

第19讲 圆锥曲线中的光学性质

（高阶拓展、竞赛适用）

（3 类核心考点精讲精练）

命题规律及备考策略

【命题规律】本节内容是新高考卷的选考内容，设题不定，难度中等或偏难，分值为 5-17 分

【备考策略】1.理解、掌握圆锥曲线光学性质的形式

2.理解、掌握圆锥曲线的光学性质问题及其相关计算

【命题预测】本节内容是新高考卷的常考内容，小题和大题都会作为载体命题，同学们要会结合公式运算，需强化训练复习

知识讲解

1. 抛物线的光学性质

如图 1 所示，从抛物线的焦点 F 发出的光线，被抛物线反射后，得到的是一系列的与抛物线对称轴平行（或重合）的光线；

如图 2 所示，设抛物线在 P 处的切线 l 交对称轴于点 Q , $PM \perp l$ 上切线 l 交对称轴于点 M ，则焦点 F 是 QM 的中点.

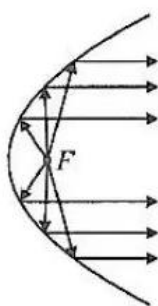


图 1

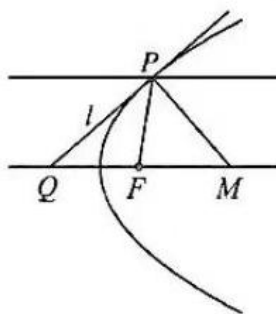


图 2

2. 椭圆的光学性质

如图 3 所示，从椭圆的一个焦点发出的光线，被椭圆反射后，必定经过另一个焦点；

如图 4 所示, 椭圆在点 P 处的切线为 l , 直线 $PQ \perp l$ 交直线 F_1F_2 于点 Q , 则 PQ 平分 $\angle F_1PF_2$, 由角平分线性质定理, $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|QF_1|}{|QF_2|}$.

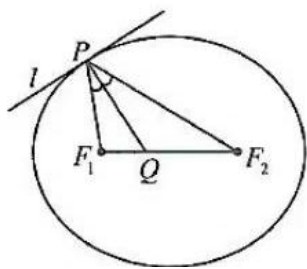


图 3

图 4

3. 双曲线的光学性质

如图 5 所示, 从双曲线一个焦点发出的光线, 被双曲线反射后, 反射光线的反向延长线交于另一个焦点;

如图 6 所示, 双曲线在点 P 处的切线 l 与直线 F_1F_2 相交于点 Q , 则 PQ 平分 $\angle F_1PF_2$, 由角平分线性质定理, $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|QF_1|}{|QF_2|}$

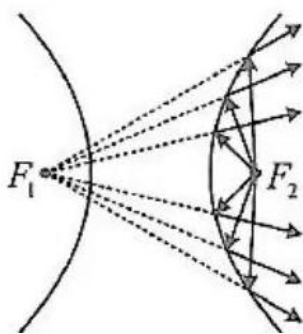


图 5

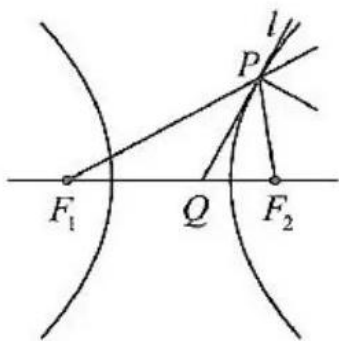


图 6

考点一、椭圆中的光学性质

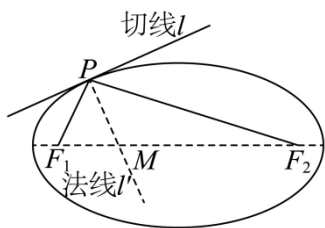


典例引领

1. (2024·内蒙古赤峰·一模) 如图所示, 椭圆有这样的光学性质: 从椭圆的一个焦点发出的光线, 经椭圆反射后, 反射光线经过椭圆的另一个焦点. 根据椭圆的光学性质解决下面的题目: 已知曲线 C 的方程为

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, 其左、右焦点分别是 F_1 , F_2 , 直线 l 与椭圆 C 切于点 P , 且 $|PF_1| = 2$, 过点 P 且与直线 l 垂直

的直线 l' 与椭圆长轴交于点 M , 则 $|F_1M| : |F_2M| = (\quad)$



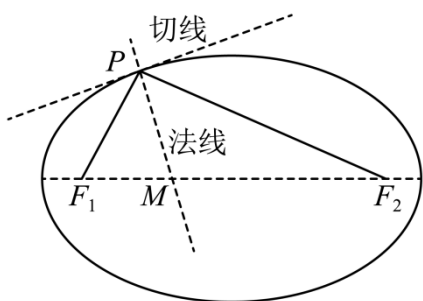
A. $1:\sqrt{3}$

B. $1:2$

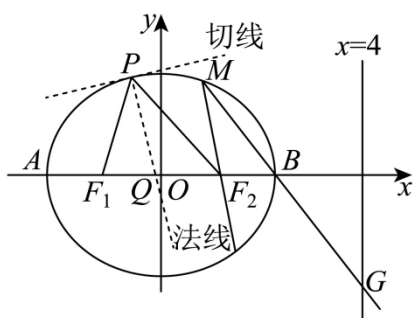
C. $1:3$

D. $1:4$

2. (22-23 高三·安徽六安·阶段练习) 如图所示, 椭圆有这样的光学性质: 从椭圆的一个焦点出发的光线, 经椭圆反射后, 反射光线经过椭圆的另一个焦点. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点为 F_1, F_2 , P 为椭圆上不与顶点重合的任一点, I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心, 记直线 OP, PI (O 为坐标原点) 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $3k_1 = 2k_2$, 则椭圆的离心率为_____.



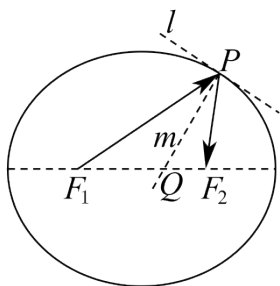
3. (2024 高三·全国·专题练习) 如图, 椭圆有这样的光学性质: 从椭圆的一个焦点出发的光线, 经椭圆反射后, 反射光线经过椭圆的另一个焦点. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 左、右顶点分别为 A, B , 一光线从点 $F_1(-1, 0)$ 射出经椭圆 C 上 P 点反射, 法线 (与椭圆 C 在 P 处的切线垂直的直线) 与 x 轴交于点 Q , 已知 $|PF_1| = 1, |F_1Q| = \frac{1}{2}$. 求椭圆 C 的方程.



1. (23-24 高二上·江苏南京·阶段练习) 班级物理社团在做光学实验时, 发现了一个有趣的现象: 从椭圆的一个焦点发出的光线经椭圆形的反射面反射后将汇聚到另一个焦点处. 根据椭圆的光学性质解决下面问题:

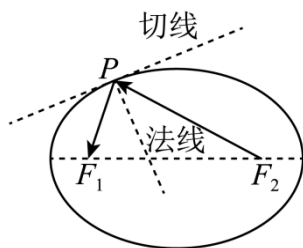
已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, 其左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 直线 l 与椭圆 C 切于点 P , 且 $|PF_1| = 5$

,过点 P 且与直线 l 垂直的直线 m 与椭圆长轴交于点 Q , 则 $\frac{|F_1Q|}{|F_2Q|} = (\quad)$ (注: 若 $\triangle ABC$ 的角平分线 AD 交 BC 于点 D , 则 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$)



- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{3}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

2. (2023·江苏宿迁·模拟预测) 椭圆具有光学性质: 从椭圆的一个焦点发出的光线, 经过椭圆反射后, 反射光线过椭圆的另一个焦点(如图). 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 的直线与椭圆 E 交于点 A, B , 过点 A 作椭圆的切线 l , 点 B 关于 l 的对称点为 M , 若 $|AB| = \frac{3a}{2}, \frac{|BF_1|}{|MF_1|} = \frac{5}{7}$, 则 $\frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle AF_1F_2}} = (\quad)$



- A. $\frac{81}{35}$ B. $\frac{35}{16}$ C. $\frac{9}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

