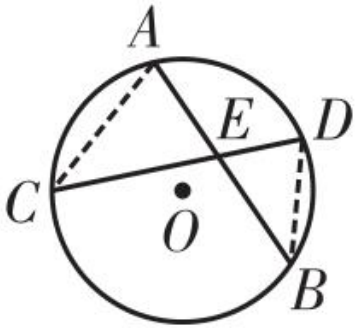
# 专题 06 圆中的重要模型--圆幂定理模型

圆幂定理是一个总结性的定理，是对相交弦定理、切割线定理、割线定理、弦切角定理、托勒密定理以及它们推论的统一与归纳。可能是在 19 世纪由德国数学家施泰纳（*Steiner*）或者法国数学家普朗克雷（*Poncelet*）提出的。圆幂定理的用法：可以利用圆幂定理求解与圆有关的线段比例、角度、面积等问题。

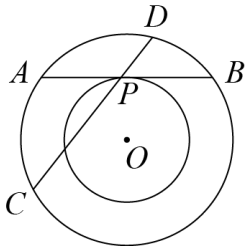
**模型 1.相交弦模型**



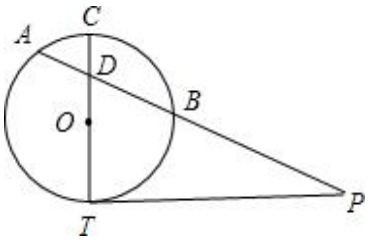

**条件：**在圆 $O$ 中，弦 $AB$ 与弦 $CD$ 交于点 $E$，点 $E$ 在圆 $O$ 内。

**结论：**$\triangle CAE \sim \triangle BDE$ Þ $\dfrac{EC}{EB}=\dfrac{EA}{ED}$ Þ $EC \times ED = EB \times EA$。

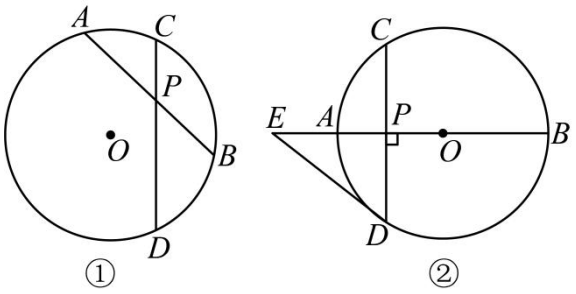
例 1.（2023·广东广州·九年级校考期中）如图，两个同心圆，大圆的弦 $AB$ 与小圆相切于点 $P$，大圆的弦 $CD$ 经过点 $P$，且 $CD=13$，$PD=4$，两圆组成的圆环的面积是_____.




例 2.（2023·江西景德镇·九年级校考期末）如图，PT 是⊙O 的切线，T 为切点，PA 是割线，交⊙O 于 A、B 两点，与直径 CT 交于点 D．已知 CD＝2，AD＝3，BD＝4，那 PB＝_____.



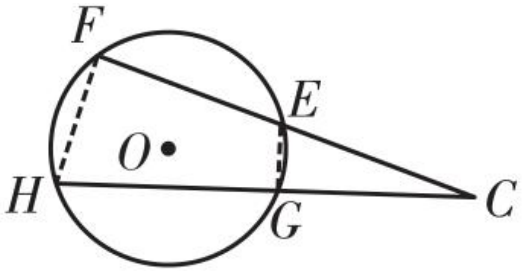

例 3.（2023·江苏·九年级专题练习）相交弦定理：圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等.




