

湖北省襄阳市优质高中 2023 年高三下学期期中检测试题数学试题

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

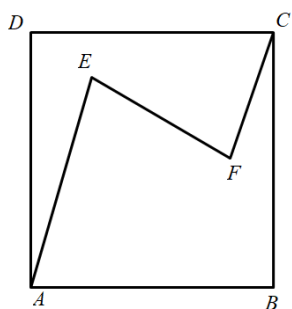
1. 设 i 是虚数单位，则 $(2+3i)(3-2i) = (\quad)$

- A. $12+5i$ B. $6-6i$ C. $5i$ D. 13

2. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 ，点 P 在椭圆上，若 $|PF_2| = 2$ ，则 $\angle F_1PF_2$ 的大小为 $(\quad)$

- A. 150° B. 135° C. 120° D. 90°

3. 台球是一项国际上广泛流行的高雅室内体育运动，也叫桌球（中国粤港澳地区的叫法）、撞球（中国台湾地区的叫法）控制撞球点、球的旋转等控制母球走位是击球的一项重要技术，一次台球技术表演节目中，在台球桌上，画出如图正方形 $ABCD$ ，在点 E, F 处各放一个目标球，表演者先将母球放在点 A 处，通过击打母球，使其依次撞击点 E, F 处的目标球，最后停在点 C 处，若 $AE=50cm$ ， $EF=40cm$ ， $FC=30cm$ ， $\angle AEF=\angle CFE=60^\circ$ ，则该正方形的边长为 $(\quad)$



- A. $50\sqrt{2} cm$ B. $40\sqrt{2} cm$ C. $50cm$ D. $20\sqrt{6} cm$

4. 复数 $z(1-i) = i$ (i 为虚数单位)，则 z 的共轭复数在复平面上对应的点位于 $(\quad)$

- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

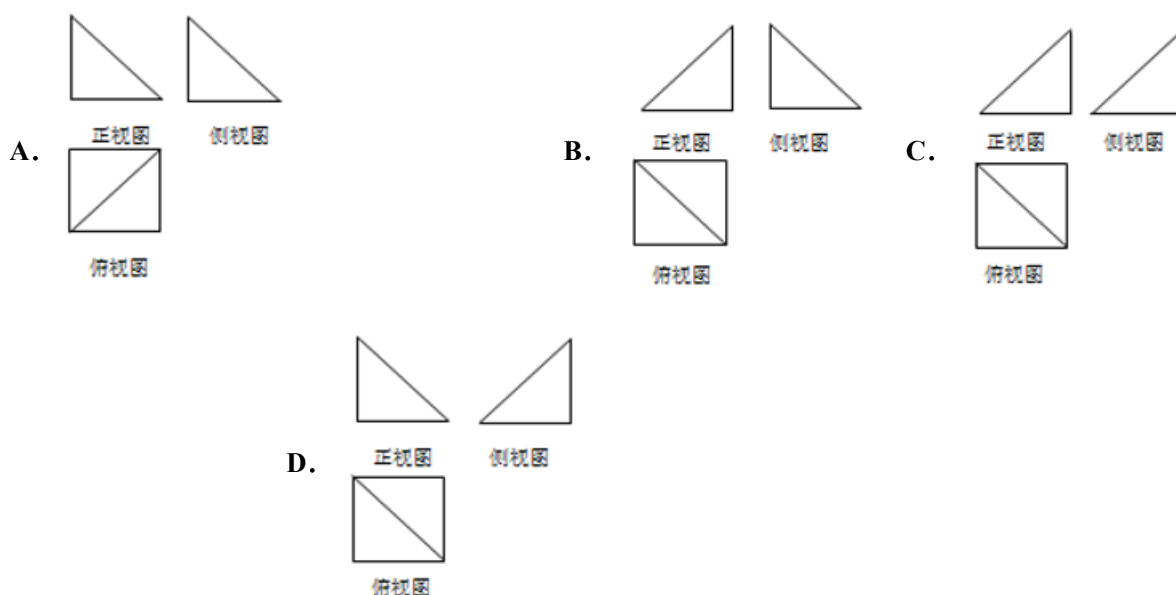
5. 在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = \frac{\pi}{2}$ ， $AB = 4$ ， $AC = 2$ ，若 $AD = \frac{3}{2}AB$ ，则 $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = (\quad)$

