

## 专题 06 变量之间的关系两种压轴题型全攻略

### 【知识点梳理】

**常量与变量：**在某个变化过程中，保持同一数值的量叫常量，可以取不同数值的量叫变量.

**注意：**①常量与变量必须存在于同一个变化过程中，判断一个量是常量还是变量，需要看两个方面：一是它是否在一个变化过程中；二是看它在这个变化过程中的取值情况是否发生变化；②常量和变量是相对于变化过程而言的，可以互相转化；③不要认为字母就是变量，例如  $\pi$  是常量.

**自变量与因变量：**一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量  $x$  和  $y$ ，并且对于  $x$  的每一个确定的值， $y$  都有唯一的值与之对应，那么我们就说  $x$  是自变量， $y$  是因变量.

**区别：**自变量是先发生变化或主动发生变化的量；因变量是后发生变化或随着自变量的变化而变化的量；

**联系：**两者都是某一变化过程中的变量；两者因研究的侧重点或先后顺序不同可以相互转化.

### 类型一、行程问题

**例 1. (2023 下·四川成都·七年级校考期中)** 如图，在长方形  $ABCD$  中，点  $M$  从  $A$  点出发，沿  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$  的路线运动，开始以每秒  $m$  个单位匀速运动， $a$  秒后变为每秒 2 个单位匀速运动， $b$  秒后速度恢复原速匀速运动，在运动过程中， $\triangle ADM$  的面积  $S$  与运动时间  $x$  的关系式如图所示.

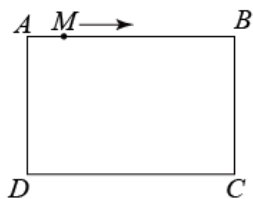


图1

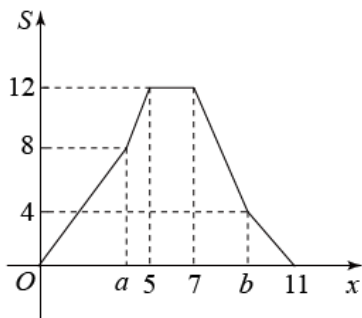


图2

(1) 根据图像，直接写出  $AD = \underline{\quad}$ ； $AB = \underline{\quad}$ ；

(2) 求  $m$ ， $a$ ， $b$  的值；

(3) 当  $M$  在  $AB$  上运动至  $AM = \frac{2}{3}AB$  时，有一动点  $N$  从  $B$  点出发，沿着  $B \rightarrow C$  的路线以每秒 1 个单位匀速运动. 当  $M$ 、 $N$  中有一点到达终点，另一点也停止运动，设  $N$  点运动时间为  $t$  秒， $\triangle AMN$  的面积为  $y$ ，求  $y$  与  $t$  之间的关系式.

【答案】(1)4, 6; (2) $m=1, a=4, b=9$ ; (3) $y = \begin{cases} t^2 + 2t, 0 < t \leq 1 \\ 6 - 3t, 1 < t \leq 2 \\ 3t - 6, 2 < t \leq 3 \\ t^2 - 6t + 12, 3 < t \leq 4 \end{cases}$

【分析】(1) 当  $5 \leq x \leq 7$  时, 三角形面积不变, 说明点  $M$  在  $BC$  上运动, 运动时间为  $7-5=2$  秒, 速度为 2 个单位长度每秒, 从而确定  $BC=2 \times 2=4$ ; 根据面积为 12, 得到  $\frac{1}{2}DA \cdot AB = 12$  计算  $AB$  即可.

(2) 当  $a \leq x \leq 5$  时, 列式  $\frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times (5-a) = 4$ , 当  $x < a$  时, 列式  $\frac{1}{2} \times 4 \times m \times 4 = 8$ , 当  $7 < x < b$  时, 列式  $\frac{1}{2} \times 4 \times [6 - (b-7) \times 2] = 4$  计算即可.