3. (2023·浙江·模拟预测) 费马原理是几何光学中的重要原理, 可以推导出圆锥曲线的一些光学性质, 如: 点 P 为椭圆 (F_1, F_2 为焦点) 上一点, 则点 P 处的切线平分 $\angle F_1PF_2$ 外角. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1, O$ 为坐标原点, l 是点 $P(2, \sqrt{2})$ 处的切线, 过左焦点 F_1 作 l 的垂线, 垂足为 M , 则 $|OM|$ 为 $(\quad)$
- A. $2\sqrt{2}$ B. 2 C. 3 D. $2\sqrt{3}$

考点二、双曲线中的光学性质



典例引领

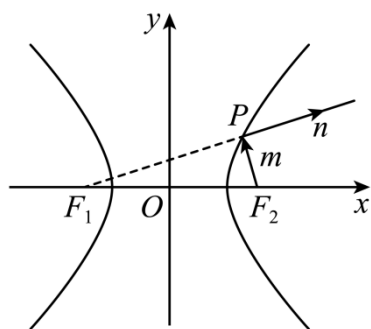
1. (2023·山西·模拟预测)

双曲线的光学性质是：从双曲线一个焦点发出的光，经过双曲线反射后，反射光线的反向延长线都汇聚到双曲线的另一个焦点上. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，从 F_2 发出的光线射向 C 上的点 $P(8, y_0)$ 后，被 C 反射出去，则入射光线与反射光线夹角的余弦值是 ()

- A. $\frac{13}{14}$ B. $-\frac{11}{14}$ C. $\frac{11}{14}$ D. $-\frac{13}{14}$

2. (21-22 高三上·全国·阶段练习) 双曲线的光学性质：从双曲线一个焦点发出的光，经过双曲线反射后，反射光线的反向延长线都汇聚到双曲线的另一个焦点上. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_2 沿倾斜角 120° 出发的光线，经双曲线右支反射，若反射光线的倾斜角为 30° ，则该双曲线的离心率为_____.

3. (2023·湖南邵阳·三模) (多选) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，双曲线具有如下光学性质：从右焦点 F_2 发出的光线 m 交双曲线右支于点 P ，经双曲线反射后，反射光线 n 的反向延长线过左焦点 F_1 ，如图所示. 若双曲线 C 的一条渐近线的方程为 $\sqrt{3}x - y = 0$ ，则下列结论正确的有 ()



- A. 双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$
 B. 若 $m \perp n$ ，则 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 12$
 C. 若射线 n 所在直线的斜率为 k ，则 $k \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
 D. 当 n 过点 $M(8, 5)$ 时，光由 $F_2 \rightarrow P \rightarrow M$ 所经过的路程为 10

1. (2024·山东济宁·三模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，根据双曲线的光学性质可知，过双曲线 C 上任意一点 $P(x_0, y_0)$ 的切线 $l: \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 平分 $\angle F_1 P F_2$. 直线 l_1 过 F_2 交双曲线 C 的右支于 A, B 两点，设 $\triangle A F_1 F_2, \triangle B F_1 F_2, \triangle A B F_1$ 的内心分别为 I_1, I_2, I ，若 $\triangle I I_1 I_2$ 与 $\triangle F_2 I_1 I_2$ 的面积之比为 $\frac{3}{5}$ ，则双曲线 C 的离心率为 ()

A. $\frac{3}{2}$

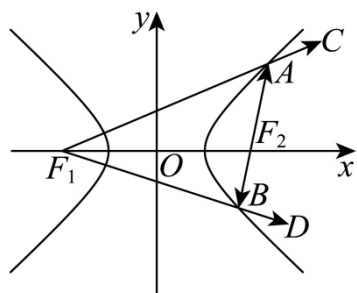
B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{5}{3}$

D. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

2. (2023·全国·模拟预测) “双曲线新闻灯”的研制是利用了双曲线的光学性质: 从双曲线一个焦点发出的光线经双曲线镜面反射, 反射光线的反向延长线经过另一个焦点. 已知一个“双曲线新闻灯”的轴截面是双曲线的一部分, 其方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$, F_2 为其右焦点. 若从右焦点 F_2 发出的光线经双曲线右支上的点 A 和 B 反射, AD , BC 为反射光线, 且满足 $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$, 则 $\tan \angle ABC =$ ____.

3. (2024·江苏常州·二模) 双曲线具有光学性质: 从双曲线一个焦点发出的光线经过双曲线镜面反射, 其反射光线的反向延长线经过双曲线的另一个焦点. 如图, 双曲线 $E: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 从 F_2 发出的两条光线经过 E 的右支上的 A, B 两点反射后, 分别经过点 C 和 D , 其中 $\overline{AF_2}, \overline{BF_2}$ 共线, 则 ()



- A. 若直线 AB 的斜率 k 存在, 则 k 的取值范围为 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right)$
- B. 当点 C 的坐标为 $(2\sqrt{10}, \sqrt{10})$ 时, 光线由 F_2 经过点 A 到达点 C 所经过的路程为 6
- C. 当 $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AB}^2$ 时, $\triangle BF_1F_2$ 的面积为 12
- D. 当 $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AB}^2$ 时, $\cos \angle F_1F_2A = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

考点三、抛物线中的光学性质



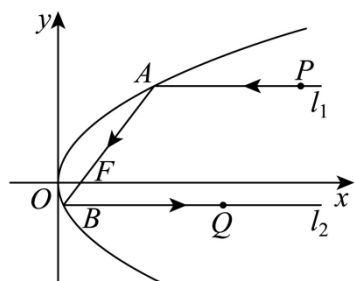
典例引领

1. (2022·福建莆田·三模) 抛物线有如下光学性质: 过焦点的光线经抛物线反射后得到的光线平行于抛物线的对称轴; 反之, 平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点. 已知抛物线 $E: y^2 = 2px (0 < p < 4)$, 一条平行于 x 轴的光线从点 $A(8, 2p)$ 射出, 经过抛物线 E 上的点 B 反射后, 与抛物线 E 交于点 C , 若 $\triangle ABC$ 的面积是 10, 则 $p =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

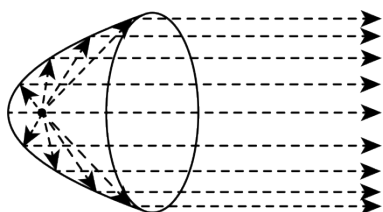
2. (23-24 高二上·广东广州·期末) (多选)

抛物线有如下光学性质：由其焦点射出的光线经抛物线反射后，沿平行于抛物线对称轴的方向射出．反之，平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点．已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ， O 为坐标原点，一束平行于 x 轴的光线 l_1 从点 $P(m, n)$ ($n^2 < 4m$) 射入，经过 C 上的点 $A(x_1, y_1)$ 反射后，再经 C 上另一点 $B(x_2, y_2)$ 反射后，沿直线 l_2 射出，且 l_2 经过点 Q ，则 ()



- A. 当 $p = \frac{1}{2}, n = 1$ 时，延长 AO 交直线 $x = -\frac{1}{4}$ 于点 D ，则 D, B, Q 三点共线
- B. 当 $p = \frac{1}{2}, n = 1$ 时，若 PB 平分 $\angle ABQ$ ，则 $m = \frac{25}{16}$
- C. $\angle AOB$ 的大小为定值
- D. 设该抛物线的准线与 x 轴交于点 K ，则 $\angle AKF = \angle BKF$

3. (2024·安徽蚌埠·模拟预测) (多选) 抛物线有如下光学性质：从焦点发出的光线，经抛物线上的一点反射后，反射光线平行于抛物线的对称轴. 已知抛物线 $E: x^2 = 4y$ 的焦点为 F ，准线为 l ， A, B 为抛物线 E 上两个动点，且 F, A, B 三点不共线，抛物线 E 在 A, B 两点处的切线分别为 $l_1, l_2, l_1 \cap l_2 = T$ ， A, B 在 l 上的射影点分别为 A_1, B_1 ，则 ()



- A. 点 F 关于 l_1 的对称点在 l 上
- B. 点 T 在 l 上
- C. 点 T 为 $\triangle FA_1B_1$ 的外心
- D. $FT \perp AB$

