

归纳思想在两种题型中的应用

压轴题密押

通用的解题思路：

解决这类问题的基本思路是观察—归纳—猜想—证明（验证），具体做法是：①认真观察所给的一组数、式、图等，发现它们之间的关系；②分析概括所给数式图的特征，归纳它们的共性和蕴含的变化规律，猜想得出一个一般性的结论；③结合问题所给的材料验证证明或验证结论的正确性。

压轴题预测

题型一：数式规律中的猜想归纳思想

题目 1 (2024·马鞍山一模) 观察以下等式：

$$\text{第1个等式：} 1 \times \frac{1+3}{2} - \frac{2}{2} = 1,$$

$$\text{第2个等式：} \frac{1}{2} \times \frac{4+6}{3} - \frac{2}{3} = 1,$$

$$\text{第3个等式：} \frac{1}{3} \times \frac{9+9}{4} - \frac{2}{4} = 1,$$

$$\text{第4个等式：} \frac{1}{4} \times \frac{16+12}{5} - \frac{2}{5} = 1,$$

.....

按照以上规律，解决下列问题：

(1) 写出第5个等式： $\frac{1}{5} \times \frac{25+15}{6} - \frac{2}{6} = 1$ ；

(2) 写出你猜想的第 n 个等式： _____ (用含 n 的等式表示)，并证明。

题目 2 (2024·包河区一模) 观察下列等式：

$$a_1 = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{1 \times 3};$$

$$a_2 = \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2 \times 4};$$

$$a_3 = \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{4} = \frac{4}{3 \times 5};$$

...

(1) 猜想并写出第6个等式 $a_6 = \frac{1}{6 \times 7 \times 8} + \frac{1}{7} = \frac{7}{6 \times 8}$ _____；

(2) 猜想并写出第 n 个等式 $a_n =$ _____；

(3) 证明(2)中你猜想的正确性。

题目 3 (2024·嘉善县一模) 观察下面的等式： $\sqrt{1+\frac{1}{3}} = 2\sqrt{\frac{1}{3}}$ ， $\sqrt{2+\frac{1}{4}} = 3\sqrt{\frac{1}{4}}$ ， $\sqrt{3+\frac{1}{5}} = 4\sqrt{\frac{1}{5}}$ ，

$$\sqrt{4+\frac{1}{6}} = 5\sqrt{\frac{1}{6}}, \dots$$

(1) 写出 $\sqrt{2023+\frac{1}{2025}}$ 的结果；

(2) 按照上面的规律归纳出一个一般的结论；(用含 n 的等式表示， n 为正整数)

(3) 试运用相关知识,推理说明你所得到的结论是正确的.

题目 4 (2024·新乐市一模) 每个人都拥有一个快乐数字,我们把自己出生的年份减去组成这个年份的数字之和,所得的差就是我们自己的快乐数字. 比如我国著名的数学家华罗庚出生于 1910 年,他的快乐数字是 $1910 - (1 + 9 + 1 + 0) = 1899$.

(1) 某人出生于 1949 年,他的快乐数字是 _____;

(2) 你再举几个例子并观察,这些快乐数字都能被 _____ 整除,请你用所学知识说明你的猜想.

(3) 请你重新对快乐数字定义,并写出一个你找到的规律(直接写出结果,不用证明).

题目 5 (2024·长安区一模) 某班数学小组在研究个位数字为 5 的两位数的平方的规律时,得到了下列等式:

第 1 个等式: $15^2 = 15 \times 15 = 225 = (1 \times 2) \times 100 + 25$;

第 2 个等式: $25^2 = 25 \times 25 = 625 = (2 \times 3) \times 100 + 25$;

第 3 个等式: $35^2 = 35 \times 35 = 1225 = (3 \times 4) \times 100 + 25$;

...

按照以上规律,解决下列问题:

(1) 填空: $75^2 = 75 \times 75 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 已知 $1 \leq x \leq 9$ 且 n 为整数,猜想第 n 个等式(用含 n 的等式表示),并证明.

题目 6 (2024·庐江县一模) 观察下列等式:

第 1 个等式: $\frac{3}{1} - \frac{2}{3} = \frac{3^2+1^2}{3} + a$;

第 2 个等式: $\frac{4}{2} - \frac{2}{4} = \frac{4^2+2^2}{8} + a$;

第 3 个等式: $\frac{5}{3} - \frac{2}{5} = \frac{5^2+3^2}{15} + a$;

第 4 个等式: $\frac{6}{4} - \frac{2}{6} = \frac{6^2+4^2}{24} + a$;

...

按照以上规律,解决下列问题:

(1) 各等式都成立时, $a = \underline{\hspace{1cm}} - 1 \underline{\hspace{1cm}}$;

(2) 在 (1) 的条件下,写出你猜想的第 n 个等式(用含 n 的式子表示),并证明.

题目 7 (2023·利辛县模拟) 观察下列等式:

第①个等式: $1^2+2^2=3^2-2^2$,

第②个等式: $2^2+3^2=7^2-6^2$,

第③个等式: $3^2+4^2=13^2-12^2$,

第④个等式: $4^2+5^2=21^2-20^2$,

...

根据上述规律解决下列问题:

(1) 写出第⑤个等式;

(2) 写出你猜想的第 n 个等式(用含 n 的式子表示),并证明.

题目 8 (2023·全椒县三模) 观察下列等式:

第 1 个等式: $\frac{2^2}{1} - 1 - 2 = 1$;

第 2 个等式: $\frac{3^2}{2} - 2 - 2 = \frac{1}{2}$;

第3个等式: $\frac{4^2}{3} - 3 - 2 = \frac{1}{3}$;

第4个等式: $\frac{5^2}{4} - 4 - 2 = \frac{1}{4}$;

第5个等式: $\frac{6^2}{5} - 5 - 2 = \frac{1}{5}$;

…;

按照以上规律,解决下列问题

(1) 写出第6个等式: $\frac{7^2}{6} - 6 - 2 = \frac{1}{6}$;

(2) 写出你猜想的第 n 个等式 (用含 n 的式子表示), 并验证其正确性.

题目 9 (2023·夏邑县校级三模) 设 $\overline{a5}$ 是一个两位数, 其中 a 是十位上的数字 ($1 \leq a \leq 9$). 例如: 当 $a = 4$ 时, $\overline{a5}$ 表示的两位数是 45.

(1) 尝试:

① 当 $a = 1$ 时, $15^2 = 225 = 1 \times 2 \times 100 + 25$;

② 当 $a = 2$ 时, $25^2 = 625 = 2 \times 3 \times 100 + 25$;

③ 当 $a = 3$ 时, $35^2 = 1225 = 3 \times 4 \times 100 + 25$;

④ 当 $a = 4$ 时, $45^2 = 2025 = \underline{\quad} 4 \times 5 \times 100 + 25 \underline{\quad}$.