(3) 分  $0 < t \leq 1, 1 < t \leq 2, 2 < t \leq 3, 3 < t \leq 4$ , 四种情况计算即可.

【详解】(1) 当  $5 \leq x \leq 7$  时, 三角形面积不变,

$\therefore$  点  $M$  在  $BC$  上运动, 运动时间为  $7-5=2$  秒, 速度为 2 个单位长度每秒,

$\therefore BC=2 \times 2=4$ ;

$\therefore$  面积为 12,

$$\therefore \frac{1}{2}DA \cdot AB = 12,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times AB = 12,$$

解得  $AB=6$ ,

故答案为: 4, 6.

(2) 当  $a \leq x \leq 5$  时, 三角形面积为  $12-8=4$ , 运动时间为  $(5-a)$  秒, 速度为 2 个单位长度每秒, 从而确定运动路程为  $(5-a) \times 2$ ;

$$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times (5-a) = 4,$$

解得  $a=4$ ;

当  $x < a$  时, 根据题意, 得

$$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times m \times 4 = 8,$$

解得  $m=1$ ;

当  $7 < x < b$  时, 根据题意, 得  $M$  在  $BC$  上运动, 三角形面积为 4, 运动时间为  $(b-7)$  秒, 速度为 2 个单位长度每秒, 从而确定运动路程为  $(b-7) \times 2$ ;

$$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times [6 - (b-7) \times 2] = 4,$$

解得  $b=9$ .

(3) 当  $0 < t \leq 1$  时,  $AM = \frac{2}{3}AB = 4$  时, 点  $M$  在  $AB$  上, 点  $N$  在  $BC$  上,  $AM = 4 + 2t$ ,  $BN = t$ ,

此时  $y = \frac{1}{2} \times (4 + 2t) \times t = t^2 + 2t$ ;

当  $1 < t \leq 2$  时, 点  $M$  在  $BC$  上, 点  $N$  在  $BC$  上,  $BM = 2t - 2$ ,  $BN = t$ ,  $MN = t - 2t + 2 = 2 - t$ , 且  $M$  在  $N$  后面, 此时  $y = \frac{1}{2} \times (2 - t) \times 6 = 6 - 3t$ ;

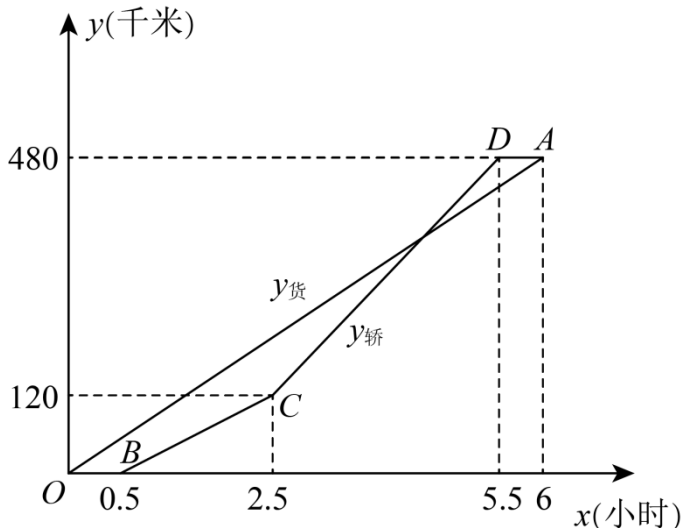
当  $2 < t \leq 3$  时, 点  $M$  在  $BC$  上, 点  $N$  在  $BC$  上,  $BM = 2t - 2$ ,  $BN = t$ ,  $MN = 2t - 2 - t = t - 2$ , 且  $M$  在  $N$  前面, 此时  $y = \frac{1}{2} \times (t - 2) \times 6 = 3t - 6$ ;

