

选项 D, $f(2020) = f(0) < f(1) = f(2019)$, 选项 D 错误.

故选: B.

【点睛】

本题考查函数性质的综合运用, 考查函数值的大小比较, 考查数形结合思想, 属于中档题.

3、B

【解析】

若输入 $S = -2$ ，则执行循环得 $S = \frac{1}{3}, k = 2; S = \frac{3}{2}, k = 3; S = -2, k = 4; S = \frac{1}{3}, k = 5; S = \frac{3}{2}, k = 6;$

$S = -2, k = 7; S = \frac{1}{3}, k = 8; S = \frac{3}{2}, k = 9;$ 结束循环，输出 $S = \frac{3}{2}$ ，与题意输出的 $S = 2$ 矛盾；

若输入 $S = -1$ ，则执行循环得 $S = \frac{1}{2}, k = 2; S = 2, k = 3; S = -1, k = 4; S = \frac{1}{2}, k = 5; S = 2, k = 6;$

$S = -1, k = 7; S = \frac{1}{2}, k = 8; S = 2, k = 9;$ 结束循环，输出 $S = 2$ ，符合题意；

若输入 $S = -\frac{1}{2}$ ，则执行循环得 $S = \frac{2}{3}, k = 2; S = 3, k = 3; S = -\frac{1}{2}, k = 4; S = \frac{2}{3}, k = 5; S = 3, k = 6;$

$S = -\frac{1}{2}, k = 7; S = \frac{2}{3}, k = 8; S = 3, k = 9;$ 结束循环，输出 $S = 3$ ，与题意输出的 $S = 2$ 矛盾；

若输入 $S = \frac{1}{2}$ ，则执行循环得 $S = 2, k = 2; S = -1, k = 3; S = \frac{1}{2}, k = 4; S = 2, k = 5; S = -1, k = 6;$

$S = \frac{1}{2}, k = 7; S = 2, k = 8; S = -1, k = 9;$ 结束循环，输出 $S = -1$ ，与题意输出的 $S = 2$ 矛盾；

综上选 B.

4、D

【解析】

试题分析：把函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍（纵坐标不变），可得 $y = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$ 的图象

再将图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，可得 $y = \sin[\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}] = \sin \frac{1}{2}x$ 的图象，那么所得图象的一个对称中心为 $(0, 0)$ ，

故选 D.

考点：三角函数的图象与性质.

5、A

【解析】

由题意分别判断命题的充分性与必要性，可得答案.

【详解】

解：由题意，若 A 、 B 的体积不相等，则 A 、 B 在等高处的截面积不恒相等，充分性成立；反之， A 、 B 在等高处的截面积不恒相等，但 A 、 B 的体积可能相等，例如 A 是一个正放的正四面体， B 一个倒放的正四面体，必要性不成立，所以 P 是 Q 的充分不必要条件，

故选：A.

【点睛】

本题主要考查充分条件、必要条件的判定，意在考查学生的逻辑推理能力.

6、B

【解析】

根据函数奇偶性的性质，结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【详解】

设 $g(x) = |xf(x)|$ ，若函数 $y = f(x)$ 是 R 上的奇函数，则 $g(-x) = |-xf(-x)| = |xf(x)| = g(x)$ ，所以，函数 $y = |xf(x)|$ 的图象关于 y 轴对称.

所以，“ $y = f(x)$ 是奇函数” $\Rightarrow$ “ $y = |xf(x)|$ 的图象关于 y 轴对称”；

若函数 $y = f(x)$ 是 R 上的偶函数，则 $g(-x) = |-xf(-x)| = |-xf(x)| = |xf(x)| = g(x)$ ，所以，函数 $y = |xf(x)|$ 的图象关于 y 轴对称.

所以，“ $y = |xf(x)|$ 的图象关于 y 轴对称” $\nRightarrow$ “ $y = f(x)$ 是奇函数”.

因此，“ $y = |xf(x)|$ 的图象关于 y 轴对称”是“ $y = f(x)$ 是奇函数”的必要不充分条件.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查充分条件和必要条件的判断，结合函数奇偶性的性质判断是解决本题的关键，考查推理能力，属于中等题.

7、D

【解析】

讨论 x 的取值范围，然后对函数进行求导，利用导数的几何意义即可判断.