(2) 归纳: $\overline{a5}^2$ 与 $100a(a+1) + 25$ 有怎样的大小关系? 试说明理由.

(3) 运用: 若 $\overline{a5}^2$ 与 $100a$ 的和为 6325, 求 a 的值.

题目 10 (2023·凤台县校级三模) 观察等式:

第1个等式: $\frac{3}{2 \times 4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \times 3 \times 4}$;

第2个等式: $\frac{4}{3 \times 5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \times 4 \times 5}$;

第3个等式: $\frac{5}{4 \times 6} - \frac{1}{5} = \frac{1}{4 \times 5 \times 6}$;

…

根据以上等式的规律,解答下列问题:

(1) 直接写出第5个等式: $\frac{7}{6 \times 8} - \frac{1}{7} = \frac{1}{6 \times 7 \times 8}$;

(2) 猜想并写出第 n 个等式, 证明你所猜想的正确性.

题目 11 (2023·萧县三模) 观察下列等式: 第1个等式: $1 + 1 - \frac{1}{5} = \frac{3^2}{1 \times 5}$;

第2个等式: $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4^2}{2 \times 6}$;

第3个等式: $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{5^2}{3 \times 7}$;

…

按照以上规律,解决下列问题:

(1) 写出第4个等式: $1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6^2}{4 \times 8}$;

(2) 写出你猜想的第 n 个等式 (用含 n 的等式表示), 并证明.

题目 12 (2023·无为市四模) 观察下列等式:

第1个等式: $\frac{1}{1} - \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$;

第2个等式: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$;

第3个等式: $\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{4}$;

第4个等式: $\frac{1}{4} - \frac{1}{4 \times 5} = \frac{1}{5}$;

.....

按照以上规律,解决下列问题:

(1) 写出第5个等式: $\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \times 6} = \frac{1}{6}$.

(2) 写出你猜想的第 n 个等式(用含 n 的式子表示),并证明.

题目 13 (2023·思明区模拟) “歌唱家在家唱歌”“蜜蜂酿蜂蜜”这两句话从左往右读和从右往左读,结果完全相同. 文学上把这样的现象称为“回文”,数学上也有类似的“回文数”,比如 252, 7887, 34143. 小明在计算两位数减法的过程中意外地发现有些等式从左往右读的结果和从右往左读的结果一样,如: $65 - 38 = 83 - 56$; $91 - 37 = 73 - 19$; $54 - 36 = 63 - 45$. 数学上把这类等式叫做“减法回文等式”.

(1) ①观察以上等式,请你再写出一个“减法回文等式”;

②请归纳“减法回文等式”的被减数 $\overline{ab}$ (十位数字为 a ,个位数字为 b) 与减数 $\overline{cd}$ 应满足的条件,并证明.

(2) 两个两位数相乘,是否也存在“乘法回文等式”? 如果存在,请你直接写出“乘法回文等式”的因数 $\overline{xy}$ 与因数 $\overline{mn}$ 应满足的条件.

题目 14 (2023·武安市三模) 某数学兴趣小组研究如下等式: $38 \times 32 = 1216$, $53 \times 57 = 3021$, $71 \times 79 = 5609$, $84 \times 86 = 7224$. 观察发现以上等式均是“十位数字相同,个位数字之和是 10 的两个两位数相乘,且积有一定的规律”.

(1) 根据上述的运算规律,直接写出结果: $58 \times 52 =$ _____; $75^2 =$ _____;

(2) 设其中一个数的十位数字为 a ,个位数字为 b ($a > 0, b > 0$).

①请用含 a, b 的等式表示这个运算规律,并用所学的数学知识证明;

②上述等式中,分别将左边两个乘数的十位和个位数字调换位置,得到新的两个两位数相乘(如: 38×32 调换为 83×23). 若记新的两个两位数的乘积为 m ,①中的运算结果为 n ,求证: $m - n$ 能被 99 整除.

题目 15 (2024·安徽模拟) 【观察】观察下列式子:

① $1 \times 4 + 2 = 2 \times 3$;

② $2 \times 5 + 2 = 3 \times 4$;

③ $3 \times 6 + 2 = 4 \times 5$;

④ $4 \times 7 + 2 = 5 \times 6$;

【猜想】根据上述式子猜想式子⑤: $6 \times 9 + 2 =$ _____ $\times$ _____;

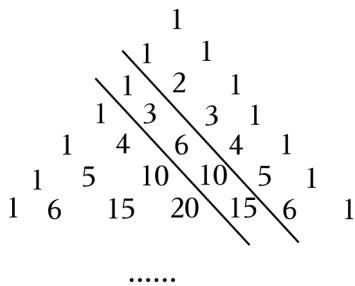
【发现】用含 n 的式子表示出第 n 个式子: _____;

【应用】利用你发现的规律计算: $\frac{2021 \times 2024 + 2}{2022 \times 2025 + 2}$.

题目 16 (2024·芜湖二模) 如图被称为“杨辉三角”或“贾宪三角”. 其规律是:从第 3 行起,每行两端的数都是“1”,其余各数都等于该数“两肩”上的数之和. 图中两平行线之间的一列数: 1, 3, 6, 10, 15, …… ,我们把第 1 个数记为 a_1 ,第 2 个数记为 a_2 ,第 3 个数记为 a_3 , …… ,第 n 个数记为 a_n .

(1) 根据这列数的规律, $a_8 =$ _____, $a_n =$ _____;

(2) 这列数中有 66 这个数吗? 如果有,求 n ;如果没有,请说明理由.



题目 17 (2024·池州二模) 观察下列式子:

第1个等式: $13^2 = 10 \times (10 \times 1 + 6) \times 1 + 9$;

第2个等式: $23^2 = 10 \times (10 \times 2 + 6) \times 2 + 9$;

第3个等式: $33^2 = 10 \times (10 \times 3 + 6) \times 3 + 9$;

.....

(1) 请写出第4个等式: $43^2 = 10 \times (10 \times 4 + 6) \times 4 + 9$;

(2) 设一个两位数表示为 $10a + 3$, 根据上述规律, 请写出 $(10a + 3)^2$ 的一般性规律, 并予以证明.

题目 18 (2024·庐江县校级模拟) 观察下列等式:

第1个等式: $\frac{1}{1} - \frac{1}{1} = \frac{0}{1 \times 1}$;

第2个等式: $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4 \times 3}$;

第3个等式: $\frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{2^2}{9 \times 5}$;

第4个等式: $\frac{1}{7} - \frac{1}{16} = \frac{3^2}{16 \times 7}$;

(1) 请你按照上述等式规律写出第5个等式;

(2) 根据上述等式规律写出第 n 个等式;

(3) 证明(2)中你所写等式的正确性.