(1)为了说明相交弦定理正确性，需要对其进行证明，如下给出了不完整的“已知”“求证”，请补充完整，并写出证明过程．已知：如图①，弦 $AB$，$CD$ 交于点 $P$，求证：_____．

(2)如图②，已知 $AB$ 是⊙$O$ 的直径，$AB$ 与弦 $CD$ 交于点 $P$，且 $AB\perp CD$ 于点 $P$，过 $D$ 作⊙$O$ 的切线，交 $BA$ 的延长线于 $E$，$D$ 为切点，若 $AP=2$，⊙$O$ 的半径为 5，求 $AE$ 的长．

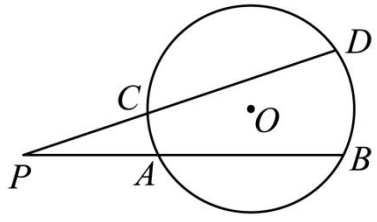
**模型 2.双割线模型**




**条件：**如图，割线 $CH$ 与弦 $CF$ 交圆 $O$ 于点 $E$ 和点 $G$。

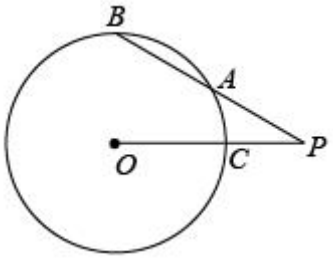
**结论：**$\triangle CEG\sim\triangle CHF$ ∴ $\dfrac{EC}{CH}=\dfrac{CG}{CF}$ ∴ $EC\times FC=GC\times HC$

例 1.（2023·浙江·九年级假期作业）如图：$PAB$、$PCD$ 为⊙$O$ 的两条割线，若 $PA\cdot PB=30$，$PC=3$，则 $CD$ 的长为（　　）

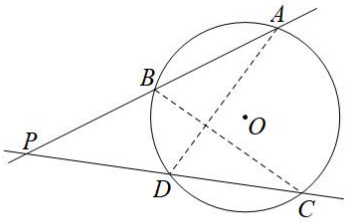



A．10　　B．7　　C．$5\sqrt{10}$　　D．3

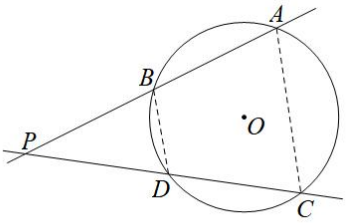
例 2.（2023·四川成都·九年级校考阶段练习）如图，$PAB$ 为⊙$O$ 的割线，且 $PA=AB=3$，$PO$ 交⊙$O$ 于点 $C$，若 $PC=2$，则⊙$O$ 的半径的长为_____．




例 3.（2022·河南洛阳·统考一模）我们知道，直线与圆有三种位置关系：相交、相切、相离．当直线与圆有两个公共点（即直线与圆相交）时，这条直线就叫做圆的割线．割线也有一些相关的定理．比如，割线定理：从圆外一点引圆的两条割线，这一点到每条割线与圆交点的距离的积相等．下面给出了不完整的定理“证明一”，请补充完整．




图①




图②

已知：如图①，过⊙$O$ 外一点 $P$ 作⊙$O$ 的两条割线，一条交⊙$O$ 于 A 、$B$ 点，另一条交⊙$O$ 于 $C$ 、$D$ 点．

求证：$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ．

证明一：连接 $AD$ 、$BC$ ，

∵ $\angle A$ 和 $\angle C$ 为 $\overset{\frown}{BD}$ 所对的圆周角，∴_____．

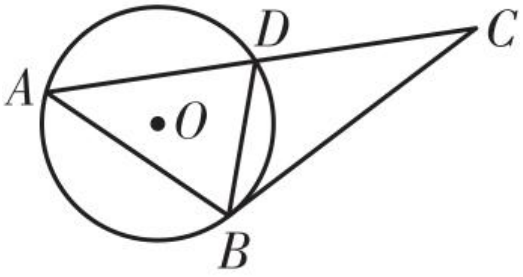
又∵ $\angle P = \angle P$ ，∴_____，∴_____．

即 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ．

研究后发现，如图②，如果连接 $AC$ 、$BD$ ，即可得到学习过的圆内接四边形 $ABDC$ ．那么或许割线定理也可以用圆内接四边形的性质来证明．请根据提示，独立完成证明二．

