

广东省深圳市龙岗区 2023-2024 学年高一上学期 1 月

期末质量监测数学试题

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 化简 $\sin 420^\circ$ 的值是 ()

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】D

【解析】 $\sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：D.

2. 设集合 $M = \{x | 0 < x < 4\}$, $N = \left\{x \middle| \frac{1}{3} \leq x \leq 5\right\}$, 则 $M \cap N =$ ()

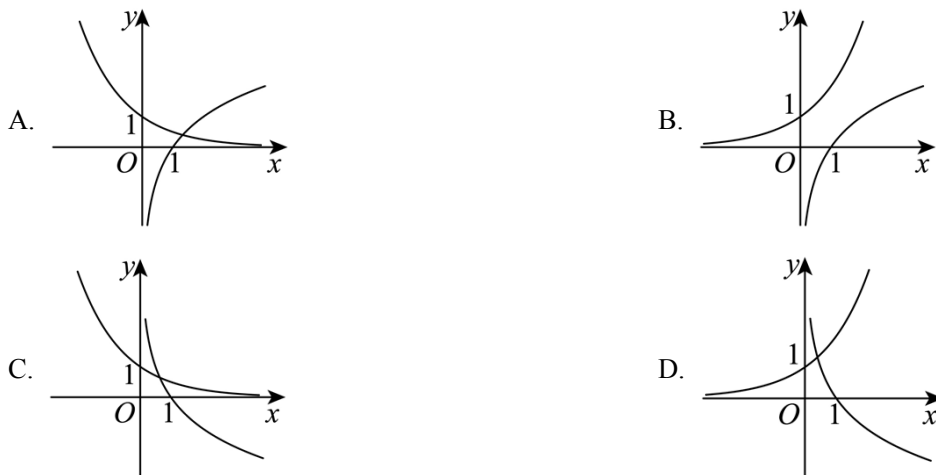
- A. $\left\{x \middle| 0 < x \leq \frac{1}{3}\right\}$ B. $\left\{x \middle| \frac{1}{3} \leq x < 4\right\}$
C. $\{x | 4 \leq x < 5\}$ D. $\{x | 0 < x \leq 5\}$

【答案】B

【解析】因为 $M = \{x | 0 < x < 4\}$, $N = \left\{x \middle| \frac{1}{3} \leq x \leq 5\right\}$, 所以 $M \cap N = \left\{x \middle| \frac{1}{3} \leq x < 4\right\}$.

故选：B.

3. 当 $a > 1$ 时，在同一直角坐标系中，函数 $y = a^{-x}$ 与 $y = \log_a x$ 的图像是 ()



高级中学名校试卷

【答案】A

【解析】依题意可将指数函数 $y = a^{-x}$ 化为 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ ，由 $a > 1$ 可知 $0 < \frac{1}{a} < 1$ ；

由指数函数图象性质可得 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 为单调递减，且过定点 $(0,1)$ ，即可排除 BD，

由对数函数图象性质可得 $y = \log_a x$ 为单调递增，且过定点 $(1,0)$ ，排除 C.

故选：A.

4. 已知命题“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + (a-2)x + \frac{9}{4} > 0$ ”是真命题，则实数 a 的取值范围是（ ）

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-5, 1)$ C. $(-5, +\infty)$ D. $(-1, 5)$

【答案】D

【解析】因为命题“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + (a-2)x + \frac{9}{4} > 0$ ”是真命题，

所以 $\Delta = (a-2)^2 - 9 < 0$ ，解得 $-1 < a < 5$ ，

所以实数 a 的取值范围是 $(-1, 5)$.

故选：D.

5. “ $\cos \theta > 0$ 且 $\sin 2\theta < 0$ ”是“ θ 为第四象限角”的（ ）

- A. 充要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】充分性：因为 $\cos \theta > 0$ ，

所以 θ 为第一象限角或第四象限角或终边在 x 轴的非负半轴，

又 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta < 0$ ，则 $\sin \theta < 0$ ，

所以 θ 为第三象限角或第四象限角或终边在 y 轴的非正半轴，

综上知， θ 为第四象限角，故充分性成立；

必要性：若 θ 为第四象限角，则 $\cos \theta > 0$ 且 $\sin \theta < 0$ ，

此时 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta < 0$ ，

故必要性成立，故“ $\cos \theta > 0$ 且 $\sin 2\theta < 0$ ”是“ θ 为第四象限角”的充要条件.

故选：A.