题目 19 (2024·沅江市一模) 设 $a_1 = 3^2 - 1^2$, $a_2 = 5^2 - 3^2$, $a_3 = 7^2 - 5^2 \dots$, 容易知道 $a_1 = 8$, $a_2 = 16$, $a_3 = 24$, 如果一个数能表示为8的倍数, 我们就说它能被8整除, 所以 a_1, a_2, a_3 都能被8整除.

(1) 试探究 a_n 是否能被8整除, 并用文字语言表达出你的结论.

(2) 若一个数的算术平方根是一个自然数, 则称这个数是“完全平方数”, 试找出 $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ 这一系列数中从小到大排列的前4个完全平方数, 并说出当 n 满足什么条件时, a_n 为完全平方数.

题目 20 (2023·新华区校级二模) 【发现】如果一个整数的个位数字能被5整除, 那么这个整数就能被5整除.

【验证】如: $\because 345 = 100 \times 3 + 10 \times 4 + 5$,

又 $\because 100$ 和 10 都能被5整除, 5 能被5整除,

$\therefore 100 \times 3 + 10 \times 4 + 5$ 能被5整除,

即: 345 能被5整除.

(1) 请你照着上面的例子验证 343 不能被5整除;

(2) 把一个千位是 a 、百位是 b 、十位是 c 、个位是 d 的四位数记为 $\overline{abcd}$. 请照例说明: 只有 d 等于5或0时, 四位数 $\overline{abcd}$ 才能被5整除.

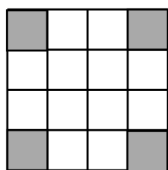
【迁移】(3) 设 $\overline{abc}$ 是一个三位数, 请证明: 当 $a + b + c$ 的和能被3整除时, $\overline{abc}$ 能被3整除.

题型二: 图案规律中的猜想归纳思想

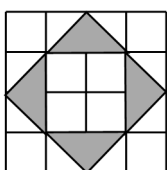
题目 21 (2023·枣庄) (1) 观察分析:在一次数学综合实践活动中,老师向同学们展示了图①,图②,图③三幅图形,请你结合自己所学的知识,观察图中阴影部分构成的图案,写出三个图案都具有的两个共同特征:

_____, _____;

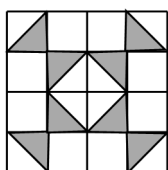
(2) 动手操作:请在图④中设计一个新的图案,使其满足你在(1)中发现的共同特征.



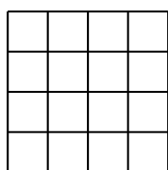
图①



图②

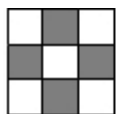


图③



图④

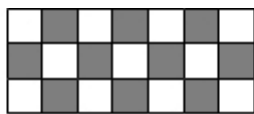
题目 22 (2024·肥西县一模) 用同样规格的黑白两种颜色的正方形,拼如图的方式拼图,请根据图中的信息完成下列问题:



①



②



③

.....

(1) 在图②中用了 _____ 块白色正方形,在图③中用了 _____ 块白色正方形;

(2) 按如图的规律继续铺下去,那么第 n 个图形要用 _____ 块白色正方形;

(3) 如果有足够多的黑色正方形,能不能恰好用完 2024 块白色正方形,拼出具有以上规律的图形? 如果可以请说明它是第几个图形;如果不能,说明你的理由.

题目 23 (2024·镜湖区校级一模) 将一些相同的“☆”按如图所示摆放,观察其规律并回答下列问题:



图1



图2



图3



图4

...

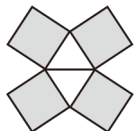
(1) 图6中的“☆”的个数有 _____ 个;

(2) 图 n 中的“☆”的个数有 _____ 个;

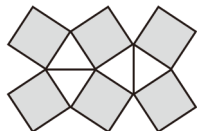
(3) 图 n 中的“☆”的个数可能是 100 个吗;如果能,求出 n 的值;如果不能,试用一元二次方程的相关知识说明理由.

题目 24 (2024·宣城模拟) 【观察思考】

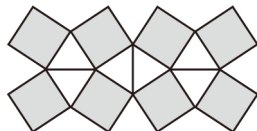
如图,这是由正方形和等边三角形组成的一系列图案,其中第1个图案有4个正方形;第2个图案有6个正方形;第3个图案有8个正方形;...



第 1 个图案



第 2 个图案



第 3 个图案

...

依此规律,请解答下面的问题.

【规律发现】

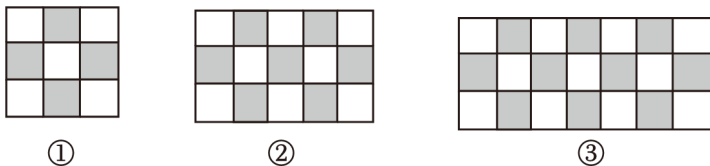
(1) 第5个图案有正方形 _____ 个.

(2) 第 n 个图案有正方形 _____ 个.

【规律应用】

(3) 结合图案中正方形的排列方式, 现有 4050 个正方形, 若干个三角形 (足够多). 依此规律, 是否可以组成第 n 个图案 (正方形一次性用完), 若存在, 请求出 n 的值; 若不存在, 请说明理由.

题目 25 (2024·淄博模拟) 用同样规格的黑白两种颜色的正方形瓷砖, 按如图的方式铺地面:



(1) 观察图形, 填写下表:

图形	①	②	③	...
黑色瓷砖的块数	4	7	10	...
黑白两种瓷砖的总块数	9	15	_____	...

(2) 依上推测, 第 n 个图形中黑色瓷砖的块数为 _____, 黑白两种瓷砖的总块数为 _____ (用含 n 的代数式表示);

(3) 白色瓷砖与黑色瓷砖的总块数可能是 2024 块吗? 若能, 求出是第几个图形; 若不能, 请说明理由.

题目 26 (2024·蜀山区模拟) 某公园中的一条小路使用六边形、正方形、三角形三种地砖按照如图方式铺设.

图 1 为有 1 块六边形地砖时, 正方形地砖有 6 块, 三角形地砖有 6 块; 图 2 为有 2 块六边形地砖时, 正方形地砖有 11 块, 三角形地砖有 10 块; ...