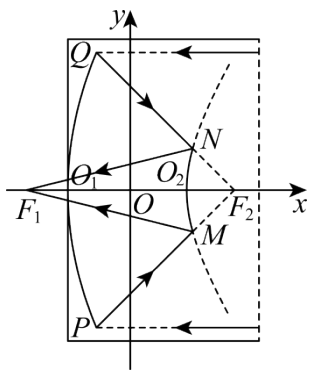
1. (2023·江西·模拟预测) 用于加热水和食物的太阳灶应用了抛物线的光学性质：一束平行于抛物线对称轴的光线，经过抛物面（抛物线绕它的对称轴旋转所得到的曲面叫抛物面）的反射后，集中于它的焦点．用一过抛物线对称轴的平面截抛物面，将所截得的抛物线 C 放在平面直角坐标系中，对称轴与 x 轴重合，顶点与原点重合，如图，若抛物线 C 的方程为 $y^2 = 8x$ ，平行于 x 轴的光线从点 $M(12, 2)$ 射出，经过 C 上的点 A 反射后，再从 C 上的另一点 B 射出，则 $|MB| =$ ()

- A. 6
- B. 8
- C. $2\sqrt{29}$
- D. 29

2. (2024·浙江·模拟预测)

应用抛物线和双曲线的光学性质，可以设计制造反射式天文望远镜，这种望远镜的特点是，镜筒可以很短而观察天体运动又很清楚. 某天文仪器厂设计制造的一种反射式望远镜，其光学系统的原理如图（中心截面示意图）所示. 其中，一个反射镜 PO_1Q 弧所在的曲线为抛物线，另一个反射镜 MO_2N 弧所在的曲线为双曲线一个分支. 已知 F_1, F_2 是双曲线的两个焦点，其中 F_2 同时又是抛物线的焦点，且，

$\angle NF_2F_1 = 45^\circ, \tan \angle NF_1F_2 = \frac{1}{4}, \triangle NF_1F_2$ 的面积为 10, $|O_1F_2| = 8$ ，则抛物线方程为_____.



3. (23-24 高三上·山东滨州·期末) 抛物线的光学性质：由焦点射出的光线经抛物线反射后，沿平行抛物线对称轴的方向射出；反之，平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点. 已知抛物线 $C: x^2 = 4y$, O 为坐标原点，一束平行于 y 轴的光线 l_1 从点 $P(4, m)$ 射入，经过 C 上的点 $A(x_1, y_1)$ 反射后，再经过 C 上另一个点 $B(x_2, y_2)$ 反射，沿直线 l_2 射出，经过点 Q ，则 ()

- A. $y_1 y_2 = 4$
- B. $|AB| = \frac{25}{4}$
- C. 延长 AO 交直线 $y = -1$ 于点 D ，则 D, B, Q 三点共线
- D. 若 PB 平分 $\angle ABQ$ ，则 $m = \frac{41}{4}$

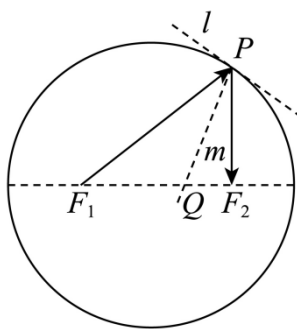


一、单选题

1. (23-24 高二上·福建福州·期中) 班级物理社团同学在做光学实验时，发现了一个有趣的现象：从椭圆的一个焦点发出的光线经椭圆形的反射面反射后将汇聚到另一个焦点处. 根据椭圆的光学性质解决下面问题：

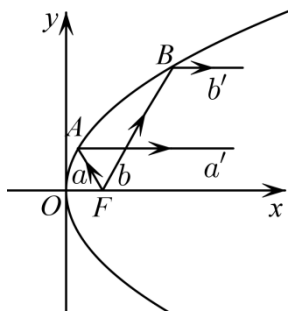
已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{12} = 1$ ，其左、右焦点分别是 F_1, F_2 ，直线 l 与椭圆 C 切于点 P ，且 $|PF_1| = 6$ ，过

点 P 且与直线 l 垂直的直线 m 与椭圆长轴交于点 Q ，则 $\frac{|F_1Q|}{|F_2Q|} = ()$



- A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{5}{3}$

2. (2022·新疆·三模) 抛物线具有以下光学性质：从焦点发出的光线经抛物线反射后平行于抛物线的对称轴. 该性质在实际生产中应用非常广泛. 如图所示，从抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 发出的两条光线 a , b 分别经抛物线上的 A , B 两点反射，已知两条入射光线与 x 轴的夹角均为 60° ，且两条反射光线 a' 和 b' 之间的距离为 $2\sqrt{3}$ ，则 $p =$ ()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. (23-24 高二上·山东青岛·期末) 抛物线有如下光学性质：过焦点的光线经抛物线反射之后得到的光线平行于抛物线的对称轴；反之，平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，一条平行于 x 轴的光线从点 $M(2,1)$ 射出，经过抛物线上的点 A 反射后，再经抛物线上的另一点 B 射出，则 $\triangle ABM$ 的周长为 ()

- A. $\frac{25}{4} + \sqrt{13}$ B. $\frac{7}{2} + \sqrt{29}$ C. $8 + \sqrt{13}$ D. $8 + \sqrt{29}$

4. (2022·黑龙江哈尔滨·模拟预测) 如图 1 所示，双曲线具有光学性质：从双曲线右焦点发出的光线经过双曲线镜面反射，其反射光线的反向延长线经过双曲线的左焦点. 若双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，从 F_2 发出的光线经过图 2 中的 A, B 两点反射后，分别经过点 C 和 D . 且

$\cos \angle BAC = -\frac{3}{5}$, $AB \perp BD$ ，则 E 的离心率为 ()

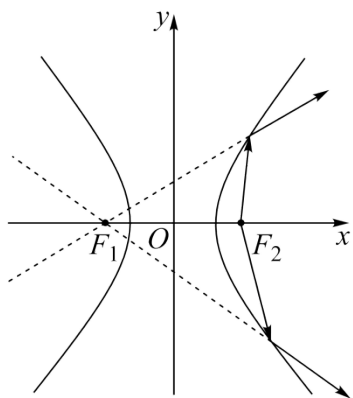


图1

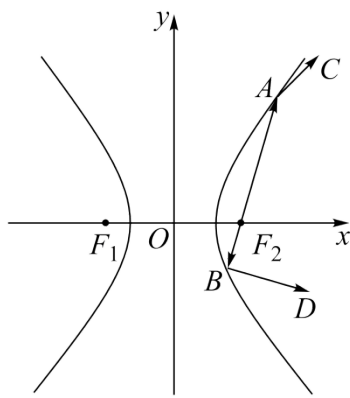


图2

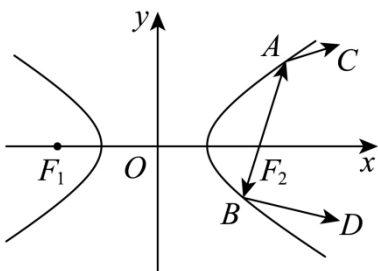
- A. $\sqrt{5}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{17}}{3}$

5. (22-23 高二下·贵州·阶段练习) 抛物线有如下光学性质：过焦点的光线经抛物线反射后得到的光线平行于抛物线的对称轴；反之，抛物线内部平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，点 A 是抛物线 C 上一点，一条光线沿 AF 射出，经过抛物线 C 上的点 B （异于点 A ）反射，反射光线经过点 $M(5, 2)$ ，若 $|AB| + |BM| = 8$ ，则抛物线 C 的方程为（ ）

- A. $y^2 = 2x$ B. $y^2 = 4x$
C. $y^2 = 6x$ D. $y^2 = 8x$

6. (2024·江苏扬州·模拟预测) 双曲线具有光学性质，从双曲线一个焦点发出的光线经过双曲线镜面反射，其反射光线的反向延长线经过双曲线的另一个焦点. 若双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，从 F_2 发出的光线经过图中的 A, B 两点反射后，分别经过点 C 和 D ，且 $\cos \angle BAC = -\frac{4}{5}$ ， $\vec{AB} \cdot \vec{BD} = 0$ ，

则 E 的离心率为（ ）



- A. $\frac{\sqrt{17}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{37}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ D. $\sqrt{5}$

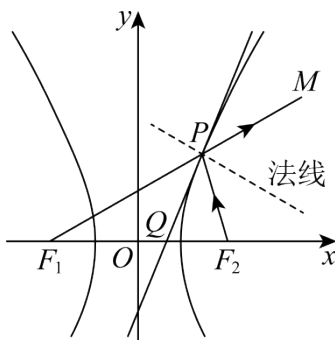
7. (2023·广西柳州·模拟预测) 如图 1 所示，双曲线具有光学性质：从双曲线右焦点发出的光线经过双曲线镜面反射，其反射光线的反向延长线经过双曲线的左焦点. 若双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，从 F_2 发出的光线经过图 2 中的 A, B 两点反射后，分别经过点 C 和 D ，且