证明二：连接 $AC$ 、$BD$ ，

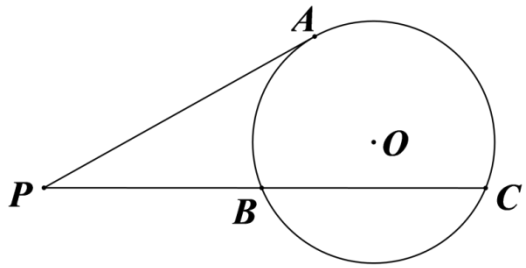
**模型 3.切割线模型**




**条件：**如图，$CB$ 是圆 $O$ 的切线，$CA$ 是圆 $O$ 的割线。

**结论：**$\triangle CBD \sim \triangle CAB$ Þ $\dfrac{CB}{CA}=\dfrac{CD}{CB}$ Þ $CB^2 = CD \times CA$

例 1.（2023·江苏盐城·九年级统考期中）如图，$PA$ 与 $\odot O$ 切于点 A，$PBC$ 是 $\odot O$ 的割线，如果 $PB=BC=2$，那么 $PA$ 的长为_____.




例 2.（2023·河南郑州·一模）复习巩固，切线：直线和圆只有一个公共点，这时这条直线和圆相切，我们把这条直线叫做圆的切线，这个点叫做切点.

割线：直线和圆有两个公共点，这时这条直线和圆相交，我们把这条直线叫做圆的割线.

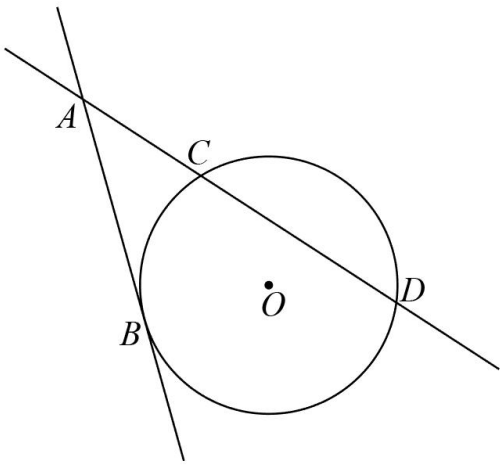
切线长：过圆外一点作圆的切线，这点和切点之间线段的长，叫做这点到圆的切线长.

阅读材料：《几何原本》是古希腊数学家欧几里得所著的一部数学著作．它是欧洲数学的基础，总结了平面几何五大公设，被广泛地认为是历史上学习数学几何部分最成功的教科书．其中第三卷命题 36﹣2 圆幂定理（切割线定理）内容如下：

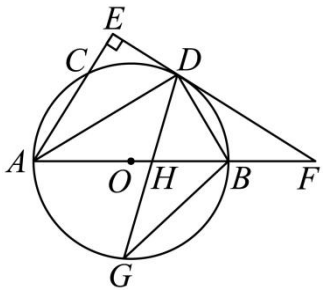
切割线定理：从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项.

为了说明材料中定理的正确性，需要对其进行证明，下面已经写了不完整的“已知”和“求证”，请补充完整，并写出证明过程.

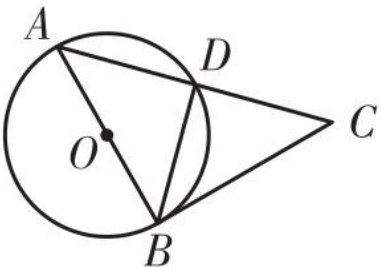
已知：如图，$A$ 是 $\odot O$ 外一点，_____．求证：_____.




例 3.（2023·山东潍坊·统考一模）如图，$AB$ 是⊙$O$ 的直径，点 $C$、$D$ 在⊙$O$ 上，且 $AD$ 平分 $\angle CAB$，过点 $D$ 作 $AC$ 的垂线，与 $AC$ 的延长线相交于 $E$，与 $AB$ 的延长线相交于点 $F$，$G$ 为 $AB$ 的下半圆弧的中点，$DG$ 交 $AB$ 于 $H$，连接 $DB$、$GB$ (1)证明：$EF$ 是⊙$O$ 的切线；(2)若圆的半径 $r=3$，$BH=2$，求 $GH$ 的长；(3)求证：$DF^2=AF\cdot BF$.