- A. -18 B. $-6\sqrt{3}$ C. 18 D. $6\sqrt{3}$

6. 设集合 $M = \{x | 1 < x \leq 2\}$ ， $N = \{x | x < a\}$ ，若 $M \cap N = M$ ，则 a 的取值范围是 $(\quad)$

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(2, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$

7. 已知底面为正方形的四棱锥，其一条侧棱垂直于底面，那么该四棱锥的三视图可能是下列各图中的（ ）



8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 与双曲线 C 有相同的焦点. 设 P 为抛物线与双曲线 C 的一个交点，且 $\cos \angle PF_1F_2 = \frac{5}{7}$ ，则双曲线 C 的离心率为（ ）

- A. $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ 或 3 C. 2 或 $\sqrt{3}$ D. 2 或 3

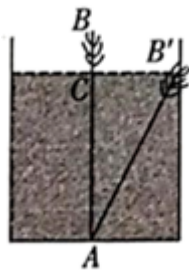
9. 已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{4}(a^2 + c^2 - ac)x$ 存在极值，则角 B 的取值范围是（ ）

- A. $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ B. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ C. $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ D. $\left(\frac{\pi}{6}, \pi\right)$

10. 一个正三角形的三个顶点都在双曲线 $x^2 + ay^2 = 1$ 的右支上，且其中一个顶点在双曲线的右顶点，则实数 a 的取值范围是（ ）

- A. $(3, +\infty)$ B. $(\sqrt{3}, +\infty)$ C. $(-\infty, -\sqrt{3})$ D. $(-\infty, -3)$

11. 《九章算术》勾股章有一“引葭赴岸”问题“今有饼池径丈，葭生其中，出水两尺，引葭赴岸，适与岸齐，问水深，葭各几何？”，其意思是：有一个直径为一丈的圆柱形水池，池中心生有一颗类似芦苇的植物，露出水面两尺，若把它引向岸边，正好与岸边齐，问水有多深，该植物有多高？其中一丈等于十尺，如图若从该葭上随机取一点，则该点取自水下的概率为（ ）



- A. $\frac{12}{13}$ B. $\frac{13}{14}$ C. $\frac{21}{29}$ D. $\frac{14}{15}$

12. 某公园新购进3盆锦紫苏、2盆虞美人、1盆郁金香，6盆盆栽，现将这6盆盆栽摆成一排，要求郁金香不在两边，任两盆锦紫苏不相邻的摆法共（ ）种

- A. 96 B. 120 C. 48 D. 72

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，满足 $a_1 = 1$ ， $a_{k+1} - a_k = a_i$ ($i \leq k, k = 1, 2, 3, \dots, n-1$)，若 $\{a_n\}$ 是等比数列，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 齐王与田忌赛马，田忌的上等马优于齐王的中等马，劣于齐王的上等马，田忌的中等马优于齐王的下等马，劣于齐王的中等马，田忌的下等马劣于齐王的下等马. 现从双方的马匹中随机选一匹进行一场比赛，则田忌的马获胜的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中，常数项为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；系数最大的项是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 若函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图像与直线 $y = m$ 的三个相邻交点的横坐标分别是 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$, 则实数 ω 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， $\{b_n\}$ 为等比数列， $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足 $a_1 = 3$ ， $b_1 = 1$ ， $b_2 + S_2 = 10$ ， $a_5 - 2b_2 = a_3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 令 $c_n = \begin{cases} \frac{2}{S_n}, & n \text{ 为奇数} \\ b_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n ，求 T_{2n} .

18. (12分) 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，其中 $x \in \mathbf{R}$ ， $\omega > 0$.

(1) 当 $\omega=1$ 时, 求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 的值;

(2) 当 $f(x)$ 的最小正周期为 π 时, 求 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域.