当  $3 < t \leq 4$  时, 点  $M$  在  $DC$  上, 点  $N$  在  $BC$  上,  $CM = 2t - 6$ ,  $DM = 12 - 2t$ ,  $BN = t$ ,  $CN = 4 - t$ , 且  $M$  在  $N$  前面, 此时  $y = \frac{1}{2} \times (4 - t + 4) \times 6 - \frac{1}{2} \times (4 - t) \times (2t - 6) - \frac{1}{2} \times (12 - t) \times 4 = t^2 - 6t + 12$ , 综合的所述, 面积  $y$  与  $t$  的函数关系如下:

$$y = \begin{cases} t^2 + 2t, & 0 < t \leq 1 \\ 6 - 3t, & 1 < t \leq 2 \\ 3t - 6, & 2 < t \leq 3 \\ t^2 - 6t + 12, & 3 < t \leq 4 \end{cases}$$

**【点睛】** 本题考查了矩形上的动点问题, 函数图像信息获取与处理, 正确读取函数信息, 灵活转化, 表示图形的面积是解题的关键.

**例 2.** (2023 下·四川成都·七年级校考期中) 甲、乙两地相距 480 千米, 货车和轿车先后从甲地出发驶向乙地, 其中货车先出发 0.5 小时, 如图, 线段  $OA$  表示货车离甲地的距离  $y_{\text{货}}$  (千米) 与货车行驶时间  $x$  (小时) 之间的图像关系, 折线  $BCD$  表示轿车离甲地的距离  $y_{\text{轿}}$  (千米) 与货车行驶时间  $x$  (小时) 之间的图像关系, 根据图像解答下列问题:



(1) 货车的速度 = 80 千米/小时, 当  $0.5 < x < 2.5$ , 轿车的速度 = 48 千米/小时;

(2) 当轿车追上货车时, 求  $x$  的值;

(3) 在整个行驶过程中, 当两辆车相距 20 千米时, 求  $x$  的值.

【答案】(1) 80,60

(2)  $x = 4.5$

(3)  $x = \frac{1}{4}$  或 4 或 5 或  $\frac{23}{4}$

【分析】(1) 根据“速度=路程÷时间”列式计算即可；

(2) 先求出当  $2.5 < x < 5.5$  时， $y_{\text{轿}}$ 、 $y_{\text{货}}$ （千米）与货车行驶时间  $x$ （小时）之间的函数关系式，再令  $y_{\text{货}} = y_{\text{轿}}$ ，解方程求出  $x$  的值即可；

(3) 分四种情形列出方程即可解决问题。

【详解】(1) 解：货车的速度为： $480 \div 6 = 80$ （千米/小时），

当  $0.5 < x < 2.5$ ，轿车的速度为  $\frac{120}{2.5-0.5} = 60$ （千米/小时），

故答案为：80,60；

(2) 解：由图可知，在  $2.5 < x < 5.5$  时两车相遇；

当  $2.5 < x < 5.5$  时，设  $y_{\text{轿}} = nx + m$ ，

根据题意，得  $\begin{cases} 2.5n + m = 120 \\ 5.5n + m = 480 \end{cases}$ ，

解得  $\begin{cases} n = 120 \\ m = -180 \end{cases}$ ，

所以  $y_{\text{轿}} = 120x - 180 (2.5 < x < 5.5)$ ，

由题意知， $y_{\text{货}} = 80x (0 \leq x \leq 6)$ ，

$\therefore$  令  $y_{\text{货}} = y_{\text{轿}}$ ，得  $120x - 180 = 80x$ ，解得  $x = 4.5$ ，