6. 已知 $f(x) = x^5 + ax^3 + bx + 3$ 且 $f(-2) = 5$, 则 $f(2)$ 的值是 ()

- A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

【答案】C

【解析】令 $g(x) = x^5 + ax^3 + bx$,

因为 $g(-x) = -x^5 - ax^3 - bx = -g(x)$, 所以函数 $g(x)$ 为奇函数,

由 $f(-2) = g(-2) + 3 = 5$, 得 $g(-2) = 2$, 所以 $g(2) = -g(-2) = -2$,

所以 $f(2) = g(2) + 3 = 1$.

故选: C.

7. 已知角 $\alpha \in (0, 2\pi)$, α 终边上有一点 $(\cos 1 - \sin 1, \cos 1 + \sin 1)$, 则 $\alpha =$ ()

- A. $\frac{\pi}{4} + 1$ B. $\frac{5\pi}{4} - 1$ C. $\frac{9\pi}{4}$ D. $\frac{9\pi}{4} - 1$

【答案】A

【解析】因为 $1 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\cos 1 > 0, \sin 1 > 0, \cos 1 < \sin 1$,

所以点 $(\cos 1 - \sin 1, \cos 1 + \sin 1)$ 在第二象限,

由已知得 $\tan \alpha = \frac{\cos 1 + \sin 1}{\cos 1 - \sin 1} = \frac{1 + \tan 1}{1 - \tan 1} = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan 1}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan 1} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)$, 所以 $\alpha = 1 + \frac{\pi}{4}$.

故选: A.

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \leq 0 \\ \log_3 x, & x > 0 \end{cases}$, 对任意给定的 $m \in (1, +\infty)$, 都存在唯一的 $x \in \mathbf{R}$, 使得

$f(f(x)) = m^2 + 2am - 3 (a > 0)$ 成立, 则 a 的最小值是 ()

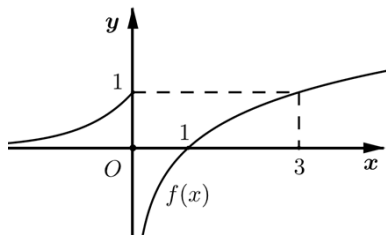
- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

【答案】C

【解析】令 $g(m) = m^2 + 2am - 3 (a > 0)$, 开口向上且对称轴为 $m = -a < 0$,

则 $g(m)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增, 故对应值域为 $(2a - 2, +\infty)$,

由【解析】式可得函数大致图象如下:



令 $t = f(x)$ ，则 $t \leq 0$ 或 $t > 1$ 时有一个解； $0 < t \leq 1$ 时有两个解，结合图象，

当 $f(t) \in (-\infty, 0]$ ，则 $0 < t \leq 1$ ，此时 $t = f(x)$ 有两个解；

当 $f(t) \in (0, 1]$ ，则 $t \leq 0$ 或 $1 < t \leq 3$ ，此时 $t = f(x)$ 有两个解；

当 $f(t) \in (1, +\infty)$ ，则 $t > 3$ ，此时 $t = f(x)$ 有一个解；

任意给定的 $m \in (1, +\infty)$ ，存在唯一的 $x \in \mathbf{R}$ 使 $f(t) = g(m)$ 成立，

所以 $f(t) \in (1, +\infty)$ ，且 $(2a-2, +\infty)$ 是 $(1, +\infty)$ 的子集，所以 $2a-2 \geq 1$ ，即 $a \geq \frac{3}{2}$ 。

故选：C。

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 a, b, c 为实数，则下列命题中正确的是（ ）

A. 若 $\frac{a}{c^2} < \frac{b}{c^2}$ ，则 $a < b$

B. 若 $ac > bc$ ，则 $a > b$

C. 若 $a > b$ ， $c > d$ ，则 $a+c > b+d$

D. 若 $a < b < 0$ ，则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

【答案】ACD

【解析】对于 A，若 $\frac{a}{c^2} < \frac{b}{c^2}$ ，则 $c^2 > 0$ ，所以 $a < b$ ，故 A 正确；

对于 B，当 $c < 0$ 时，若 $ac > bc$ ，则 $a < b$ ，故 B 错误；

对于 C，若 $a > b$ ， $c > d$ ，则 $a+c > b+d$ ，故 C 正确；

对于 D，若 $a < b < 0$ ，则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ，故 D 正确。

故选：ACD。

10. 在 $\triangle ABC$ 中，下列等式恒成立的是（ ）

A. $\sin(A+B) - \sin C = 0$

B. $\cos(B+C) - \cos A = 0$

C. $\frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = 1$

D. $\frac{\cos \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = 1$

高级中学名校试卷

【答案】AC

【解析】对于 A, $\sin(A+B) - \sin C = \sin C - \sin C = 0$, A 正确;

对于 B, $\cos(B+C) - \cos A = -\cos A - \cos A = -2\cos A$, B 错误;

对于 C, $\frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = 1$, C 正确;

对于 D, $\frac{\cos \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \tan \frac{A}{2}$, D 错误.