19. (12 分) 设数阵 $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \{1, 2, \dots, 6\}$. 设 $S = \{e_1, e_2, \dots, e_l\} \subseteq \{1, 2, \dots, 6\}$, 其中 $e_1 < e_2 < \dots < e_l$, $l \in \mathbb{N}^*$ 且 $l \leq 6$. 定义变换 φ_k 为“对于数阵的每一行, 若其中有 k 或 $-k$, 则将这一行中每个数都乘以 -1 ; 若其中没有 k 且没有 $-k$, 则这一行中所有数均保持不变” ($k = e_1, e_2, \dots, e_l$). $\varphi_S(A_0)$ 表示“将 A_0 经过 φ_{e_1} 变换得到 A_1 , 再将 A_1 经过 φ_{e_2} 变换得到 $A_2, \dots$, 以此类推, 最后将 A_{l-1} 经过 φ_{e_l} 变换得到 A_l ”, 记数阵 A_l 中四个数的和为 $T_S(A_0)$.

(1) 若 $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, 写出 A_0 经过 φ_2 变换后得到的数阵 A_1 ;

(2) 若 $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $S = \{1, 3\}$, 求 $T_S(A_0)$ 的值;

(3) 对任意确定的一个数阵 A_0 , 证明: $T_S(A_0)$ 的所有可能取值的和不超过 -4 .

20. (12 分) 设函数 $f(x) = e^x + 2ax - e$, $g(x) = -\ln x + ax + a$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 对任意 $x \geq 1$, 都有 $f(x) \geq g(x)$, 求实数 a 的取值范围.

21. (12 分) 2018 年反映社会现实的电影《我不是药神》引起了很大的轰动, 治疗特种病的创新药研发成了当务之急. 为此, 某药企加大了研发投入, 市场上治疗一类慢性病的特效药品 A 的研发费用 x (百万元) 和销量 y (万盒) 的统计数据如下:

研发费用 x (百万元)	2	3	6	10	13	15	18	21
销量 y (万盒)	1	1	2	2.5	3.5	3.5	4.5	6

(1) 求 y 与 x 的相关系数 r 精确到 0.01, 并判断 y 与 x 的关系是否可用线性回归方程模型拟合? (规定: $|r| \geq 0.75$ 时, 可用线性回归方程模型拟合);

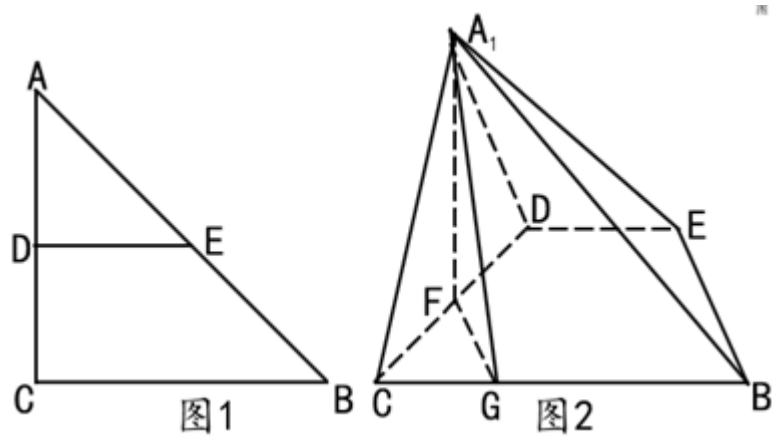
(2) 该药企准备生产药品 A 的三类不同的剂型 A_1, A_2, A_3 , 并对其进行两次检测, 当第一次检测合格后, 才能进行第二次检测. 第一次检测时, 三类剂型 A_1, A_2, A_3 合格的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}$, 第二次检测时, 三类剂型 $A_1,$

A_2, A_3 合格的概率分别为 $\frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$. 两次检测过程相互独立, 设经过两次检测后 A_1, A_2, A_3 三类剂型合格的种类数为 X , 求 X 的数学期望.

附：(1) 相关系数
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2\right)}}$$

(2) $\sum_{i=1}^8 x_i y_i = 347, \sum_{i=1}^8 x_i^2 = 1308, \sum_{i=1}^8 y_i^2 = 93, \sqrt{1785} \approx 42.25$.

22. (10 分) 如图 1, 在等腰 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, D, E 分别为 AC, AB 的中点, F 为 CD 的中点, G 在线段 BC 上, 且 $BG = 3CG$. 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起, 使点 A 到 A_1 的位置 (如图 2 所示), 且 $A_1F \perp CD$.



- (1) 证明: $BE \parallel$ 平面 A_1FG ;
- (2) 求平面 A_1FG 与平面 A_1BE 所成锐二面角的余弦值

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. A

【解析】

利用复数的乘法运算可求得结果.