$\cos \angle BAC = -\frac{3}{5}$, $AB \perp BD$, 则 E 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{17}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ D. $\sqrt{5}$

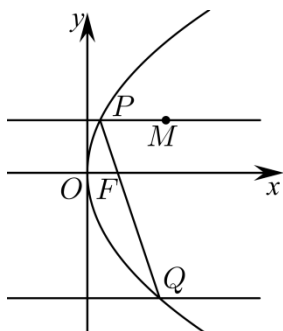
二、多选题

8. (23-24 高二上·湖北武汉·期末) 双曲线具有如下光学性质: 从一个焦点出发的光线, 经双曲线反射后, 反射光的反向延长线经过另一个焦点. 如图, 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), F_1, F_2 为双曲线 C 的左、右焦点. 某光线从 F_2 出发照射到双曲线右支的 P 点, 经过双曲线的反射后, 反射光线 PM 的反向延长线经过 F_1 . 双曲线在点 P 处的切线与 x 轴交于点 Q , $|F_1Q| = 2|QF_2|$, 且反射光线所在直线的斜率为 $\frac{\sqrt{15}}{7}$. 则以下说法正确的是 ()



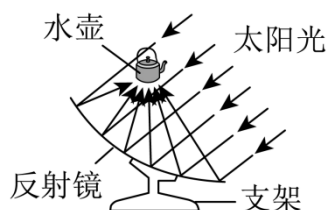
- A. 点 Q 到直线 PF_1 和直线 PF_2 的距离相等
- B. $|PF_1| = 4a$
- C. 双曲线 C 的离心率为 2
- D. 若过点 Q 的直线与双曲线 C 交于 A, B 两点, 则点 Q 不可能是线段 AB 的中点.
9. (2023·湖南长沙·模拟预测) 抛物线有如下光学性质: 由其焦点射出的光线经过抛物线反射后, 沿平行于抛物线对称轴的方向射出; 反之, 平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , O 为坐标原点, 一束平行于 x 轴的光线 l_1 从点 $P(m, n)$ ($n^2 < 4m$) 射入, 经过抛物线上的点 $A(x_1, y_1)$ 反射后, 再经抛物线上另一点 $B(x_2, y_2)$ 反射后, 沿直线 l_2 射出, 则下列结论中正确的是 ()
- A. $x_1 x_2 = 1$
- B. 点 $A(x_1, y_1)$ 关于 x 轴的对称点在直线 l_2 上
- C. 直线 l_2 与直线 $x = -1$ 相交于点 D , 则 A, O, D 三点共线
- D. 直线 l_1 与 l_2 间的距离最小值为 4
10. (2022·辽宁沈阳·一模)

如图，抛物线有如下光学性质：由其焦点射出的光线经抛物线反射后，沿平行于抛物线对称轴的方向射出. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，一束平行于 x 轴的光线 l_1 从点 $M(3,1)$ 射入，经过抛物线上的点 $P(x_1, y_1)$ 反射后，再经抛物线上另一点 $Q(x_2, y_2)$ 反射，沿直线 l_2 射出，则下列结论中正确的是 ()



- A. $x_1 x_2 = 1$ B. $k_{PQ} = -\frac{4}{3}$ C. $|PQ| = \frac{25}{2}$ D. l_1 与 l_2 之间的距离为 5

11. (2023·河南·模拟预测) 用于加热水和食物的太阳灶应用了抛物线的光学性质：一束平行于抛物线对称轴的光线，经过抛物面（抛物线绕它的对称轴旋转所得到的曲面叫抛物面）反射后，集中于它的焦点. 用过抛物线对称轴的平面截抛物面，将所截得的抛物线 C 放在平面直角坐标系中，对称轴与 x 轴重合，顶点与原点重合. 若抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ， O 为坐标原点，一条平行于 x 轴的光线 l_1 从点 M 射入，经过 C 上的点 $A(x_1, y_1)$ 反射，再经过 C 上另一点 $B(x_2, y_2)$ 反射后，沿直线 l_2 射出，则 ()



- A. C 的准线方程为 $x = -1$
 B. $y_1 y_2 = -2$
 C. 若点 $M(2,1)$ ，则 $|AB| = \frac{11}{2}$
 D. 设直线 AO 与 C 的准线的交点为 N ，则点 N 在直线 l_2 上

12. (2023·河北保定·一模) 椭圆有一条光学性质：从椭圆一个焦点出发的光线，经过椭圆反射后，一定经过另一个焦点. 假设光线沿直线传播且在传播过程中不会衰减，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ ，则光线从椭圆一个焦点出发，到首次回到该焦点所经过的路程可能为 ()

- A. 2 B. 8 C. 10 D. 12

13. (2023·湖北·模拟预测) 双曲线具有如下光学性质：从双曲线的一个焦点发出的光线，经双曲线反射后，反射光线的反向延长线经过双曲线的另一个焦点. 由此可得，过双曲线上任意一点的切线平分该点与两焦点连线的夹角. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 的左、右焦点，过 C 右支上一点 $A(x_0, y_0)$ ($x_0 > 1$)

作直线 l 交 x 轴于点 $M\left(\frac{1}{x_0}, 0\right)$, 交 y 轴于点 N , 则 ()

A. C 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$

B. $\angle F_1AM = \angle F_2AM$

C. 过点 F_1 作 $F_1H \perp AM$, 垂足为 H , 则 $|OH| = \frac{3}{2}$

D. 四边形 AF_1NF_2 面积的最小值为 $4\sqrt{5}$

14. (23-24 高二下·湖南·阶段练习) 双曲线的光学性质为: F_1, F_2 是双曲线的左、右焦点, 从 F_2 发出的光线 m 射在双曲线右支上一点 P , 经点 P 反射后, 反射光线 n 的反向延长线过 F_1 (如图 1); 当 P 异于双曲线顶点时, 双曲线在点 P 处的切线平分 $\angle F_1PF_2$ (如图 2). 我国首先研制成功的“双曲线新闻灯”, 就是利用了双曲线的这个光学性质. 若双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 则下列结论正确的是 ()

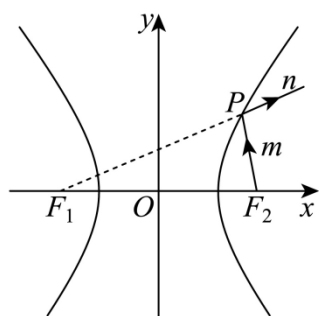


图1

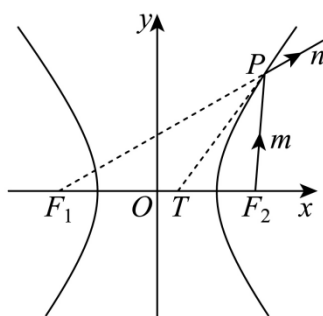


图2

A. 射线 n 所在直线的斜率为 k , 则 $k \in \left(-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right)$

B. 当 $m \perp n$ 时, $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 b^2

C. 当 $m \perp x$ 轴时, 若 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 则双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{3}$

D. 存在点 P , 使双曲线 C 在点 P 处的切线经过原点

三、填空题

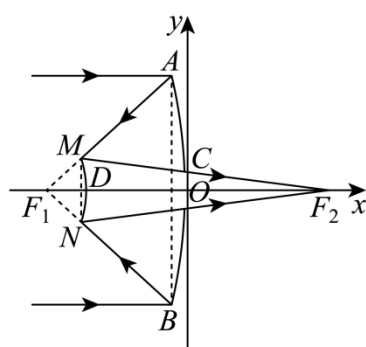
15. (23-24 高二上·江苏宿迁·期中) 费马原理是几何光学中的重要原理, 可以推导出圆锥曲线的一些光学性质. 点 P 为椭圆 (F_1, F_2 为焦点) 上一点, 点 P 处的切线平分 $\angle F_1PF_2$ 外角. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, O 为

坐标原点, l 是点 $P(\sqrt{2}, 1)$ 处的切线, 过左焦点 F_1 作 l 的垂线, 垂足为 M , 则线段 F_2M 的长为_____.