(1) 按照规律, 每增加一块六边形地砖, 正方形地砖会增加 _____ 块, 三角形地砖会增加 _____ 块;

(2) 若铺设这条小路共用去 a 块六边形地砖, 分别用含 a 的代数式表示正方形地砖、三角形地砖的数量;

(3) 当 $a = 25$ 时, 求此时正方形地砖和三角形地砖的总数量.

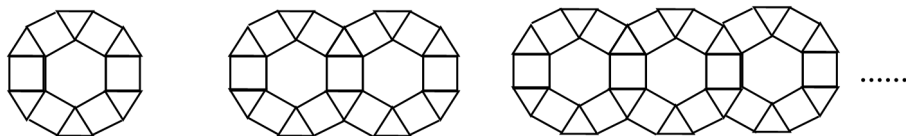
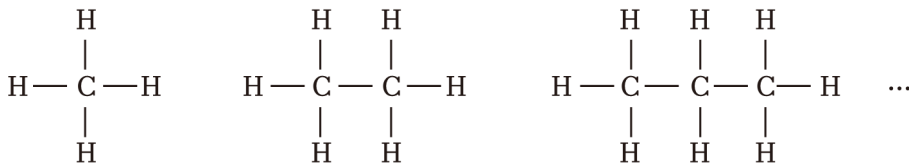


图1

图2

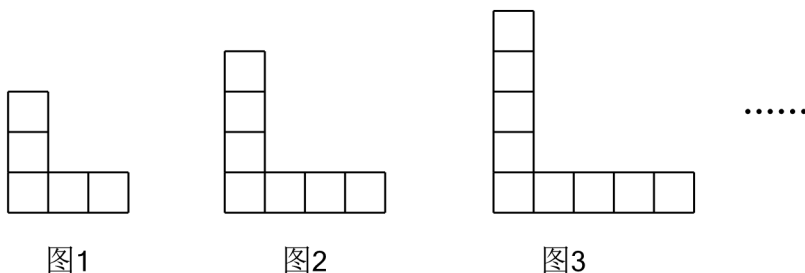
图3

题目 27 (2024·瑶海区校级模拟) 将字母“C”, “H”按照如图所示的规律摆放, 其中第 1 个图形中有 1 个字母 C, 有 4 个字母 H; 第 2 个图形中有 2 个字母 C, 有 6 个字母 H; 第 3 个图形中有 3 个字母 C, 有 8 个字母 H; ... 根据此规律解答下面的问题:



- (1) 第 4 个图形中有 _____ 个字母 C, 有 _____ 个字母 H;
- (2) 第 n 个图形中有 _____ 个字母 C, 有 _____ 个字母 H (用含 n 的式子表示);
- (3) 第 2024 个图形中有 _____ 个字母 C, 有 _____ 个字母 H.

题目 28 (2024·蚌埠模拟)【观察思考】



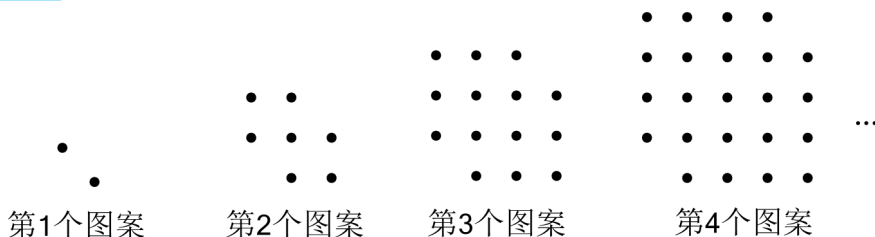
【规律发现】

(1) 若图1中小正方形个数记作 a_1 , 图2中小正方形个数记作 a_2 , ..., 图 n 中小正方形个数记作 a_n , 则 $a_n = \underline{2n+3}$, $a_1+a_2+\dots+a_n = \underline{\hspace{2cm}}$; (用含 n 的式子表示)

【规律应用】

(2) 结合上述规律, 试说明是否存在正整数 n , 使得 $a_1+a_2+\dots+a_n$ 等于 a_n 的4倍?

题目 29 (2024·蜀山区一模) 用同样大小的黑色棋子按如图所示的规律摆放:



(1) 第5个图案有 25 颗黑色棋子, 第 n 个图案中黑色棋子的颗数为 n^2 ;

(2) 据此规律用 2024 颗黑色棋子, 是否能摆放成一个图案, 如果能, 是第几个图案? 如果不能, 请说明理由.

题目 30 (2024·长丰县一模) 如图, 第1个图案中“○”的个数为 1×2 , “●”的个数为 $\frac{2 \times 3}{2}$;

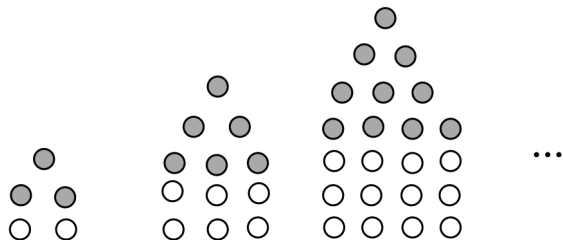
第2个图案中“○”的个数为 2×3 , “●”的个数为 $\frac{3 \times 4}{2}$;

第3个图案中“○”的个数为 3×4 , “●”的个数为 $\frac{4 \times 5}{2}$;

...

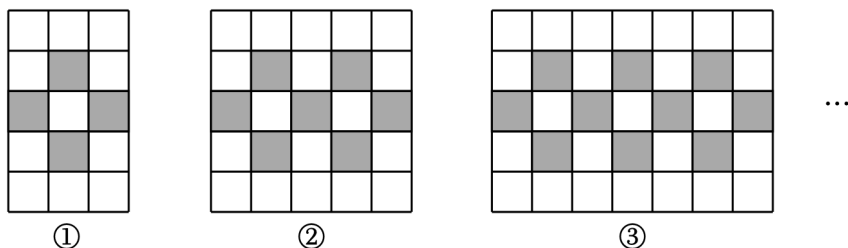
(1) 在第 n 个图案中, “○”的个数为 $n(n+1)$, “●”的个数为 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. (用含 n 的式子表示)

(2) 根据图案中“●”和“○”的排列方式及上述规律, 求正整数 n , 使得第 n 个图案中“●”的个数是“○”的个数的 $\frac{2}{3}$.