【详解】

由复数的乘法法则得 $(2+3i)(3-2i) = 6+5i-6i^2 = 12+5i$.

故选：A.

【点睛】

本题考查复数的乘法运算，考查计算能力，属于基础题.

2. C

【解析】

根据椭圆的定义可得 $|PF_1| = 4$ ， $|F_1F_2| = 2\sqrt{7}$ ，再利用余弦定理即可得到结论.

【详解】

由题意， $|F_1F_2| = 2\sqrt{7}$ ， $|PF_1| + |PF_2| = 6$ ，又 $|PF_2| = 2$ ，则 $|PF_1| = 4$ ，

由余弦定理可得 $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{16+4-28}{2 \times 2 \times 4} = -\frac{1}{2}$.

故 $\angle F_1PF_2 = 120^\circ$.

故选：C.

【点睛】

本题考查椭圆的定义，考查余弦定理，考查运算能力，属于基础题.

3. D

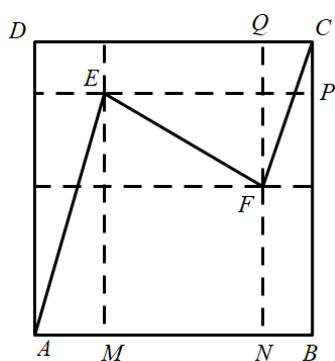
【解析】

过点 E, F 做正方形边的垂线，如图，设 $\angle AEM = \alpha$ ，利用直线三角形中的边角关系，将 AB, BC 用 α 表示出来，根据 $AB = BC$ ，列方程求出 α ，进而可得正方形的边长.

【详解】

过点 E, F 做正方形边的垂线，如图，

设 $\angle AEM = \alpha$ ，则 $\angle CFQ = \alpha$ ， $\angle MEF = \angle QFE = 60^\circ - \alpha$ ，



则 $AB = AM + MN + NB = AE \sin \alpha + EF \sin(60^\circ - \alpha) + FC \sin \alpha$

$$= 50 \sin \alpha + 40 \sin (60^\circ - \alpha) + 30 \sin \alpha = 40 \left(\frac{3}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \right),$$

$$CB = BP + PC = AE \cos \alpha + FC \cos \alpha - EF \cos (60^\circ - \alpha)$$

$$= 50 \cos \alpha + 30 \cos \alpha - 40 \cos (60^\circ - \alpha) = 40 \left(\frac{3}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right)$$

$$\text{因为 } AB = CB, \text{ 则 } 40 \left(\frac{3}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \right) = 40 \left(\frac{3}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right),$$

$$\text{整理化简得 } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 - \sqrt{3}, \text{ 又 } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\text{得 } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore AB = 40 \left(\frac{3}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \right) = 40 \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \right) = 20\sqrt{6}.$$

即该正方形的边长为 $20\sqrt{6} \text{ cm}$.

故选: D.

【点睛】

本题考查直角三角形中的边角关系, 关键是要构造直角三角形, 是中档题.

4. C

【解析】

由复数除法求出 z , 写出共轭复数, 写出共轭复数对应点坐标即得

【详解】

$$\text{解析: } Q z = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \quad \therefore \bar{z} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i,$$

对应点为 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, 在第三象限.

故选: C.

【点睛】

本题考查复数的除法运算, 共轭复数的概念, 复数的几何意义. 掌握复数除法法则是解题关键.

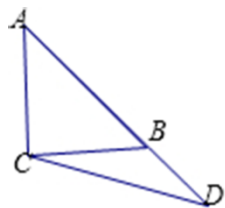
5. C

【解析】

$$\text{在直角三角形 ABC 中, 求得 } \cos \angle CAB = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$$

，再由向量的加减运算，运用平面向量基本定理，结合向量数量积的定义和性质：向量的平方即为模的平方，化简计算即可得到所求值．

【详解】



在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = \frac{\pi}{2}$ ， $AB = 4$ ， $AC = 2$ ，，

$$\cos \angle CAB = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{若 } \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB}, \text{ 则 } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} &= (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}^2 \\ &= \frac{3}{2} \overrightarrow{AB}^2 - \frac{3}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}^2 = \frac{3}{2} \times 16 - \frac{5}{2} \times 4 \times 2 \times \frac{1}{2} + 4 = 18. \end{aligned}$$

故选 C.