故选: AC.

11. $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, $\tan \alpha$ 和 $\tan \beta$ 是方程 $x^2 - mx + 2 = 0$ 的两个根, 则下列结论正确的是

()

A. $\tan \alpha + \tan \beta = m$

B. $\tan(\alpha + \beta) > 0$

C. $m \geq 2\sqrt{2}$

D. $m + \tan \alpha \geq 4$

【答案】AD

【解析】由 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 则 $\tan \beta > \tan \alpha > 0$,

则 $\tan \alpha + \tan \beta = m > 0$, $\tan \alpha \tan \beta = 2$ 且 $\Delta = m^2 - 8 > 0$, 则 $m > 2\sqrt{2}$,

由 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -m < 0$, A 对, B、C 错;

由 $\tan \beta = \frac{2}{\tan \alpha}$, 则 $m + \tan \alpha = 2 \tan \alpha + \frac{2}{\tan \alpha} \geq 2\sqrt{2 \tan \alpha \cdot \frac{2}{\tan \alpha}} = 4$,

当且仅当 $\tan \alpha = 1, \tan \beta = 2$ 时取等号, 故 $m + \tan \alpha \geq 4$, D 对.

故选: AD.

12. 设 $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & x < 0 \\ (x-1)^2, & x \geq 0 \end{cases}$, 则下列选项中正确的有 ()

A. $y = f(x)$ 与 $y = a, a \in \mathbf{R}$ 的图象有两个交点, 则 $a \in (1, +\infty)$

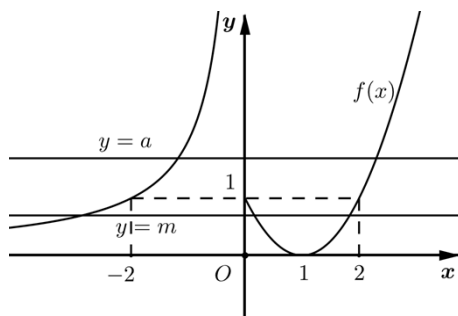
B. 方程 $f(x) - m = 0$ 有三个实数根, 则 $m \in (0, 1]$

C. $f(x) \geq 1$ 的解集是 $[2, +\infty)$

D. $0 \leq f(f(x)) \leq 1$ 的解集是 $(-\infty, -1] \cup [0, \sqrt{2} + 1]$

【答案】ABD

【解析】由函数【解析】式可得函数图象如下,



要使 $y = f(x)$ 与 $y = a, a \in \mathbf{R}$ 的图象有两个交点, 则 $a \in (1, +\infty)$, A 对;

方程 $f(x) - m = 0$ 有三个实数根, 则 $m \in (0, 1]$, B 对;

由图象知: $f(x) \geq 1$ 的解集是 $[-2, 0] \cup [2, +\infty)$, C 错;

令 $t = f(x)$, 由 $0 \leq f(t) \leq 1$, 则 $t \in (-\infty, -2] \cup [0, 2]$, 而 $t = f(x) \geq 0$,

所以 $0 \leq t = f(x) \leq 2$, 则 $\begin{cases} 0 < -\frac{2}{x} \leq 2 \\ x < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 0 \leq (x-1)^2 \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 可得 $x \leq -1$ 或 $0 \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$,

故解集是 $(-\infty, -1] \cup [0, \sqrt{2} + 1]$, D 对.

故选: ABD.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 函数 $f(x) = \sqrt{2-x} + \ln x$ 的定义域是_____.

【答案】 $\{x | 0 < x \leq 2\}$

【解析】要使 $f(x) = \sqrt{2-x} + \ln x$ 有意义, 只需 $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$, 解得 $0 < x \leq 2$,

故函数的定义域为 $\{x | 0 < x \leq 2\}$.

故【答案】为: $\{x | 0 < x \leq 2\}$.