**模型 4.弦切角模型**



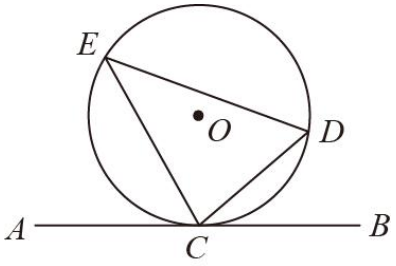

**条件：**如图，$CB$ 是圆 $O$ 的切线，$AB$ 是圆 $O$ 的直径。

**结论：1）**$\triangle CBD\sim\triangle CAB$ 即 $\dfrac{CB}{CA}=\dfrac{CD}{CB}$ 即 $CB^2=CD\times CA$；

**2）**$\triangle CBD\sim\triangle BAD$ 即 $\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{CD}{BD}$ 即 $BD^2=AD\times CD$；

**3）**$\triangle BAD\sim\triangle CAB$ 即 $\dfrac{BA}{CA}=\dfrac{DA}{BA}$ 即 $BA^2=AD\times AC$。

例 1.（2023·河南三门峡·统考二模）小锐同学是一个数学学习爱好者，他在一本数学课外读物上看到一个课本上没有的与圆相关的角---弦切角（弦切角的定义：把顶点在圆上，一边与圆相切，另一边和圆相交的角叫做弦切角），并尝试用所学的知识研究弦切角的有关性质.




（1）如图，直线 $AB$ 与⊙$O$ 相切于 $C$ 点，$D$，$E$ 为⊙$O$ 上不同于 $C$ 的两点，连接 $CE$，$DE$，$CD$．请你写出图中的两个弦切角_____；（不添加新的字母和线段）

（2）小锐目测 $\angle DCB$ 和 $\angle DEC$ 可能相等，并通过测量的方法验证了他的结论，你能帮小锐用几何推理的方法证明结论的正确性吗？

已知：如图，直线 $AB$ 与⊙$O$ 相切于 $C$ 点，$D$，$E$ 为圆上不同于 $C$ 的两点，连接 $CE$，$DE$，$CD$．

求证：$\angle DCB = \angle DEC$．

（3）如果我们把上述结论称为弦切角定理，请你用一句话概括弦切角定理_____.

例 2.（2022·山西大同·九年级校联考期中）阅读与思考

阅读下面内容并完成任务：

顶点在圆上，一边和圆相交，另一边和圆相切的角叫做弦切角.

弦切角定理：弦切角等于它所夹的弧所对的圆周角.

如图 1，直线 $NM$ 与⊙$O$ 相切于点 A，$AB$ 为⊙$O$ 的弦，$\angle BAM$ 叫弦切角，$\overset{\frown}{AB}$ 叫做弦切角 $\angle BAM$ 所夹的弧，$\angle C$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角，$AC$ 为直径时，很容易证明 $\angle BAM = \angle C$．

小华同学认为这是一种特殊情况，若 $AC$ 不是直径会如何呢？即在图 2 中 $\angle BAM = \angle C$ 吗？她连接 $AO$ 并延长，交⊙$O$ 于点 $C'$，连接 $C'B$ …问题得到了解决.

小颖同学利用图 3 证明了当弦切角 $\angle BAM$ 为直角时，弦切角等于它所夹的弧所对的圆周角.