【点睛】

本题考查向量的加减运算和数量积的定义和性质，主要是向量的平方即为模的平方，考查运算能力，属于中档题．

6. C

【解析】

由 $M \cap N = M$ 得出 $M \subseteq N$ ，利用集合的包含关系可得出实数 a 的取值范围．

【详解】

$$\text{Q } M = \{x | 1 < x \leq 2\}, N = \{x | x < a\} \text{ 且 } M \cap N = M, \therefore M \subseteq N, \therefore a > 2.$$

因此，实数 a 的取值范围是 $(2, +\infty)$ ．

故选：C.

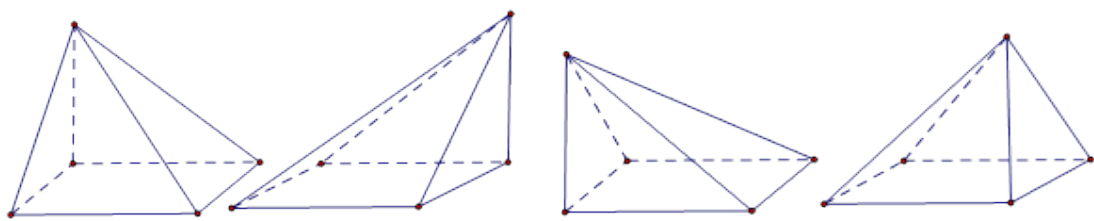
【点睛】

本题考查利用集合的包含关系求参数，考查计算能力，属于基础题．

7. C

【解析】

试题分析：通过对以下四个四棱锥的三视图对照可知，只有选项 C 是符合要求的．



考点：三视图

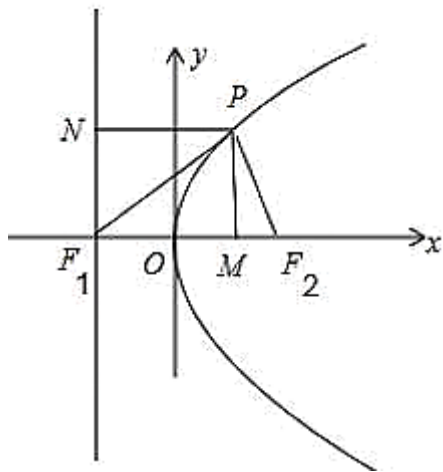
8. D

【解析】

设 $|PF_1| = m$, $|PF_2| = n$, 根据 $\cos \angle PF_1F_2 = \frac{5}{7}$ 和抛物线性质得出 $|PF_2| = \frac{5}{7}m$, 再根据双曲线性质得出 $m = 7a$, $n = 5a$, 最后根据余弦定理列方程得出 a 、 c 间的关系, 从而可得出离心率.

【详解】

过 P 分别向 x 轴和抛物线的准线作垂线, 垂足分别为 M 、 N , 不妨设 $|PF_1| = m$, $|PF_2| = n$,



则 $|MF_1| = |PN| = |PF_2| = |PF_1| \cos \angle PF_1F_2 = \frac{5m}{7}$,

Q P 为双曲线上的点, 则 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$, 即 $m - \frac{5m}{7} = 2a$, 得 $m = 7a$, $\therefore n = 5a$,

又 $|F_1F_2| = 2c$, 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定理可得 $\frac{5}{7} = \frac{49a^2 + 4c^2 - 25a^2}{2 \times 7a \times 2c}$,

整理得 $c^2 - 5ac + 6a^2 = 0$, 即 $e^2 - 5e + 6 = 0$, $Q e > 1$, 解得 $e = 2$ 或 $e = 3$.

故选: D.

【点睛】

本题考查了双曲线离心率的求解, 涉及双曲线和抛物线的简单性质, 考查运算求解能力, 属于中档题.

9. C

【解析】

求出导函数 $f'(x)$, 由 $f'(x) = 0$ 有不等的两实根, 即 $\Delta > 0$ 可得不等关系, 然后由余弦定理可及余弦函数性质可得结论.

【详解】

Q $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{4}(a^2 + c^2 - ac)x$, $\therefore f'(x) = x^2 + bx + \frac{1}{4}(a^2 + c^2 - ac)$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/538127121051006137>