即  $x = 4.5\text{h}$  时轿车追上货车；

(3) 解： $\because$  货车的速度为 80 千米/小时，

$\therefore 20 \div 80 = \frac{1}{4}$ （小时），

$\therefore$  当货车行驶  $\frac{1}{4}$  小时时，两车相距 20 千米；

当轿车在货车后 20 千米时， $80x - (120x - 180) = 20$ ，

解得  $x = 4$ ；

当轿车在货车前 20 千米时， $(120x - 180) - 80x = 20$ ，

解得  $x = 5$ ；

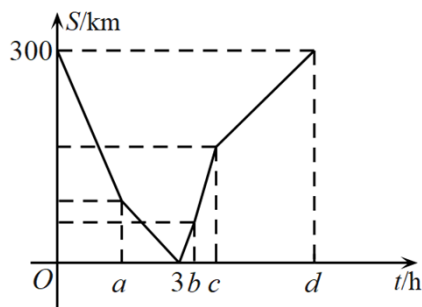
当轿车到达终点，货车离终点 20 千米时， $80x = 480 - 20$ ，

解得  $x = \frac{23}{4}$ 。

$\therefore$  两车在行驶过程中，当两辆车相距 20 千米时， $x = \frac{1}{4}$  或 4 或 5 或  $\frac{23}{4}$ 。

**【点睛】** 本题考查了一次函数的应用，对一次函数图象的意义的理解，待定系数法求一次函数的解析式的运用，行程问题中路程=速度 $\times$ 时间的运用，本题有一定难度，其中求出货车与轿车的速度是解题的关键。

**【变式训练 1】** (2023 下·四川成都·七年级校考期中) 现有一笔直的公路连接  $A, B$  两地，甲车从  $A$  地驶往  $B$  地，速度为  $60\text{km/h}$ ，同时乙车从  $B$  地驶往  $A$  地，速度为  $80\text{km/h}$ 。途中甲车发生故障，于是停车修理了 2.5 小时，修好后立即开车驶往  $B$  地。设甲车行驶的时间为  $t(\text{h})$ ，两车之间的距离为  $S(\text{km})$ 。已知  $S$  与  $t$  的图象如图所示。



(1)  $A, B$  两地相距 \_\_\_\_\_ km,  $c =$  \_\_\_\_\_,  $d =$  \_\_\_\_\_.

(2) 甲车出发几小时后发生故障?

(3) 何时甲乙两车相距  $40\text{km}$ ?

**【答案】** (1) 300; 3.75; 7.5

(2) 1 小时

(3)  $t = 2.5$  或  $t = 3.5$  时

**【分析】** (1) 由图象可得  $A, B$  两地的距离，点  $a$  表示甲车出现故障，点  $b$  表示两车相遇，点  $c$  表示甲车修好故障，点  $d$  表示乙车到达目的地即可求解；

(2) 设甲车出发  $x$  小时后发生故障，根据题意建立等式即可求解；

(3) 分相遇前和相遇后相距  $40\text{km}$  两种情况进行分类讨论。

**【详解】** (1) 解：由图象可得  $A, B$  两地的距离为  $300\text{km}$ ，

当  $t = 3$  时， $S = 0$ ，两车相遇，

此时乙车行驶的路程是  $80 \times 3 = 240\text{km}$ ，甲车行驶的路程是  $300 - 240 = 60\text{km}$ ，

$\therefore a = 60 \div 60 = 1\text{h}$ ，

又 $\because$ 甲车停车修理了 2.5 小时，

$\therefore b = 1 + 2.5 = 3.5\text{h}$ ，

$\because c$  表示乙车到达目的地的时间，

$\therefore c = 300 \div 80 = 3.75\text{h}$ ，

$\because d$  表示甲车到达目的地，

$$\therefore d = 300 \div 60 + 2.5 = 7.5\text{h},$$

故答案为：300；3.75；7.5；

(2) 由 (1) 得  $a = 60 \div 60 = 1\text{h}$ ,

答：甲车出发 1 小时后发生故障；

(3) 当  $a = 1$  时， $S = 300 - 60 - 80 = 160\text{km}$ ,

当  $b = 3.5$  时， $S = 80 \times (3.5 - 3) = 40\text{km}$ ,

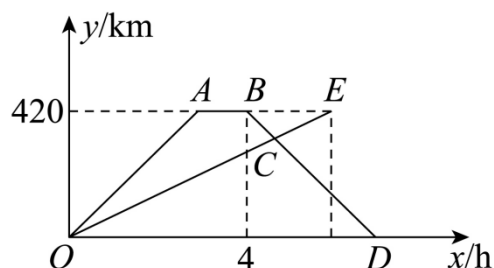
$\therefore$  两车相遇前， $t = (160 - 40) \div 80 + 1 = 2.5$ ,