【详解】

当 $x \geq 0$ 时， $y = \sin x + x$ ，则 $y' = \cos x + 1 \geq 0$ ，

所以函数在 $[0, 2\pi]$ 上单调递增，

令 $g(x) = \cos x + 1$ ，则 $g'(x) = -\sin x$ ，

根据三角函数的性质，

当 $x \in [0, \pi]$ 时， $g'(x) = -\sin x < 0$ ，故切线的斜率变小，

当 $x \in [\pi, 2\pi]$ 时， $g'(x) = -\sin x > 0$ ，故切线的斜率变大，可排除 A、B；

当 $x < 0$ 时， $y = -\sin x + x$ ，则 $y' = -\cos x + 1 \geq 0$ ，

所以函数在 $[-2\pi, 0]$ 上单调递增，

令 $h(x) = -\cos x + 1$, $h'(x) = \sin x$,

当 $x \in [-2\pi, -\pi]$ 时, $h'(x) = \sin x > 0$, 故切线的斜率变大,

当 $x \in [-\pi, 0]$ 时, $h'(x) = \sin x < 0$, 故切线的斜率变小, 可排除 C,

故选: D

【点睛】

本题考查了识别函数的图像, 考查了导数与函数单调性的关系以及导数的几何意义, 属于中档题.

8、A

【解析】

利用正弦定理边角互化思想结合余弦定理可求得角 B 的值, 再利用正弦定理可求得 $b \sin A$ 的值.

【详解】

$$\text{Q } \frac{b+c}{\sin A} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B - \sin C}, \text{ 由正弦定理得 } \frac{b+c}{a} = \frac{a+b}{a+b-c}, \text{ 整理得 } a^2 + c^2 - b^2 = ac,$$

$$\text{由余弦定理得 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}, \text{ Q } 0 < B < \pi, \therefore B = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ 得 } b \sin A = a \sin B = 1 \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查利用正弦定理求值, 涉及正弦定理边角互化思想以及余弦定理的应用, 考查计算能力, 属于中等题.

9、D

【解析】

由题意可得 $a_5 = \frac{a_9}{a_5}$, 从而得到 $a_5 = 3$, 再由 $a_5 = 3$ 就可以得出其它各项的值, 进而判断出 S_9 的范围.

【详解】

解: Q $a_i + a_j$, 或其积 $a_i a_j$, 或其商 $\frac{a_j}{a_i}$ 仍是该数列中的项,

$\therefore a_2 + a_9$ 或者 $a_2 a_9$ 或者 $\frac{a_9}{a_2}$ 是该数列中的项,

又Q 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列,

$$\therefore a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_9,$$

$\therefore a_2 + a_9 > a_9$, $a_2 a_9 > a_9$, 只有 $\frac{a_9}{a_2}$ 是该数列中的项,

同理可以得到 $\frac{a_9}{a_3}, \frac{a_9}{a_4}, \dots, \frac{a_9}{a_8}$ 也是该数列中的项, 且有 $a_1 < \frac{a_9}{a_8} < \frac{a_9}{a_7} < \dots < \frac{a_9}{a_2} < a_9$,

$$\therefore a_5 = \frac{a_9}{a_5}, \therefore a_5 = 3 \text{ 或 } a_5 = -3 \text{ (舍)}, \therefore a_6 > 3,$$

根据 $a_1 = 1, a_5 = 3, a_9 = 9$,

同理易得 $a_2 = 3^{\frac{1}{4}}, a_3 = 3^{\frac{1}{2}}, a_4 = 3^{\frac{3}{4}}, a_6 = 3^{\frac{5}{4}}, a_7 = 3^{\frac{3}{2}}, a_8 = 3^{\frac{7}{4}}$,

$$\therefore S_9 = a_1 + a_2 + \dots + a_9 = \frac{1 - 3^{\frac{9}{4}}}{1 - 3^{\frac{1}{4}}} < 36,$$

故选: D.

【点睛】

本题考查数列的新定义的理解和运用, 以及运算能力和推理能力, 属于中档题.

10、D

【解析】

由 $S_2 = \frac{1}{9}, S_3 = \frac{7}{27}$, 可求出等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{2^{n-1}}{27}$, 进而可知当 $1 \leq n \leq 5$ 时, $a_n < 1$; 当 $n \geq 6$ 时,

$a_n > 1$, 从而可知 $a_1 a_2 \dots a_n$ 的最小值为 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$, 求解即可.

【详解】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q > 0$,

$$\text{由题意得, } a_3 = S_3 - S_2 = \frac{4}{27}, \text{ 得 } \begin{cases} a_1 q^2 = \frac{4}{27} \\ a_1 + a_1 q = \frac{1}{9} \\ q > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = \frac{1}{27} \\ q = 2 \end{cases},$$

$$\text{得 } a_n = \frac{2^{n-1}}{27}.$$

当 $1 \leq n \leq 5$ 时, $a_n < 1$; 当 $n \geq 6$ 时, $a_n > 1$,

则 $a_1 a_2 \dots a_n$ 的最小值为 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = (a_3)^5 = \left(\frac{4}{27}\right)^5$.

故选: D.

【点睛】

本题考查等比数列的通项公式的求法, 考查等比数列的性质, 考查学生的计算求解能力, 属于中档题.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/538047104142006053>