16. (23-24 高二上·江苏宿迁·期中) 椭圆有这样的光学性质: 从椭圆的一个焦点发出的光线, 经椭圆反射后, 反射光线经过椭圆的另一个焦点. 根据椭圆的光学性质解决下题: 已知曲线 C 的方程为 $x^2 + 4y^2 = 4$, 其左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 直线 l 与椭圆 C 切于点 P , 且 $|PF_1| = 3$, 过点 P 且与直线 l 垂直的直线 l' 与椭圆长轴交于点 M , 则 $|F_1M| \cdot |F_2M| =$ _____

17. (23-24 高二上·河北张家口·期末)

圆锥曲线因其特殊的形状而存在着特殊的光学性质.我们知道,抛物线的光学性质是平行于抛物线对称轴的光线经抛物线反射后汇聚于其焦点;双曲线的光学性质是从双曲线一个焦点发出的光,经过双曲线反射后,反射光线的反向延长线都汇聚到双曲线的另一个焦点上.卡式望远镜就是应用这些性质设计的.下图为卡式望远镜的中心截面示意图,其主要由两块反射镜组成,主镜是中央开孔的凹抛物面镜 C ,副镜是双曲线左支的旋转面型凸双曲面镜 D ,主镜对应抛物线的顶点与副镜对应双曲线的中心重合,当平行光线投射到主镜上时,经过主镜反射,将汇聚到主镜的焦点 F_1 处,但光线尚未汇聚时,又受到以 F_1 为焦点的凸双曲面镜的反射,穿过主镜中心的开孔后汇聚于另一个焦点 F_2 处.以 F_1F_2 的中点为原点, F_1F_2 为 x 轴,建立平面直角坐标系.若 $|F_1F_2|=4$ 米,凹抛物面镜的口径 AB 为 $8(\sqrt{2}-1)$ 米,凸双曲面镜的口径 MN 为 1 米,要使副镜的反射光线全部通过凹抛物面镜 C 的中央孔洞,则孔洞直径最小为_____米.



18. (2023·浙江杭州·二模) 费马定理是几何光学中的一条重要原理,在数学中可以推导出圆锥曲线的一些光学性质.例如,点 P 为双曲线(F_1, F_2 为焦点)上一点,点 P 处的切线平分 $\angle F_1PF_2$.已知双曲线 C :

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1, O \text{ 为坐标原点, } l \text{ 是点 } P\left(3, \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \text{ 处的切线, 过左焦点 } F_1 \text{ 作 } l \text{ 的垂线, 垂足为 } M, \text{ 则}$$

$$|OM| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

19. (2024·山东淄博·二模) “若点 P 为椭圆上的一点, F_1, F_2 为椭圆的两个焦点,则椭圆在点 P 处的切线平分 $\angle F_1PF_2$ 的外角”,这是椭圆的光学性质之一.已知椭圆 $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$,点 P 是椭圆上的点,在点 P 处的切线

为直线 l ,过左焦点 F_1 作 l 的垂线,垂足为 M ,设点 M 的轨迹为曲线 E .若 Q 是曲线 E 上一点,已知点

$$A(4,0), B(5,4), \text{ 则 } \frac{\sqrt{2}}{2}|AQ| + |BQ| \text{ 的最小值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

四、解答题

20. (2023 高三·全国·专题练习) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上、下顶点分别为 A, B ,且短轴长为

$2\sqrt{3}$, T 为椭圆上(除 A, B 外)任意一点,直线 TA, TB 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$, F_1, F_2 分别为左、右焦点.

(1)求椭圆 C 的方程.

(2)“天眼”是世界上最大、最灵敏的单口径射电望远镜,它的外形像一口“大锅”,可以接收到百亿光年外的电

磁信号．在“天眼”的建设中，用到了大量的圆锥曲线的光学性质，请以上面的椭圆 C

为代表，证明：由焦点 F_1 发出的光线射到椭圆上任意一点 M 后反射，反射光线必经过另一焦点 F_2 。（提示：光线射到曲线上某点并反射时，法线垂直于该点处的切

第20讲 圆锥曲线中的光学性质

（高阶拓展、竞赛适用）

（3 类核心考点精讲精练）

命题规律及备考策略

【命题规律】本节内容是新高考卷的选考内容，设题不定，难度中等或偏难，分值为 5-17 分

【备考策略】1.理解、掌握圆锥曲线光学性质的形式

2.理解、掌握圆锥曲线的光学性质问题及其相关计算

【命题预测】本节内容是新高考卷的常考内容，小题和大题都会作为载体命题，同学们要会结合公式运算，需强化训练复习

知识讲解

2. 抛物线的光学性质

如图 1 所示，从抛物线的焦点 F 发出的光线，被抛物线反射后，得到的是一系列的与抛物线对称轴平行（或重合）的光线；

如图 2 所示，设抛物线在 P 处的切线 l 交对称轴于点 Q , $PM \perp$ 上切线 l 交对称轴于点 M ，则焦点 F 是 QM 的中点.

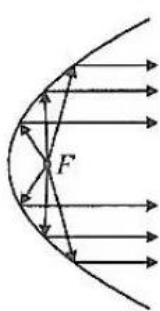


图 1

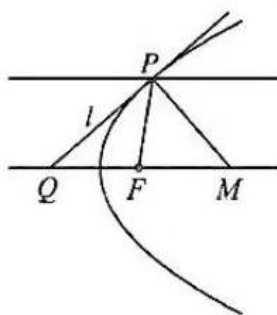


图 2

2. 椭圆的光学性质

如图 3 所示，从椭圆的一个焦点发出的光线，被椭圆反射后，必定经过另一个焦点；

如图 4 所示, 椭圆在点 P 处的切线为 l , 直线 $PQ \perp l$ 交直线 F_1F_2 于点 Q , 则 PQ 平分 $\angle F_1PF_2$, 由角平分线性质定理, $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|QF_1|}{|QF_2|}$.

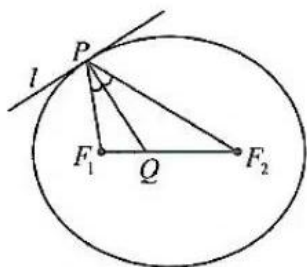


图 3

图 4

3. 双曲线的光学性质

如图 5 所示, 从双曲线一个焦点发出的光线, 被双曲线反射后, 反射光线的反向延长线交于另一个焦点;

如图 6 所示, 双曲线在点 P 处的切线 l 与直线 F_1F_2 相交于点 Q , 则 PQ 平分 $\angle F_1PF_2$, 由角平分线性质定理, $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|QF_1|}{|QF_2|}$.

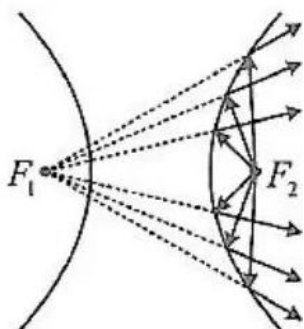


图 5

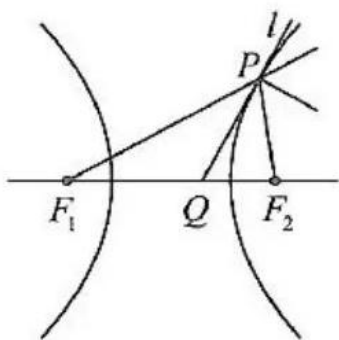
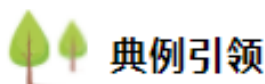


图 6

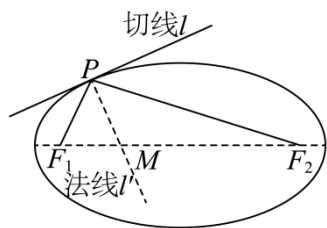
考点一、椭圆中的光学性质



1. (2024·内蒙古赤峰·一模) 如图所示, 椭圆有这样的光学性质: 从椭圆的一个焦点发出的光线, 经椭圆反射后, 反射光线经过椭圆的另一个焦点. 根据椭圆的光学性质解决下面的题目: 已知曲线 C 的方程为

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, 其左、右焦点分别是 F_1 , F_2 , 直线 l 与椭圆 C 切于点 P , 且 $|PF_1| = 2$, 过点 P 且与直线 l 垂直