第1个图案 第2个图案 第3个图案

题目 31 (2024·阜阳一模)【观察思考】



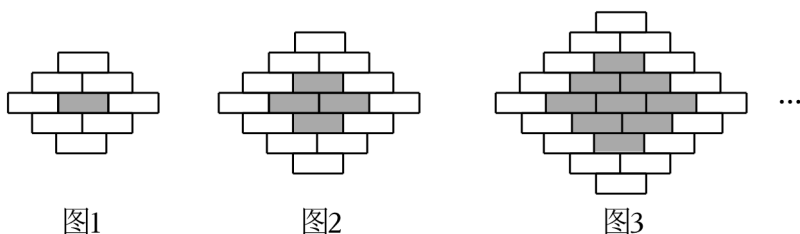
【规律发现】

- (1) 第4个图案中黑色方块的个数为 _____, 黑、白两种方块的总个数为 _____.
- (2) 第 n 个图案中黑色方块的个数为 _____, 黑、白两种方块的总个数为 _____.(用含 n 的代数式表示)

【规律应用】

- (3) 白色方块的个数可能比黑色方块的个数多2024吗? 若能, 求出是第几个图案; 若不能, 请说明理由.

题目 32 (2024·安徽模拟) 【观察思考】下列是由空白长方形和阴影长方形构成的图案:



【规律发现】请用含 n 的式子填空:

- 图1中有 1^2 块阴影长方形, 空白长方形有 $3 \times 2 + 1 \times 2 = 8$ (块);
- 图2中有 2^2 块阴影长方形, 空白长方形有 $4 \times 2 + 2 \times 2 = 12$ (块);
- 图3中有 3^2 块阴影长方形, 空白长方形有 $5 \times 2 + 3 \times 2 = 16$ (块);
- ...

- (1) 图 n 中有 $\underline{\quad n^2 \quad}$ 块阴影长方形, 空白长方形有 $\underline{\quad \quad} = \underline{\quad \quad}$ (块);

【规律应用】

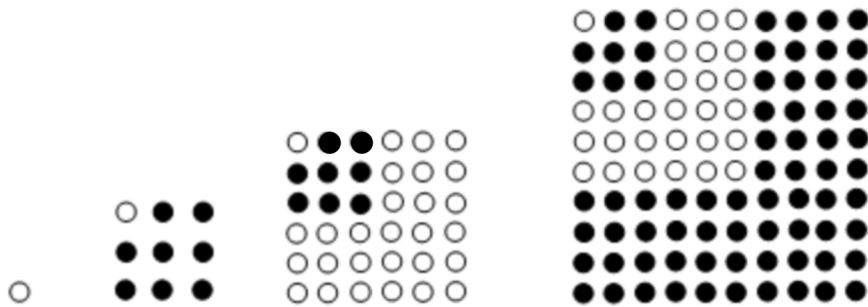
- (2) 在图 n 中, 是否存在空白长方形的块数恰好比阴影长方形块数少8块? 若存在, 通过计算求出 n 的值; 若不存在, 请说明理由.

题目 33 (2023·芜湖三模) 观察与思考: 我们知道 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, 那么 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ 结果

等于多少呢?

请你仔细观察, 找出下面图形与算式的关系, 解决下列问题: ?

- (1) 尝试: 第5个图形可以表示的等式是 $\underline{\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 15^2 \quad}$;
- (2) 概括: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \underline{\quad \quad}$;
- (3) 拓展应用: 求 $\frac{1^3 + 2^3 + \cdots + 2023^3}{1 + 2 + 3 + \cdots + 2023}$ 的值.



$$1^3 = 1^2 \quad 1^3 + 2^3 = 3^2 \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2 \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

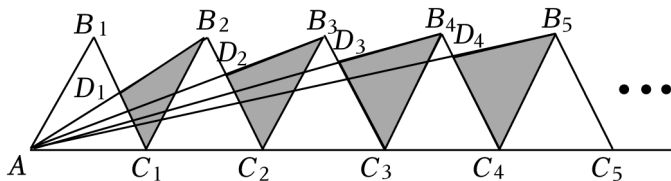
题目 34 (2023·青岛二模) 如图, $(n+1)$ 个边长为 2 的等边三角形有一条边在同一直线上, 设 $\triangle B_2D_1C_1$ 的面积为 S_1 , $\triangle B_3D_2C_2$ 的面积为 S_2 , $\dots$, $\triangle B_{n+1}D_nC_n$ 的面积为 S_n .

【规律探究】:

探究一	探究二	探究三
$\because \triangle B_1B_2D_1 \sim \triangle C_1AD_1$, $\therefore B_1D_1:D_1C_1 = 1:1$, $\therefore S_1 = \underline{\hspace{2cm}}$.	$\because B_2B_3:AC_2 = 1:2$, $\therefore B_2D_2:D_2C_2 = 1:2$, $\therefore S_2 = \underline{\hspace{2cm}}, S_1 = \underline{\hspace{2cm}}$.	$\because B_3B_4:AC_3 = 1:3$, $\therefore B_3D_3:D_3C_3 = 1:3$, $\therefore S_3 = \underline{\hspace{2cm}}, S_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【结论归纳】

$S_n = \underline{\hspace{2cm}}$. (用含 n 的式子表示)



题目 35 (2023·定远县二模) 丰艳花卉市场将深色和浅色两种花卉摆成如图所示的排列图案, 第 1 个图案需要 5 盆花卉, 第 2 个图案需要 13 盆花卉, 第 3 个图案需要 25 盆花卉, 以此类推.

?? 按照以上规律, 解决下列问题:

- (1) 第 4 个图案需要花卉 盆;
- (2) 第 n 个图案需要花卉 盆 (用含 n 的代数式表示);
- (3) 已知丰艳花卉市场春节期间所摆的花卉图案中深色花卉比浅色花卉多 101 盆, 求该花卉图案中深色花卉的盆数.

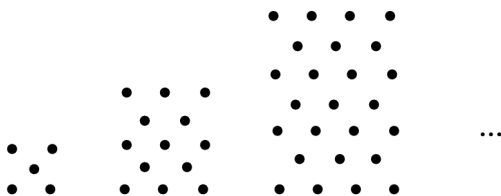


图1

图2

图3

题目 36 (2023·定远县校级一模) 用同样大小的两种不同颜色 (白色、灰色) 的正方形纸片, 按如图方式拼成长方形.

[观察思考]

第 (1) 个图形中有 $2 = 1 \times 2$ 张正方形纸片;

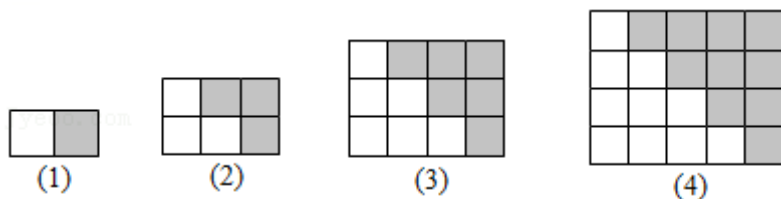
第(2)个图形中有 $2 \times (1 + 2) = 6 = 2 \times 3$ 张正方形纸片；

第(3)个图形中有 $2 \times (1 + 2 + 3) = 12 = 3 \times 4$ 张正方形纸片；

第(4)个图形中有 $2 \times (1 + 2 + 3 + 4) = 20 = 4 \times 5$ 张正方形纸片；

.....