14. 如图 1, 折扇又名撒扇”“纸扇”, 是一种用竹木或象牙做扇骨, 韧纸或绫绢做扇面的能折叠的扇子, 其展开的平面图如图 2 的扇形 AOB , 其中 $\angle AOB = 150^\circ$, $CO = \frac{1}{3}AO = 2$, 则扇面 (曲边四边形 $ABDC$) 的面积是_____.



图 1

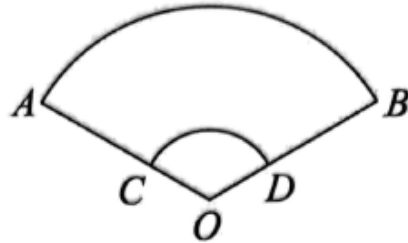


图 2

【答案】 $\frac{40\pi}{3}$

【解析】由题设, $\theta = \angle AOB = \frac{5\pi}{6}$,

则扇面 (曲边四边形 $ABDC$) 的面积 $S = \frac{1}{2} \times \theta \times (OA^2 - OC^2) = \frac{1}{2} \times \frac{5\pi}{6} \times (36 - 4) = \frac{40\pi}{3}$.

故【答案】为: $\frac{40\pi}{3}$.

15. 设 $a = \log_3 0.3$, $b = \log_{\frac{1}{3}} 0.2$, $c = 0.2^{0.3}$, 则 a, b, c 的大小关系为_____.

【答案】 $a < c < b$

【解析】 $a = \log_3 0.3 < 0$, $b = \log_{\frac{1}{3}} 0.2 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1$,

$0 < c = 0.2^{0.3} < 0.2^0 = 1$, 所以 $a < c < b$.

故【答案】为: $a < c < b$.

16. 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 恒有 $f(1-x) = f(x+1) = f(x-1)$, 对任意

$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(\sin \theta) = \cos^2 \theta$, 现已知函数 $y = f(x)$ 的图像与 $y = kx$ 有 4 个不同的公共点,

则正实数 k 的值为_____.

【答案】 $8 - 2\sqrt{15}$

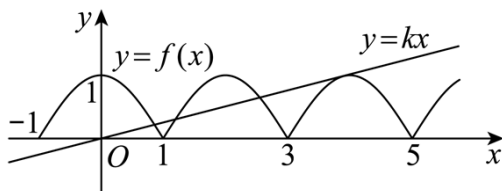
【解析】 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin \theta \in [0, 1]$, $f(\sin \theta) = \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$,

令 $x = \sin \theta$ ，则有 $f(x) = 1 - x^2 (0 \leq x \leq 1)$ ，

任意 $x \in \mathbf{R}$ ，恒有 $f(1-x) = f(x+1) = f(x-1)$ ，则函数 $f(x)$ 的图像关于 $x=1$ 对称，

函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，

在同一直角坐标系下作出函数 $y = f(x)$ 与 $y = kx (k > 0)$ 的图像，如图所示：



函数 $y = f(x)$ 的图像与 $y = kx$ 有 4 个不同的公共点，由图像可知，

$y = kx (k > 0)$ 的图像函数 $y = f(x)$ 在 $[3, 5]$ 上的图像相切，

$$\text{由 } \begin{cases} y = 1 - (x-4)^2 \\ y = kx \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 得 } x^2 + (k-8)x + 15 = 0, \text{ 则 } \begin{cases} \Delta = (k-8)^2 - 60 = 0 \\ 3 < -\frac{k-8}{2} < 5 \end{cases},$$

解得 $k = 8 - 2\sqrt{15}$.

故【答案】为： $8 - 2\sqrt{15}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 已知集合 $A = \{x | -3 \leq x \leq 2\}$ ，集合 $B = \{x | 1-m \leq x \leq 3m-1\}$ 。

(1) 当 $m = 3$ 时，求 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$ ；

(2) 若 $A \subseteq B$ ，求实数 m 的取值范围。

解：(1) 由题设 $B = \{x | -2 \leq x \leq 8\}$ ，且 $\complement_{\mathbf{R}} A = \{x | x < -3 \text{ 或 } x > 2\}$ ，

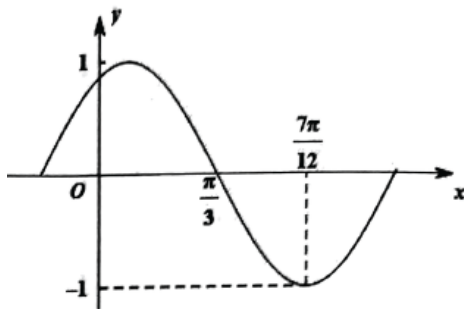
所以 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \{x | 2 < x \leq 8\}$ 。

(2) 由 $A \subseteq B$ ，则 $\begin{cases} 1-m \leq -3 \\ 3m-1 \geq 2 \\ 3m-1 \geq 1-m \end{cases}$ ，可得 $m \geq 4$ 。

18. 函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，先把函

数 $f(x)$ 的图象上的各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变)，把得到的曲线向左平移

$\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 再向上平移 1 个单位, 得到函数 $g(x)$ 的图象.