两车相遇后，由图象可知  $t = 3.5$ ,

答： $t = 2.5$  或  $t = 3.5$  时甲乙两车相距 40km.

**【点睛】** 本题考查了一次函数的图象和应用，解题的关键是利用路程，时间，速度之间的关系并理解图象上拐点的意义.

**【变式训练 2】** (2023 下·四川成都·七年级成都外国语学校校考期中) 快车与慢车分别从甲乙两地同时相向出发，匀速而行，快车到达乙地后停留 1h，然后按原路原速返回，快车比慢车晚 1h 到达甲地，快慢两车距各自出发地的路程  $y(\text{km})$  与所用的时间  $x(\text{h})$  的关系如图所示.



(1) 甲乙两地之间的距离为 \_\_\_\_\_ km，快车的速度为 \_\_\_\_\_ km/h，慢车的速度为 \_\_\_\_\_ km/h；

(2) 出发 \_\_\_\_\_ h，快慢两车距各自出发地的路程相等；

(3) 快慢两车出发 \_\_\_\_\_ h 相距 150km.

**【答案】** (1) 420, 140, 70; (2)  $\frac{14}{3}$ ; (3)  $\frac{9}{7}$  或  $\frac{19}{7}$  或  $\frac{41}{7}$

**【分析】** (1) 根据函数图象中的数据，可以解答本题；

(2) 根据题意和函数图象中的数据，可以计算出出发几 h 后，快慢两车距各自出发地的路程相等；

(3) 根据题意，利用分类讨论的方法，可以求得出发几 h 快慢两车相距 150km.

**【详解】** (1) 解：由图象可得，

甲乙两地之间的路程为 420km；

快车的速度为  $420 \div (4 - 1) = 140$  (km/h)；

慢车的速度为  $420 \div [4 + (4 - 1) - 1] = 70$  (km/h)，

故答案为：420，140，70；

(2) 解：由图象和 (1) 可得，A 点坐标为 (3, 420)，B 点坐标为 (4, 420)，

由图可知：快车返程时，两车距各自出发地的路程相等，

设出发  $x$ h，两车距各自出发地的路程相等，

$$70x = 2 \times 420 - 140(x-1), \text{ 解得 } x = \frac{14}{3},$$

答：出发  $\frac{14}{3}$ h 后，快慢两车距各自出发地的路程相等；故答案为： $\frac{14}{3}$ ；

(3) 解：由题意可得，第一种情形：没有相遇前，相距 150km，

$$\text{则 } 140x + 70x + 150 = 420, \text{ 解得 } x = \frac{9}{7},$$

第二种情形：相遇后而快车没到乙地前，相距 150km， $140x + 70x - 420 = 150$ ，解得  $x = \frac{19}{7}$ ，

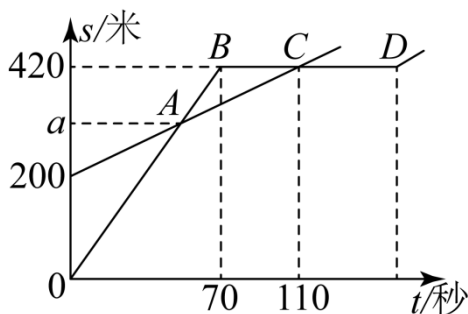
第三种情形：快车从乙往甲返回，相距 150km， $70x - 140(x-4) = 150$ ，解得  $x = \frac{41}{7}$ ，

由上可得，出发  $\frac{9}{7}$ h 或  $\frac{19}{7}$ h 或  $\frac{41}{7}$ h 快慢两车相距 150km.