以此类推



[规律总结]

(1) 第(5)个图形中有 _____ 张正方形纸片(直接写出结果)；

(2) 根据上面的发现我们可以猜想： $1 + 2 + 3 + \dots + n =$ _____；(用含 n 的代数式表示)

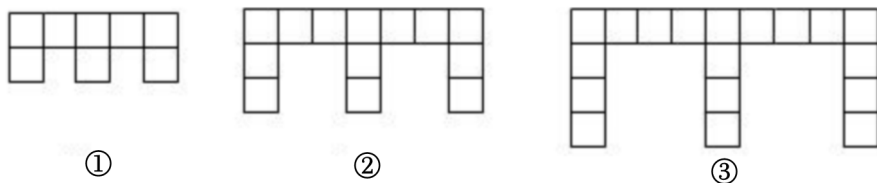
[问题解决]

(3) 根据你的发现计算： $101 + 102 + 103 + \dots + 200$.

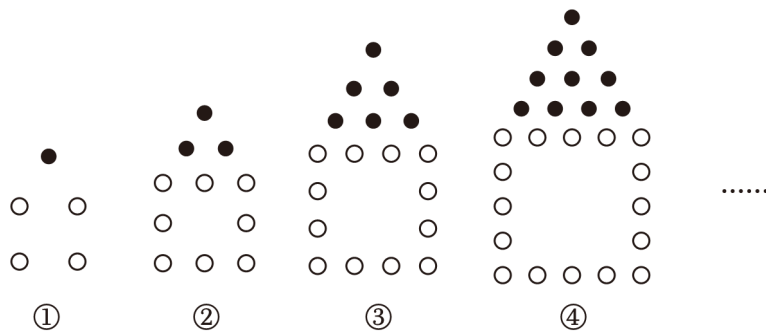
题目 37 (2024·宣城一模) 如图所示的图形是由边长为1的正方形按照某种规律排列而组成的,如图①,正方形的个数为8,周长为18.

(1) 推测第4个图形中,正方形的个数为 _____,周长为 _____;

(2) 推测第 n 个图形中,正方形的个数为 _____,周长为 _____;(都用含 n 的代数式表示).



题目 38 (2024·安徽二模) 【观察思考】如图,是某同学在棋盘上用围棋摆成的图案.



【规律发现】

(1) 第⑤个图案中“●”的个数为 _____,“○”的个数为 _____;

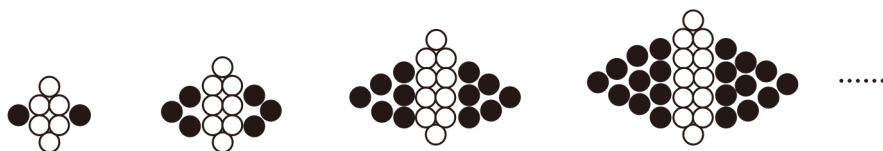
(2) 第 n 个图案中“●”的个数为 _____,“○”的个数为 _____;

【规律应用】

(3) 该同学准备用100枚“●”棋子和100枚“○”棋子摆放第 n 个图案,摆放成完整的图案后,写出 n 的最大值为 _____;此时还剩下 _____ 枚棋子.

题目 39 (2024·合肥模拟) 【观察思考】

如图,春节期间,广场上用红梅花(黑色圆点)和黄梅花(白色圆点)组成“中国结”图案.



第 1 个图案 第 2 个图案 第 3 个图案 第 4 个图案

【规律总结】

请用含 n 的式子填空：

(1) 第 n 个图案中黄梅花的盆数为 $2n + 4$ ；

(2) 第 1 个图案中红梅花的盆数可表示为 1×2 ，第 2 个图案中红梅花的盆数可表示为 2×3 ，第 3 个图案中红梅花的盆数可表示为 3×4 ，第 4 个图案中红梅花的盆数可表示为 4×5 ，…，第 n 个图案中红梅花的盆数可表示为 $n(n+1)$ ；

【问题解决】

(3) 已知按照上述规律摆放的第 n 个“中国结”图案中红梅花比黄梅花多 68 盆，结合图案中红梅花的排列方式及上述规律，求 n 的值。

题目 40 (2024·河北一模) 图 1、图 2 均由边长为 1 的小正方形按照一定的规律排列而组成的。

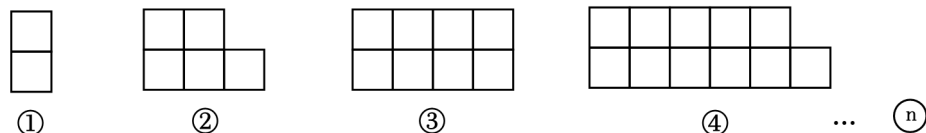


图1

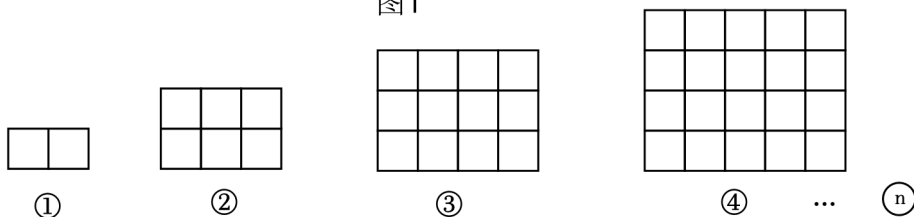


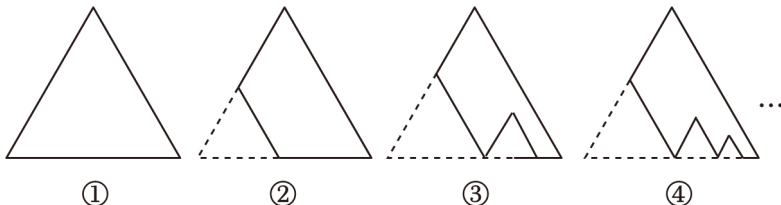
图2

设图 1 中第 $n(n > 1)$ 个图形有小正方形的个数为 $t_{\text{甲}}$ ，图 2 中第 $n(n > 1)$ 个图形有小正方形的个数为 $t_{\text{乙}}$ 。

(1) 请用含 $n(n > 1)$ 的代数式表示 $t_{\text{甲}}$ 、 $t_{\text{乙}}$ ，并求 $n = 6$ 时， $t_{\text{甲}} + t_{\text{乙}}$ 的值；