的直线 l' 与椭圆长轴交于点 M , 则 $|F_1M| : |F_2M| = (\quad)$



A. $1:\sqrt{3}$

B. $1:2$

C. $1:3$

D. $1:4$

【答案】D

【分析】根据椭圆定义和光的反射定理，以及角平分线定理可得

【详解】由已知得 $a=5$ ， $|PF_1|=2$ ，

由椭圆定义可得 $|PF_2|=2a-|PF_1|=8$ ，

根据光的反射定理可得 PM 为 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线，

由正弦定理 $\frac{|F_1M|}{\sin \angle F_1PM} = \frac{|F_1P|}{\sin \angle F_1MP}$ ， $\frac{|F_2M|}{\sin \angle F_2PM} = \frac{|F_2P|}{\sin \angle F_2MP}$

所以 $\frac{|F_1M|}{|F_1P|} = \frac{\sin \angle F_1PM}{\sin \angle F_1MP}$ ， $\frac{|F_2M|}{|F_2P|} = \frac{\sin \angle F_2PM}{\sin \angle F_2MP}$ ，又 $\frac{\sin \angle F_1PM}{\sin \angle F_1MP} = \frac{\sin \angle F_2PM}{\sin \angle F_2MP}$

所以 $\frac{|F_1M|}{|F_1P|} = \frac{|F_2M|}{|F_2P|}$

即 $|F_1M|:|F_2M|=|F_1P|:|F_2P|=1:4$ 。

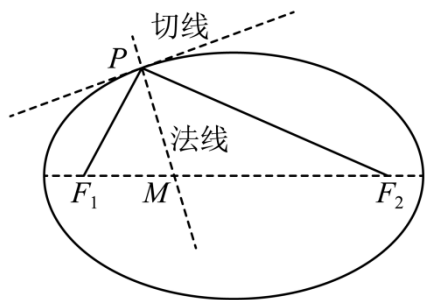
故选：D。

2. (22-23 高三·安徽六安·阶段练习) 如图所示，椭圆有这样的光学性质：从椭圆的一个焦点出发的光线，

经椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点。已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点为 F_1, F_2 ， P

为椭圆上不与顶点重合的任一点， I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心，记直线 OP ， PI (O 为坐标原点) 的斜率分别为 k_1 ，

k_2 ，若 $3k_1 = 2k_2$ ，则椭圆的离心率为_____。



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}/\frac{1}{3}\sqrt{3}$

【分析】根据椭圆的焦点三角形以及内切圆的性质 $|PF_2| + |F_1I| = a + c$ ，结合两点距离公式化简得 $ex_0 = x_1$ ，由

等面积法可得 $y_1 = \frac{c}{a+c} y_0$ ，由斜率关系即可代入化简求值。

【详解】不妨设点 P 在第二象限， $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆与各边的切点分别为 M, N, T ，设 $P(x_0, y_0)$ ， $I(x_1, y_1)$ ，

$$\text{则 } |PM| = |PN|, |F_1M| = |F_1T|, |F_2T| = |F_2N|,$$

$$|PF_1| + |PF_2| + |F_1F_2| = 2|PN| + 2|F_1T| + 2|F_2N| = 2a + 2c,$$

$$\text{故 } |PF_2| + |F_1T| = a + c, |PF_2| = -|F_1T| + a + c = a + c - (x_1 - (-c)) = a - x_1,$$

$$|PF_2| = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 - c)^2 + \frac{a^2 - x_0^2}{a^2} b^2} = \left| \frac{c}{a} x_0 - a \right|,$$

$$\text{由于点 } P \text{ 在第二象限, } |PF_2| > a, \text{ 所以 } |PF_2| = \left| \frac{c}{a} x_0 - a \right| = a - \frac{c}{a} x_0 = a - ex_0$$

$$a - ex_0 = a - x_1, \text{ 故 } ex_0 = x_1,$$

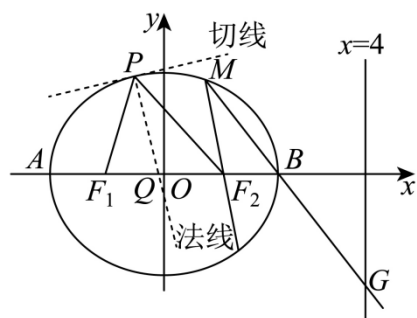
$$S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot y_0 = c \cdot y_0 = \frac{1}{2} (|PF_1| + |PF_2| + |F_1F_2|) y_1 = \frac{1}{2} (2a + 2c) y_1, \text{ 因此 } y_1 = \frac{c}{a+c} y_0,$$

$$3k_{OP} = 2k_{PI} \Rightarrow 3 \frac{y_0}{x_0} = 2 \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \Rightarrow 3 \frac{y_0}{x_0} = 2 \frac{y_0 - \frac{c}{a+c} y_0}{x_0 - x_1} \Rightarrow 3x_1 = \frac{1+3e}{1+e} x_0,$$

$$\text{当 } ex_0 = x_1 \text{ 代入得 } 3e^2 = 1 \Rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (负值舍去),}$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. (2024 高三·全国·专题练习) 如图，椭圆有这样的光学性质：从椭圆的一个焦点出发的光线，经椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，左、右顶点分别为 A, B ，一光线从点 $F_1(-1, 0)$ 射出经椭圆 C 上 P 点反射，法线（与椭圆 C 在 P 处的切线垂直的直线）与 x 轴交于点 Q ，已知 $|PF_1| = 1$ ， $|F_1Q| = \frac{1}{2}$. 求椭圆 C 的方程.



【答案】 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

【分析】根据题中所给的性质，结合角平分线的性质、椭圆的定义进行求解即可.

【详解】由椭圆的定义知 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ ，则 $|PF_2| = 2a - |PF_1| = 2a - 1$.

由光学性质可知 PQ 是 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线, 所以 $\frac{|PF_1|}{|F_1Q|} = \frac{|PF_2|}{|F_2Q|}$.

因为 $c=1$, 所以 $\frac{1}{2} = \frac{2a-1}{2-\frac{1}{2}}$, 得 $a=2$,

从而 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$,

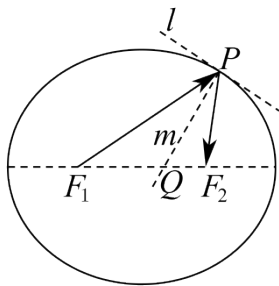
故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

1. (23-24 高二上·江苏南京·阶段练习) 班级物理社团在做光学实验时, 发现了一个有趣的现象: 从椭圆的一个焦点发出的光线经椭圆形的反射面反射后将汇聚到另一个焦点处. 根据椭圆的光学性质解决下面问题:

已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, 其左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 直线 l 与椭圆 C 切于点 P , 且 $|PF_1| = 5$, 过

点 P 且与直线 l 垂直的直线 m 与椭圆长轴交于点 Q , 则 $\frac{|F_1Q|}{|F_2Q|} = (\quad)$ (注: 若 $\triangle ABC$ 的角平分线 AD 交 BC 于

点 D , 则 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$)



A. $\frac{5}{3}$

B. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

C. $\frac{5}{4}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】A

【分析】由光反射的性质易得 PQ 平分 $\angle F_1PF_2$, 再由椭圆的定义及已知即可求比例.

【详解】由题设 $\angle QPF_1 = \angle QPF_2$, 则 PQ 平分 $\angle F_1PF_2$, 故 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|F_1Q|}{|F_2Q|}$,

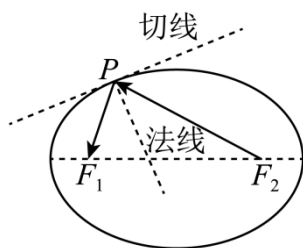
而 $|PF_1| = 5$, $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 8$, 则 $|PF_2| = 3$, 所以 $\frac{|F_1Q|}{|F_2Q|} = \frac{5}{3}$.

故选: A

2. (2023·江苏宿迁·模拟预测) 椭圆具有光学性质: 从椭圆的一个焦点发出的光线, 经过椭圆反射后, 反射光线过椭圆的另一个焦点(如图). 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 的直线与

椭圆 E 交于点 A, B , 过点 A 作椭圆的切线 l , 点 B 关于 l 的对称点为 M , 若 $|AB| = \frac{3a}{2}$, $\frac{|BF_1|}{|MF_1|} = \frac{5}{7}$, 则 $\frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle AF_1F_2}} =$

()



A. $\frac{81}{35}$

B. $\frac{35}{16}$

C. $\frac{9}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

【答案】A

【分析】结合题目所给信息及图形可得 $|AB| = |AM|$ ，后由椭圆定义及条件可得 $|BF_2| = \frac{a}{3}$ ，

$|AF_2| = \frac{7a}{6}, |AF_1| = \frac{5a}{6}$. 最后由 $\frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle AF_1F_2}} = \frac{|AB| \cdot |AM|}{|AF_1| \cdot |AF_2|}$ 可得答案.