(1) 求函数 $g(x)$ 图象的对称中心;

(2) 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$ 时, 求 $g(x)$ 的值域.

解: (1) 由题设及图知: $A=1$ 且 $\frac{T}{4} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T = \pi$, 则 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$,

所以 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$, 而 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6} + \varphi\right) = -1$ 且 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 则 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$,

综上, $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$,

函数 $f(x)$ 的图象上的各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 得 $y = \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$,

把曲线向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 再向上平移 1 个单位, 得 $g(x) = \cos\left(4x + \frac{5\pi}{6}\right) + 1$,

令 $4x + \frac{5\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 则 $x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$, 即图象对称中心为

$\left(\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{12}, 1\right), k \in \mathbb{Z}$.

(2) 由 $x \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$, 则 $4x + \frac{5\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$, 故 $\cos\left(4x + \frac{5\pi}{6}\right) \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$,

所以 $g(x)$ 的值域为 $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

19. 已知函数 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}$.

高级中学名校试卷

(1) 求函数 $f(x)$ 的〔解析〕式;

(2) 判断函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上的单调性, 并用定义证明;

(3) 解关于 t 的不等式: $f\left(t+\frac{1}{2}\right)+f\left(t-\frac{1}{2}\right)<0$.

解: (1) 因为函数 $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数, 则 $f(-x)=-f(x)$,

即 $\frac{-ax+b}{x^2+1}=-\frac{ax+b}{x^2+1}$, 可得 $b=0$, 则 $f(x)=\frac{ax}{x^2+1}$,

所以, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}a}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{2}{5}a=\frac{2}{5}$, 则 $a=1$, 因此, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

(2) 证明: 函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数,

证明如下: 任取 $x_1, x_2 \in (-1,1)$ 且 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= \frac{x_1}{x_1^2+1}-\frac{x_2}{x_2^2+1}=\frac{x_1x_2^2+x_1-x_1^2x_2-x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} \\ &= \frac{x_1x_2(x_2-x_1)+(x_1-x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=\frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}, \end{aligned}$$

因为 $-1 < x_1 < x_2 < 1$, 则 $x_1 - x_2 < 0$, $-1 < x_1x_2 < 1$, 故 $f(x_1)-f(x_2) < 0$,

即 $f(x_1) < f(x_2)$,

因此, 函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数.

(3) 因为函数 $f(x)$ 是 $(-1,1)$ 上的奇函数且为增函数,

由 $f\left(t+\frac{1}{2}\right)+f\left(t-\frac{1}{2}\right)<0$ 得 $f\left(t+\frac{1}{2}\right)<-f\left(t-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}-t\right)$,

$$\text{由已知可得} \begin{cases} t+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}-t \\ -1<t+\frac{1}{2}<1, \text{解得} -\frac{1}{2}<t<0, \\ -1<t-\frac{1}{2}<1 \end{cases}$$

因此, 不等式 $f\left(t+\frac{1}{2}\right)+f\left(t-\frac{1}{2}\right)<0$ 的解集为 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

20. 已知函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos 2x$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求函数 $f(x)$ 的对称轴方程;

(3) 求函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调区间.

解: (1) 依题意,

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2 x-\frac{1}{2} \cos 2 x-\cos 2 x=\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2 x-\frac{3}{2} \cos 2 x=\sqrt{3} \sin \left(2 x-\frac{\pi}{3}\right),$$

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2 \pi}{2}=\pi$.

(2) 由 (1) 知, $f(x)=\sqrt{3} \sin \left(2 x-\frac{\pi}{3}\right)$, 由 $2 x-\frac{\pi}{3}=k \pi-\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 得 $x=\frac{k \pi}{2}-\frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$,

所以函数 $f(x)$ 的对称轴方程是 $x=\frac{k \pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k \in \mathbf{Z})$.