(2) 比较 $t_{\text{甲}}$ 和 $t_{\text{乙}}$ 的大小，并说明理由。

题目 41 (2024·安庆一模) 如图，已知图①是一块边长为 1，周长记为 C_1 的等边三角形卡纸，把图①的卡纸剪去一个边长为 $\frac{1}{2}$ 的等边三角形纸板后得到图②，然后沿同一底边再剪去一个边长为 $\frac{1}{4}$ 的等边三角形后得到图③，依次剪去一个边长为 $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$ 的等边三角形后，得到图④、⑤、⑥ …



(1) 第 5 个图形中卡纸的周长 $C_5 = \frac{47}{16}$ ；

(2) 记图 $n(n \geq 3)$ 中的卡纸的周长为 C_n ，则 $C_n - C_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$ ；

(3) 若 $C_n - C_{n-1} = \frac{1}{512}$ ，求 n 的值。

归纳思想在两种题型中的应用

压轴题密押

通用的解题思路:

解决这类问题的基本思路是观察—归纳—猜想—证明(验证),具体做法是:①认真观察所给的一组数、式、图等,发现它们之间的关系;②分析概括所给数式图的特征,归纳它们的共性和蕴含的变化规律,猜想得出一个一般性的结论;③结合问题所给的材料查是证明或验证结论的正确性。

压轴题预测

题型一:数式规律中的猜想归纳思想

题目 1 (2024·马鞍山一模) 观察以下等式:

第1个等式: $1 \times \frac{1+3}{2} - \frac{2}{2} = 1$,

第2个等式: $\frac{1}{2} \times \frac{4+6}{3} - \frac{2}{3} = 1$,

第3个等式: $\frac{1}{3} \times \frac{9+9}{4} - \frac{2}{4} = 1$,

第4个等式: $\frac{1}{4} \times \frac{16+12}{5} - \frac{2}{5} = 1$,

.....

按照以上规律,解决下列问题:

(1) 写出第5个等式: $\frac{1}{5} \times \frac{25+15}{6} - \frac{2}{6} = 1$;

(2) 写出你猜想的第 n 个等式: _____ (用含 n 的等式表示), 并证明.

【分析】(1) 根据前4个等式的规律求解此题;

(2) 根据前5个等式归纳出此题规律进行求解.

【解答】解: (1) $\because$ 第1个等式: $1 \times \frac{1+3}{2} - \frac{2}{2} = 1 \times \frac{1^2 \times 3 \times 1}{1+1} = 1$,

第2个等式: $\frac{1}{2} \times \frac{4+6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2^2+3 \times 2}{2+1} - \frac{2}{2+1} = 1$,

第3个等式: $\frac{1}{3} \times \frac{9+9}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{3^2+3 \times 3}{3+1} - \frac{2}{3+1} = 1$,

第4个等式: $\frac{1}{4} \times \frac{16+12}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{4} \times \frac{4^2+3 \times 4}{4+1} - \frac{2}{4+1} = 1$,

$\therefore$ 第5个等式: $\frac{1}{5} \times \frac{5^2+3 \times 5}{5+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{25+15}{6} - \frac{2}{5} = 1$,

故答案为: $\frac{1}{5} \times \frac{25+15}{6} - \frac{2}{5} = 1$;

(2) 由题意得,

第1个等式: $1 \times \frac{1+3}{2} - \frac{2}{2} = 1 \times \frac{1^2 \times 3 \times 1}{1+1} = 1$,

第2个等式: $\frac{1}{2} \times \frac{4+6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2^2+3 \times 2}{2+1} - \frac{2}{2+1} = 1$,

第3个等式: $\frac{1}{3} \times \frac{9+9}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{3^2+3 \times 3}{3+1} - \frac{2}{3+1} = 1,$

第4个等式: $\frac{1}{4} \times \frac{16+12}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{4} \times \frac{4^2+3 \times 4}{4+1} - \frac{2}{4+1} = 1,$

……,

∴ 第 n 个等式: $\frac{1}{n} \times \frac{n^2+3n}{n+1} - \frac{2}{n+1} = 1.$

故答案为: $\frac{1}{n} \times \frac{n^2+3n}{n+1} - \frac{2}{n+1} = 1.$

【点评】此题考查了算式规律的归纳能力,关键是能准确理解题意,并通过观察、计算、归纳进行求解.

题目 2 (2024·包河区一模) 观察下列等式:

$$a_1 = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{1 \times 3};$$

$$a_2 = \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2 \times 4};$$

$$a_3 = \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{4} = \frac{4}{3 \times 5};$$

...

(1) 猜想并写出第6个等式 $a_6 = \frac{1}{6 \times 7 \times 8} + \frac{1}{7} = \frac{7}{6 \times 8}$.

(2) 猜想并写出第 n 个等式 $a_n =$.

(3) 证明(2)中你猜想的正确性.

【分析】(1) 根据所给的等式的形式进行求解即可;

(2) 分析所给的等式的形式,进行总结即可;

(3) 把(2)中的左边进行整理,从而可求证.

【解答】解: (1) 由题意得: 第6个等式 $a_6 = \frac{1}{6 \times 7 \times 8} + \frac{1}{7} = \frac{7}{6 \times 8}.$

故答案为: $\frac{1}{6 \times 7 \times 8} + \frac{1}{7} = \frac{7}{6 \times 8};$

(2) 由题意得: 第 n 个等式 $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+2)}.$

故答案为: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+2)};$

(3) (2) 中的等式左边 $= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{n(n+2)}{n(n+1)(n+2)}$

$$= \frac{1+n^2+2n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{n(n+2)}$$

= 右边.

故猜想成立.

【点评】本题主要考查数字的变化规律,解答的关键是由所给的等式总结出存在的规律.

题目 3 (2024·嘉善县一模) 观察下面的等式: $\sqrt{1+\frac{1}{3}} = 2\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{2+\frac{1}{4}} = 3\sqrt{\frac{1}{4}}, \sqrt{3+\frac{1}{5}} = 4\sqrt{\frac{1}{5}},$

$$\sqrt{4+\frac{1}{6}} = 5\sqrt{\frac{1}{6}}, \dots$$

(1) 写出 $\sqrt{2023 + \frac{1}{2025}}$ 的结果;

(2) 按照上面的规律归纳出一个一般的结论:(用含 n 的等式表示, n 为正整数)

(3) 试运用相关知识,推理说明你所得到的结论是正确的.