【详解】如图，由椭圆的光学性质可得 M, A, F_1 三点共线.

设 $|BF_2| = x$ ，则 $|BF_1| = 2a - x$ ， $|MF_1| = |AF_1| + |MA| = |AF_1| + |AF_2| + |BF_2| = 2a + x$.

故 $\frac{|BF_1|}{|MF_1|} = \frac{2a - x}{2a + x} = \frac{5}{7}$ ，解得 $x = \frac{a}{3}$. 又 $|AB| = \frac{3a}{2}$ ，所以 $|AF_2| = \frac{7a}{6}$ ， $|AF_1| = \frac{5a}{6}$.

$$\text{所以 } \frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle AF_1F_2}} = \frac{\frac{1}{2} |AB| \cdot |AM| \sin \angle MAB}{\frac{1}{2} |AF_1| \cdot |AF_2| \sin(\pi - \angle MAB)} = \frac{|AB| \cdot |AM|}{|AF_1| \cdot |AF_2|} = \frac{\left(\frac{3a}{2}\right)^2}{\frac{5a}{6} \times \frac{7a}{6}} = \frac{81}{35}.$$

故选：A.

3. (2023·浙江·模拟预测) 费马原理是几何光学中的重要原理，可以推导出圆锥曲线的一些光学性质，如：

点 P 为椭圆 (F_1, F_2 为焦点) 上一点，则点 P 处的切线平分 $\angle F_1PF_2$ 外角. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$, O 为坐标原

点， l 是点 $P(2, \sqrt{2})$ 处的切线，过左焦点 F_1 作 l 的垂线，垂足为 M ，则 $|OM|$ 为 ()

A. $2\sqrt{2}$

B. 2

C. 3

D. $2\sqrt{3}$

【答案】A

【分析】先求得直线 l 的方程，然后求得直线 F_1M 的方程，进而求得 M 点坐标，从而求得 $|OM|$.

【详解】依题意可知直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y - \sqrt{2} = k(x - 2)$, $y = k(x - 2) + \sqrt{2}$,

$$\text{代入 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ 得 } x^2 + 2[k(x - 2) + \sqrt{2}]^2 = 8,$$

$$\text{整理得 } (1 + 2k^2)x^2 + (4\sqrt{2}k - 8k^2)x + 8k^2 - 8\sqrt{2}k - 4 = 0,$$

$$\text{由于直线 } l \text{ 和椭圆 } C \text{ 相切，则 } \Delta = (4\sqrt{2}k - 8k^2)^2 - 4(1 + 2k^2)(8k^2 - 8\sqrt{2}k - 4) = 0,$$

整理得 $(\sqrt{2}k+1)^2=0, k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

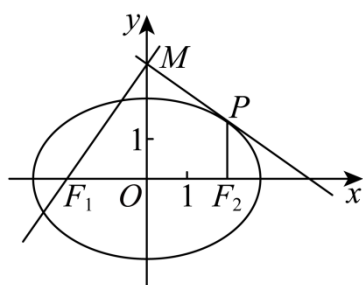
所以直线 l 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)+\sqrt{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2\sqrt{2}$,

对于椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$, $c=\sqrt{8-4}=2$, 所以 $F_1(-2,0)$,

所以直线 F_1M 的方程为 $y=\sqrt{2}(x+2)=\sqrt{2}x+2\sqrt{2}$,

由 $\begin{cases} y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2}x+2\sqrt{2} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_M=0 \\ y_M=2\sqrt{2} \end{cases}$, 所以 $|OM|=2\sqrt{2}$.

故选: A



考点二、双曲线中的光学性质



典例引领

1. (2023·山西·模拟预测) 双曲线的光学性质是: 从双曲线一个焦点发出的光, 经过双曲线反射后, 反射光线的反向延长线都汇聚到双曲线的另一个焦点上. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 从 F_2 发出的光线射向 C 上的点 $P(8, y_0)$ 后, 被 C 反射出去, 则入射光线与反射光线夹角的余弦值是 ()

A. $\frac{13}{14}$

B. $-\frac{11}{14}$

C. $\frac{11}{14}$

D. $-\frac{13}{14}$

【答案】C

【分析】求出点 $P(8, 3\sqrt{3})$, 进而求出 PF_2, PF_1, F_1F_2 , 利用余弦定理即可得出结果.

【详解】设 $P(8, y_0)$ 在第一象限, $\frac{64}{16}-\frac{y_0^2}{9}=1 \Rightarrow y_0=3\sqrt{3}$, $PF_2=\sqrt{(8-5)^2+(3\sqrt{3})^2}=6$

$$PF_1=6+8=14, F_1F_2=10, \cos \angle F_1PF_2 = \frac{14^2+6^2-10^2}{2 \times 14 \times 6} = \frac{11}{14}$$

故选: C

【点睛】本题考查了双曲线的几何性质和余弦定理的应用, 考查了运算求解能力, 属于一般题目.

2. (21-22 高三上·全国·阶段练习)

双曲线的光学性质：从双曲线一个焦点发出的光，经过双曲线反射后，反射光线的反向延长线都汇聚到双曲线的另一个焦点上. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_2 沿倾斜角 120° 出发的光线，经双曲线右支反射，若反射光线的倾斜角为 30° ，则该双曲线的离心率为_____.

【答案】 $\sqrt{3}+1$

【分析】依题意画出图形，则 $\angle MF_1F_2 = 30^\circ$ ， $\angle MF_2F_1 = 60^\circ$ ，即可得到 $\angle F_1MF_2 = 90^\circ$ ，再利用锐角三角函数及双曲线的定义计算可得；

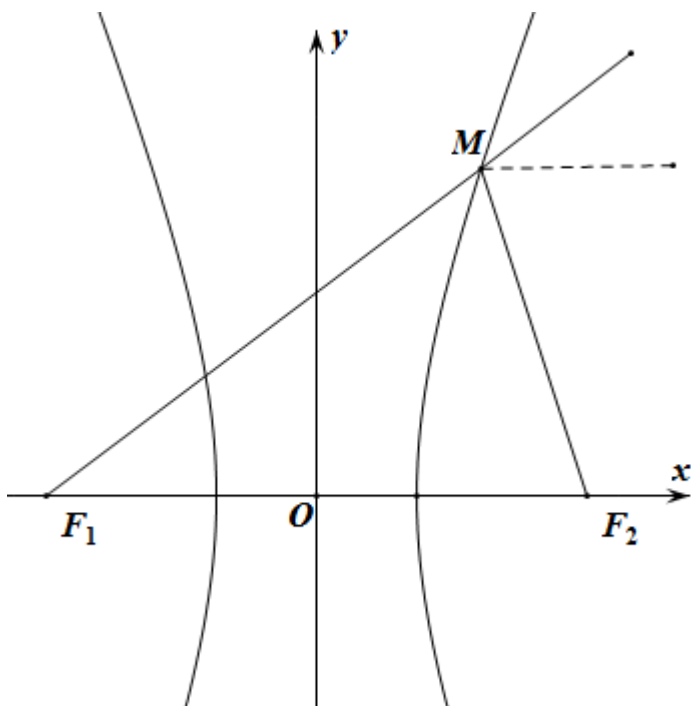
【详解】解：设反射点为 M ，则 $\angle MF_1F_2 = 30^\circ$ ， $\angle MF_2F_1 = 60^\circ$ ，所以 $\angle F_1MF_2 = 90^\circ$ ，

设 $|MF_2| = x$ ，因为 $|F_1F_2| = 2c$ ，所以 $x = 2c \sin 30^\circ = c$ ，所以 $|MF_1| = 2a + c$ ，

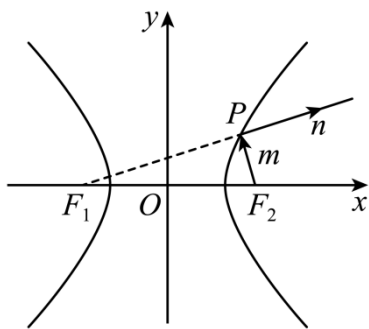
又 $\tan \angle F_1F_2M = \frac{|MF_1|}{|MF_2|} = \frac{2a+c}{c} = \sqrt{3}$ ，所以 $2a+c = \sqrt{3}c$ ，即 $2a = (\sqrt{3}-1)c$ ，

所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$.