(3) 由 (1) 知, $f(x)=\sqrt{3} \sin \left(2 x-\frac{\pi}{3}\right)$, 当 $x \in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2 x-\frac{\pi}{3} \in\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2 \pi}{3}\right]$,

由 $-\frac{\pi}{3} \leq 2 x-\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$, 解得 $0 \leq x \leq \frac{5 \pi}{12}$, 由 $\frac{\pi}{2} \leq 2 x-\frac{\pi}{3} \leq \frac{2 \pi}{3}$, 解得 $\frac{5 \pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$,

所以函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调增区间是 $\left[0, \frac{5 \pi}{12}\right]$, 单调递减区间是 $\left[\frac{5 \pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$.

21. 党的二十大报告指出: 必须坚持科技是第一生产力、人才是第一资源、创新是第一动力. 科技兴则民族兴, 科技强则国家强. 2023 年 9 月, 华为 Mate60 系列的发布再次引发了广泛关注, 它不仅展示了中国科技产业的不断进步和发展, 更体现了中国人民自主创新、顽强不屈的精神. 某芯片企业原有 400 名技术人员, 年人均投入 a 万元 ($a>0$), 现为加大对研发工作的投入, 该企业把原有技术人员分成技术人员和研发人员, 其中技术人员 x 名, 调整后研发人员的年人均投入增加 $(4x)\%$, 技术人员的年人均投入调整为 $a\left(m-\frac{2 x}{25}\right)$ 万元.

(1) 若要使调整后研发人员的年总投入不低于调整前 400 名技术人员的年总投入, 求调整后的研发人员的人数最少为多少人?

(2) 为了激励研发人员的工作热情和保持技术人员的工作积极性, 企业决定在投入方面要同时满足以下三个条件: ①技术人员不少于 100 人, 不多于 275 人; ②研发人员的年总投入始终不低于技术人员的年总投入; ③技术人员的年人均投入始终不减少. 请问是否存在这样的实数 m , 满足以上两个条件, 若存在, 求出 m 的范围; 若不存在, 说明理由.

解: (1) 依题意可得调整后研发人员的年人均投入为 $[1+(4x)\%]a$ 万元,

$$\text{则 } (400-x)[1+(4x)\%]a \geq 400a, (a > 0),$$

$$\text{整理得 } 0.04x^2 - 15x \leq 0, \text{ 解得 } 0 \leq x \leq 375, \text{ 故 } 25 \leq 400-x \leq 400,$$

所以要使这 $(400-x)$ 名研发人员的年总投入不低于调整前 400 名技术人员的年总投入, 调整后的研发人员的人数最少为 25 人.

(2) 由条件②研发人员的年总投入始终不低于技术人员的年总投入,

$$\text{得 } (400-x)[1+(4x)\%]a \geq x\left(m - \frac{2x}{25}\right)a,$$

$$\text{上式两边同除以 } ax \text{ 得 } \left(\frac{400}{x} - 1\right)\left(1 + \frac{x}{25}\right) \geq m - \frac{2x}{25}, \text{ 整理得 } m \leq \frac{400}{x} + \frac{x}{25} + 15;$$

$$\text{由条件③技术人员年人均投入不减少, 得 } a\left(m - \frac{2x}{25}\right) \geq a, \text{ 解得 } m \geq \frac{2x}{25} + 1;$$

$$\text{由条件①得 } 100 \leq x \leq 275, x \in \mathbb{N}^*,$$

假设存在这样的实数 m , 使得技术人员在已知范围内调整后, 满足以上三个条件,

$$\text{即 } \frac{2x}{25} + 1 \leq m \leq \frac{400}{x} + \frac{x}{25} + 15 \quad (100 \leq x \leq 275, x \in \mathbb{N}^*) \text{ 恒成立,}$$

$$\text{因为 } \frac{400}{x} + \frac{x}{25} + 15 \geq 2\sqrt{\frac{400}{x} \cdot \frac{x}{25}} + 15 = 23,$$

$$\text{当且仅当 } \frac{400}{x} = \frac{x}{25}, \text{ 即 } x = 100 \text{ 时等号成立, 所以 } m \leq 23,$$

$$\text{又因为 } 100 \leq x \leq 275, \text{ 当 } x = 275 \text{ 时, } \frac{2x}{25} + 1 \text{ 取得最大值 } 23, \text{ 所以 } m \geq 23,$$

$$\text{所以 } 23 \leq m \leq 23, \text{ 即 } m = 23,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/538107017133006054>