故答案为： $\frac{9}{7}$  或  $\frac{19}{7}$  或  $\frac{41}{7}$ .

【点睛】本题考查一次函数的应用，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

【变式训练 3】. 小明和妈妈一起在一条笔直的跑道上锻炼身体，到达起点后小明做了一会准备活动，妈妈先跑. 当小明出发时，妈妈已经距离起点 200 米. 他们距起点的距离  $s$  (米) 与小明出发的时间  $t$  (秒) 之间的关系如图所示，根据图中给出的信息解答下列问题：



(1) 小明出发之后，前 70 秒的速度是\_\_\_\_\_米/秒；妈妈的速度是\_\_\_\_\_米/秒；

(2)  $a$  表示的数字是\_\_\_\_\_；

(3) 直接写出小明出发后的 110 秒内，两人何时相距 60 米.

【答案】(1) 6, 2

(2) 小明和妈妈相遇时距起点的距离

(3) 小明出发后的 110 秒内，两人分别于 35 秒、65 秒和 80 秒时相距 60 米

【分析】(1) 小明在前 70 秒内跑过的距离除以所用时间即可；而妈妈的速度始终不变，在 110 秒内跑过的距离除以所用时间即可；

(2) 两图象的交点处表示两人相遇。因此， $a$  表示的数字是小明和妈妈相遇时距离起点的距离；

(3) 两人有可能三次相距 60 米，分别在第一次相遇前、第一次相遇后且  $t \leq 70$ 、 $70 \leq t \leq 110$  时，分别讨论计算即可。

【详解】(1) 解：由图象可知，小明在前 70 秒内跑过的距离是 420 米，

$\therefore$  小明前 70 秒的速度是  $420 \div 70 = 6$  (米/秒)。

妈妈的速度始终不变，在 110 秒内跑过的距离是  $420 - 200 = 220$  (米)，

$\therefore$  妈妈的速度是  $220 \div 110 = 2$  (米/秒)。

故答案为：6，2。

(2) 解：两图象的交点处表示两人相遇，

$\therefore a$  表示的数字是小明和妈妈相遇时距起点的距离。

故答案为：小明和妈妈相遇时距起点的距离。

(3) 解：由题意可知，妈妈距起点的距离  $s_1$  与小明出发的时间  $t$  之间的关系式为

$$s_1 = 2t + 200.$$

当  $0 \leq t \leq 70$  时，设小明距起点的距离  $s_2$  与小明出发的时间  $t$  之间的关系式为  $s_2 = 6t$ 。

① 在第一次相遇前，当两人第一次相距 60 米时，得

$$2t + 200 - 6t = 60, \text{ 解得 } t = 35;$$

② 在第一次相遇后且  $t \leq 70$ ，当两人第二次相距 60 米时，得

$$6t - (2t + 200) = 60, \text{ 解得 } t = 65.$$

③ 当  $70 \leq t \leq 110$  时，两人第三次相距 60 米时，得

$$420 - (2t + 200) = 60, \text{ 解得 } t = 80.$$

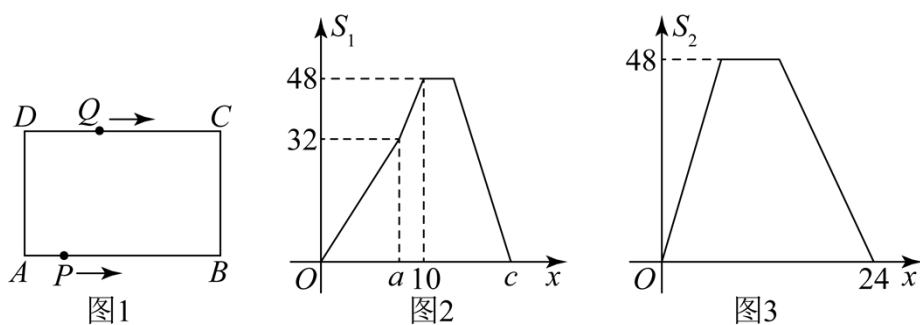
综上，小明出发后的 110 秒内，两人分别于 35 秒、65 秒和 80 秒时相距 60 米。