小亮积极思考，提出当弦切角 $\angle BAM$ 为钝角时，能证明 $\angle BAM=\angle C$（如图 4）吗？

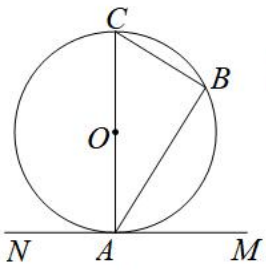


图1

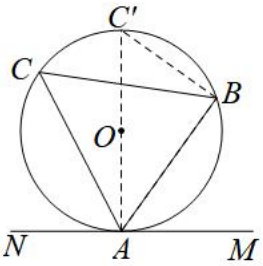


图2

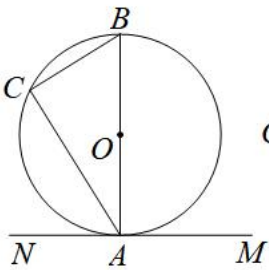


图3

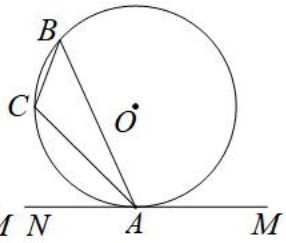


图4

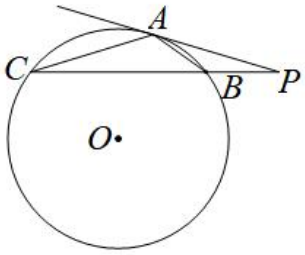


图5

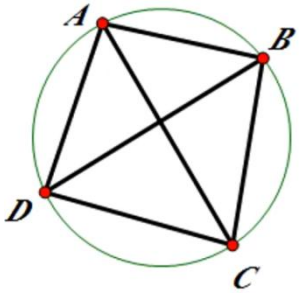
任务：(1)请按照小华的思路，利用图 2 证明 $\angle BAM=\angle C$；

(2)结合小华、小颖的思路或结论，利用图 4 解答小亮提出的问题；

(3)写出在上面解决问题的过程中体现的数学思想：_____（写出两种）；

(4)解决问题：如图 5，点 $P$ 为 $\odot O$ 的弦 $CB$ 延长线上一点，$PA$ 切 $\odot O$ 于点 A，连接 $AB$，$AC$，$\angle P=19°$，$\angle ABP=140°$，则 $\angle C=$_____°

**模型 5.托勒密定理模型**




**条件：**如图，$AB$、$CD$ 是圆 $O$ 的两条弦；　**结论：** $AB\times CD+AD\times BC=AC\times BD$

例 1.（2022 春·广东九年级课时练习）阅读与应用

请阅读下列材料，完成相应的任务：

托勒密是“地心说”的集大成者，著名的天文学家、地理学家、占星学家和光学家．后人从托勒密的书中发现一个命题：圆内接四边形对边乘积的和等于对角线的乘积．下面是对这个命题的证明过程．



如图 1，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ .

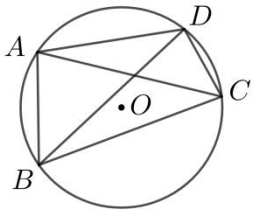



图1

求证： $AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ .

证明：如图 2，作 $\angle BAE = \angle CAD$ 交 $BD$ 于点 $E$.

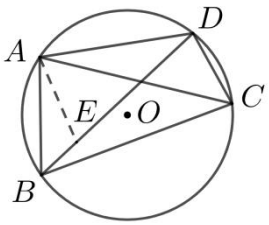



图2

$\because \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AD}$， $\therefore \angle ABE = \angle ACD$ .（依据）

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle ACD$ . $\therefore \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BE}{CD}$ . $AB \cdot DC = AC \cdot BE$ .

…

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle AED$ .

$\therefore \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{ED}$ . $\therefore AD \cdot BC = AC \cdot ED$ .

$\because AB \cdot DC = AC \cdot BE$ ,

∴ $AB\cdot DC+AD\cdot BC=AC\cdot BE+AC\cdot ED=AC\left(BE+ED\right)=AC\cdot BD$ .

∴ $AB\cdot DC+AD\cdot BC=AC\cdot BD$ .

任务：(1)证明过程中的“依据”是_____；(2)补全证明过程；

(3)如图 3，⊙$O$ 的内接五边形 $ABCDE$ 的边长都为 2，求对角线 $BD$ 的长.