故答案为： $\sqrt{3}+1$.



3. (2023·湖南邵阳·三模) (多选) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，双曲线具有如下光学性质：从右焦点 F_2 发出的光线 m 交双曲线右支于点 P ，经双曲线反射后，反射光线 n 的反向延长线过左焦点 F_1 ，如图所示. 若双曲线 C 的一条渐近线的方程为 $\sqrt{3}x - y = 0$ ，则下列结论正确的有 ()



A. 双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

B. 若 $m \perp n$, 则 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 12$

C. 若射线 n 所在直线的斜率为 k , 则 $k \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

D. 当 n 过点 $M(8, 5)$ 时, 光由 $F_2 \rightarrow P \rightarrow M$ 所经过的路程为 10

【答案】AC

【分析】利用双曲线的渐近线方程及勾股定理, 结合双曲线的定义及两点间的距离公式即可求解.

【详解】对于 A, 由题意可知, $a=2$, 因为双曲线 C 的一条渐近线的方程为 $\sqrt{3}x - y = 0$,

所以 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$, 即 $b = 2\sqrt{3}$, 所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$, 故 A 正确;

对于 B, 由 $a=2, b=2\sqrt{3}$, 得 $c^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16$, 解得 $c=4$,

在 $\triangle PF_1F_2$ 中, $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 由勾股定理及双曲线的定义知,

$$|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (|PF_1| - |PF_2|)^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 4a^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 4c^2,$$

即 $2|PF_1| \cdot |PF_2| = 4(c^2 - a^2) = 4b^2 = 48$, 解得 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 24$, 故 B 错误;

对于 C, 由题意可知, 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$,

由双曲线的性质可得射线 n 所在直线的斜率范围为 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, 故 C 正确;

对于 D, 由题意可知, $F_1(-4, 0)$, 当 n 过点 $M(8, 5)$ 时,

由双曲线定义可得光由 $F_2 \rightarrow P \rightarrow M$ 所经过的路程为

$$|F_2P| + |PM| = |F_1P| + |PM| - 2a = |MF_1| - 4 = \sqrt{[8 - (-4)]^2 + (5 - 0)^2} - 4 = 9, \text{ 故 D 错误.}$$

故选: AC.

1. (2024·山东济宁·三模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 根据双曲线的

光学性质可知, 过双曲线 C 上任意一点 $P(x_0, y_0)$ 的切线 $l: \frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 平分 $\angle F_1PF_2$. 直线 l_1 过 F_2

交双曲线 C 的右支于 A, B 两点, 设 $\triangle AF_1F_2, \triangle BF_1F_2, \triangle ABF_1$ 的内心分别为 I_1, I_2, I , 若 $S_{\triangle I_1I_2}$ 与 $S_{\triangle F_2I_1I_2}$ 的面积之比为 $\frac{3}{5}$, 则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

【答案】C

【分析】利用切线长定理求得直线 I_1I_2 的方程, 再借助双曲线的切线方程求出点 I 的横坐标, 结合面积关系求解即得.

【详解】令圆 I_1 切 AF_1, AF_2, F_1F_2 分别为点 P, Q, T , 则 $|AP|=|AQ|, |F_1P|=|F_1T|, |F_2Q|=|F_2T|$,
 $|F_1T|-|F_2T|=|F_1P|-|F_2Q|=|AF_1|-|AF_2|=2a$, 令点 $T(x_0, 0)$, 而 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$,
 因此 $x_0 - (-c) - (c - x_0) = 2a$, 解得 $x_0 = a$, 又 $I_1T \perp F_1F_2$, 则点 I_1 横坐标为 a , 同理点 I_2 横坐标为 a ,
 即直线 I_1I_2 的方程为 $x = a$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 依题意, 直线 AI, BI 的方程分别为:

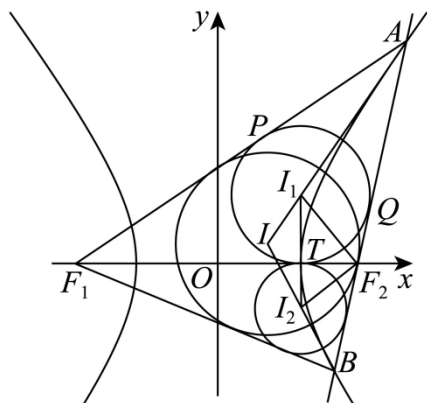
$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1, \quad \frac{x_2x}{a^2} - \frac{y_2y}{b^2} = 1, \quad \text{联立消去 } y \text{ 得: } \left(\frac{x_1x}{a^2} - 1\right)y_2 = \left(\frac{x_2x}{a^2} - 1\right)y_1,$$

整理得 $x = \frac{a^2(y_2 - y_1)}{x_1y_2 - x_2y_1}$, 令直线 AB 的方程为 $x = my + c$,

于是 $x = \frac{a^2(y_2 - y_1)}{(my_1 + c)y_2 - (my_2 + c)y_1} = \frac{a^2}{c}$, 即点 I 的横坐标为 $\frac{a^2}{c}$,

因此 $\frac{S_{\triangle I_1I_2}}{S_{\triangle F_2I_1I_2}} = \frac{a - \frac{a^2}{c}}{c - a} = \frac{a}{c} = \frac{3}{5}$, 所以双曲线 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$.

故选: C



【点睛】方法点睛: 求解椭圆或双曲线的离心率的三种方法:

- ①定义法: 通过已知条件列出方程组, 求得 a, c 得值, 根据离心率的定义求解离心率 e ;
- ②齐次式法: 由已知条件得出关于 a, c 的二元齐次方程, 然后转化为关于 e 的一元二次方程求解;
- ③特殊值法: 通过取特殊值或特殊位置, 求出离心率.

2. (2023·全国·模拟预测)

“双曲线新闻灯”的研制是利用了双曲线的光学性质：从双曲线一个焦点发出的光线经双曲线镜面反射，反射光线的反向延长线经过另一个焦点.已知一个“双曲线新闻灯”的轴截面是双曲线的一部分，其方程为

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，离心率为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ， F_2 为其右焦点.若从右焦点 F_2 发出的光线经双曲线右支上的点 A 和

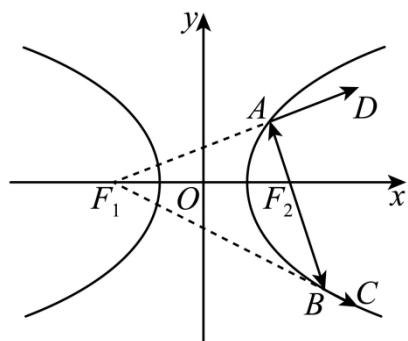
B 反射，AD，BC 为反射光线，且满足 $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$ ，则 $\tan \angle ABC = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{3}{4} / -0.75$

【分析】利用双曲线的几何性质，结合解三角形的知识，分别求出 $|F_1A|$ 、 $|F_1B|$ 和 $|F_1AB|$ 的各边长，即可求出 $\tan \angle F_1BA = \frac{3}{4}$ ，进而求出 $\tan \angle ABC$.

【详解】设双曲线的左焦点为 F_1 ，则 $|F_1F_2| = 2c$.

因为离心率为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ，所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ，所以 $c = \frac{\sqrt{10}}{2}a$.



不妨设 $|AF_1| = n$ ，则 $|AF_2| = n - 2a$.

因为 $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$ ，所以 $n^2 + (n - 2a)^2 = (2c)^2$ ，

把 $c = \frac{\sqrt{10}}{2}a$ 代入，解得： $n = 3a$ ($n = -a$ 舍去).

所以 $|AF_1| = 3a$ ， $|AF_2| = a$.

在直角 $\triangle F_1AF_2$ 中， $\cos \angle F_1F_2A = \frac{|AF_2|}{|F_1F_2|} = \frac{a}{\sqrt{10}a} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

所以 $\cos \angle F_1F_2B = -\cos \angle F_1F_2A = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

在 $\triangle F_1BF_2$ 中， $\cos \angle F_1F_2B = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

设 $|BF_1| = m$ ，则 $|BF_2| = m - 2a$.

由余弦定理得： $\cos \angle F_1F_2B = \frac{|F_1F_2|^2 + |F_2B|^2 - |F_1B|^2}{2|F_1F_2| \cdot |F_2B|} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/545031020310012102>