【点睛】本题考查用关系式表示变量间的关系、用图象表示变量间的关系、一元一次方程的应用，从图象上获取有用的信息是解答本题的关键。

## 类型二、几何图形面积问题

例。(2023 下·四川成都·七年级校考期中) 如图 (1)，在长方形  $ABCD$  中， $AB = 12\text{cm}$ ， $BC = 8\text{cm}$ ，点  $P$  从  $A$  出发，沿  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$  路线运动，到  $D$  停止；点  $Q$  从  $D$  出发，沿  $D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$  路线运动，到  $A$  停止。若点  $P$ 、点  $Q$  同时出发，点  $P$  速度为  $1\text{cm/s}$ ，点  $Q$  的速度为  $2\text{cm/s}$ ， $a$  秒时点  $P$ 、点  $Q$  同时改变速度，点  $P$  速度变为  $b\text{cm/s}$ ，点  $Q$  速度变为  $d\text{cm/s}$ 。图 (2) 是点  $P$  出发  $x$  秒后  $\triangle APD$  的面积  $S_1 (\text{cm}^2)$  与  $x$  秒的关系图象；图 (3

是点  $Q$  出发  $x$  秒后  $\triangle VAQD$  的面积  $S_2$  ( $\text{cm}^2$ ) 与  $x$  秒的关系图象.



根据题中的信息, 解答下列问题

- (1) 根据图象得:  $a =$  \_秒,  $b =$  \_cm/s,  $c =$  \_秒,  $d =$  \_cm/s.
- (2) 连接  $PQ$ , 当  $PQ$  第一次平分长方形  $ABCD$  的面积时, 求  $x$  的值;
- (3) 当点  $P$ 、点  $Q$  在运动路线上相距的路程为  $29\text{cm}$  时, 求  $x$  的值.

**【答案】** (1) 8; 2; 20; 1

(2)  $x = 4$

(3)  $x$  的值 1 或 21

**【分析】** (1) 根据题意和  $S_{\triangle APD}$ , 求出  $a$ ,  $b$ ,  $c$  的值; 由题意列出关于  $d$  的方程, 从而解出  $d$ ;

(2) 由  $PQ$  平分矩形  $ABCD$  面积, 得到梯形  $BCQP$  面积为矩形  $ABCD$  面积的一半, 列出方程, 可求  $x$  的值;

(3) 分两种情况讨论, 列出方程可求解.

**【详解】** (1) 观察图②得  $S_{\triangle APD} = \frac{1}{2} PA \cdot AD = \frac{1}{2} \times a \times 8 = 32$ ,

$$\therefore a = 8,$$

$$\therefore b = \frac{12 - 8 \times 1}{10 - 8} = 2 (\text{cm/s}),$$

$$c = 10 + \frac{12 + 8}{2} = 20 (\text{s}),$$

$$\text{由题意可得: } (24 - 8)d = 12 \times 2 + 8 - 2 \times 8,$$

$$\text{解得: } d = 1,$$

故答案为: 8; 2; 20; 1;

$$(2) \text{ 由题意可得: } \frac{(2x + x) \times 8}{2} = \frac{1}{2} \times 12 \times 8,$$

$$\text{解得: } x = 4,$$

$\therefore$  当  $x = 4$  时,  $PQ$  第一次平分长方形  $ABCD$  的面积;

$$(3) \text{ 当点 } Q \text{ 在 } DC \text{ 上时, 由题意可得: } 12 + 8 + 12 - 3x = 29,$$

$$\text{解得: } x = 1,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/545221344042012010>