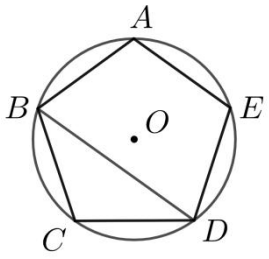
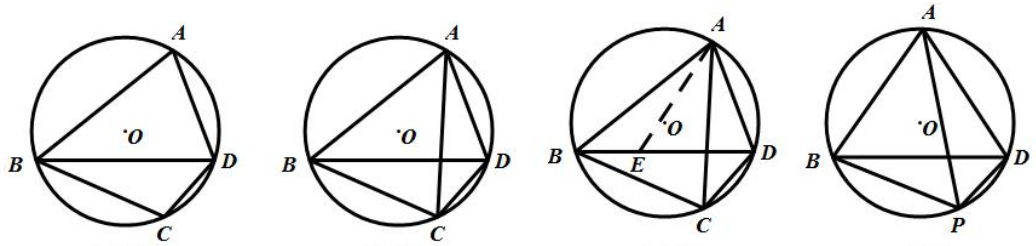


图3

例 2.（2023·江苏盐城·九年级统考期中）【旧知再现】圆内接四边形的对角_.

如图①，四边形 $ABCD$ 是⊙$O$ 的内接四边形，若 $AB=BD$ , $\angle ABD=40°$ ，则 $\angle BCD=$_°.



图① 图② 图③ 图④

【问题创新】圆内接四边形的边会有特殊性质吗？

如图②，某数学兴趣小组进行深入研究发现： $AB\cdot CD+BC\cdot DA=AC\cdot BD$

证明：如图③，作 $\angle BAE=\angle CAD$ ，交 $BD$ 于点 $E$ .

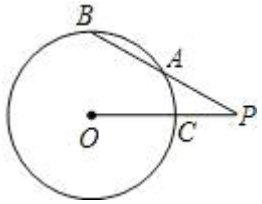
∵ $\angle BAE=\angle CAD$ , $\angle ABD=\angle ACD$ ， ∴ $\Delta ABE\backsim\Delta ACD$ ，

∴ $\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CD}$ 即 $AB\cdot CD=AC\cdot BE$ （请按他们的思路继续完成证明）

【应用迁移】如图④，已知等边 $\Delta ABC$ 外接圆⊙$O$ ，点 $P$ 为 $\overset{\frown}{BC}$ 上一点，且 $PB=\sqrt{3}$ ， $PC=1$ ，求 $PA$ 的长.

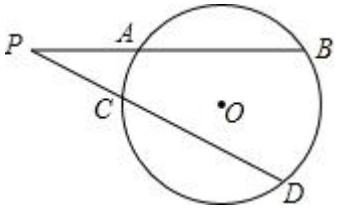
**课后专项训练**

1.（2023·北京·九年级校考期中）如图，点$P$是$\odot O$外一点，$PAB$为$\odot O$的一条割线，且$PA=AB$，$PO$交$\odot O$于点$C$，若$OC=3$，$OP=5$，则$AB$长为（　）



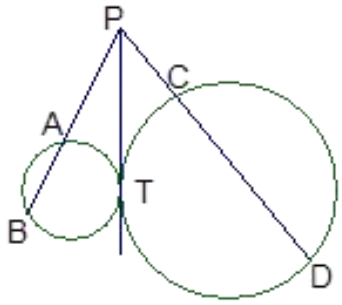

A．$\sqrt{10}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{6}$　　D．$\sqrt{5}$

2.（2023·山东九年级月考）如图，过点$P$作$\odot O$的两条割线分别交$\odot O$于点A、$B$和点$C$、$D$，已知$PA=3$，$AB=PC=2$，则$PD$的长是（　）




A．3　　B．7.5　　C．5　　D．5.5

3.（2023·浙江·中考模拟）如图,PT是外切两圆的公切线,T为切点,PAB,PCD分别为这两圆的割线,若PA=3,PB=6,PC=2,则PD等于(　　)




A．12　　B．9　　C．8　　D．4

4.（2023·浙江杭州·模拟预测）如图，过点$P$引圆的两条割线$PAB$和$PCD$，分别交圆于点$A,B$和$C,D$，连结$AC,BD$，则在下列各比例式中，①$\frac{PA}{PB}=\frac{PC}{PD}$；②$\frac{PA}{PD}=\frac{PC}{PB}$；③$\frac{PA}{AC}=\frac{PD}{BD}$，成立的有_____（把你认为成立的比例式的序号都填上）.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/538101065110007020