【分析】(1) 由上述等式得, $\sqrt{n + \frac{1}{n+2}} = (n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$, 所以 $\sqrt{2023 + \frac{1}{2025}} = 2024\sqrt{\frac{1}{2025}}$;

(2) 观察上面的等式可得, $\sqrt{n + \frac{1}{n+2}} = (n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$;

(3) 计算 $\sqrt{n + \frac{1}{n+2}}$ 是否等于 $(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$.

【解答】解: (1) 由上述等式得, $\sqrt{2023 + \frac{1}{2025}} = 2024\sqrt{\frac{1}{2025}}$;

(2) $\sqrt{n + \frac{1}{n+2}} = (n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$;

(3) $\sqrt{n + \frac{1}{n+2}} = \sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n+2}} = \sqrt{\frac{(n+1)^2}{n+2}} = (n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$.

【点评】本题考查了算术平方根,关键是从等式中找到规律.

题目 4 (2024·新乐市一模) 每个人都拥有一个快乐数字,我们把自己出生的年份减去组成这个年份的数字之和,所得的差就是我们自己的快乐数字. 比如我国著名的数学家华罗庚出生于1910年,他的快乐数字是 $1910 - (1+9+1+0) = 1899$.

(1) 某人出生于1949年,他的快乐数字是 1926;

(2) 你再举几个例子并观察,这些快乐数字都能被 9 整除,请你用所学知识说明你的猜想.

(3) 请你重新对快乐数字定义,并写出一个你找到的规律(直接写出结果,不用证明).

【分析】(1) 根据快乐数字的定义即可解决问题.

(2) 按要求举几个例子,并发现规律即可解决问题.

(3) 根据(2)中发现的规律,进行重新定义即可.

【解答】解: (1) 由题知,

$$1949 - (1+9+4+9) = 1926,$$

即他的快乐数字是1926.

故答案为:1926.

(2) 例如:1986, 1995,

$$1986 - (1+9+8+6) = 1962,$$

$$1995 - (1+9+9+5) = 1971,$$

观察发现,这些快乐数字都能被9整除.

证明如下,

令这个四位数为: $1000a + 100b + 10c + d$, ($a \neq 0$),

$$\text{则 } 1000a + 100b + 10c + d - (a + b + c + d)$$

$$= 999a + 99b + 9c$$

$$= 9(111a + 11b + c),$$

故此代数式是9的倍数,

所以猜想是正确的.

(3) 定义如下,

若一个四位数的千位数字与十位数字相等,个位数字与百位数字相等,则称这个数为“快乐数字”.

发现的规律是,

“快乐数字”能被101整除. (答案不唯一).

【点评】本题考查数字变化的规律,理解题中“快乐数字”的定义是解题的关键.

题目 5 (2024·长安区一模) 某班数学小组在研究个位数字为5的两位数的平方的规律时,得到了下列等式:

第1个等式: $15^2 = 15 \times 15 = 225 = (1 \times 2) \times 100 + 25$;

第2个等式: $25^2 = 25 \times 25 = 625 = (2 \times 3) \times 100 + 25$;

第3个等式: $35^2 = 35 \times 35 = 1225 = (3 \times 4) \times 100 + 25$;

...

按照以上规律,解决下列问题:

(1) 填空: $75^2 = 75 \times 75 = \underline{5625} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 已知 $1 \leq x \leq 9$ 且 n 为整数,猜想第 n 个等式(用含 n 的等式表示),并证明.

【分析】(1) 计算 $75 \times 75 = 5625$, 根据上述等式得 $5625 = (7 \times 8) \times 100 + 25$;

(2) 根据上述等式,得出规律 $(10n+5)^2 = n(n+1) \times 100 + 25$, ($1 \leq n \leq 9$, 且 n 为整数),再证明即可.

【解答】解: (1) 5625;

$(7 \times 8) \times 100 + 25$;

(2) $(10n+5)^2 = n(n+1) \times 100 + 25$, ($1 \leq n \leq 9$, 且 n 为整数)

证明: $(10n+5)^2 = 100n^2 + 100n + 25$

$= (n^2 + n) \times 100 + 25$

$= n(n+1) \times 100 + 25$,

∴ 猜测的算式正确.

【点评】本题考查的是数字的变化规律和列代数式,从题目中找出数字与等式的变化规律是解题的关键.

题目 6 (2024·庐江县一模) 观察下列等式:

第1个等式: $\frac{3}{1} - \frac{2}{3} = \frac{3^2+1^2}{3} + a$;

第2个等式: $\frac{4}{2} - \frac{2}{4} = \frac{4^2+2^2}{8} + a$;

第3个等式: $\frac{5}{3} - \frac{2}{5} = \frac{5^2+3^2}{15} + a$;

第4个等式: $\frac{6}{4} - \frac{2}{6} = \frac{6^2+4^2}{24} + a$;

...

按照以上规律,解决下列问题:

(1) 各等式都成立时, $a = \underline{\hspace{1cm}} - 1 \underline{\hspace{1cm}}$;

(2) 在(1)的条件下,写出你猜想的第 n 个等式(用含 n 的式子表示),并证明.

【分析】(1) 根据所给等式,求出 a 得值即可解决问题.

(2) 观察所给等式发现规律即可解决问题.

【解答】解: (1) 由题知,

因为 $\frac{3}{1} - \frac{2}{3} = \frac{3^2+1^2}{3} + a$,

解得 $a = -1$,

所以 a 的值为 -1 .

故答案为: -1 .

(2) 因为第1个等式: $\frac{3}{1} - \frac{2}{3} = \frac{3^2+1^2}{3} - 1$;

第2个等式: $\frac{4}{2} - \frac{2}{4} = \frac{4^2+2^2}{8} - 1$;

第3个等式: $\frac{5}{3} - \frac{2}{5} = \frac{5^2+3^2}{15} - 1$;

第4个等式: $\frac{6}{4} - \frac{2}{6} = \frac{6^2+4^2}{24} - 1$;

...

观察所给等式各部分的变化规律可知,

第 n 个等式: $\frac{n+2}{n} - \frac{2}{n+2} = \frac{(n+2)^2+n^2}{n(n+2)} - 1$;

证明如下,

左边 = $\frac{(n+2)^2-2n}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+4}{n^2+2n}$;

右边 = $\frac{n^2+4n+4+n^2-(n^2+2n)}{n^2+2n} = \frac{n^2+2n+4}{n^2+2n}$;

左边 = 右边,

所以此等式成立.

【点评】本题考查数字变化的规律,能根据所给等式发现各部分的变化规律进而得出第 n 的等式是解题的关键.

题目 7 (2023·利辛县模拟) 观察下列等式:

第①个等式: $1^2+2^2=3^2-2^2$,

第②个等式: $2^2+3^2=7^2-6^2$,

第③个等式: $3^2+4^2=13^2-12^2$,

第④个等式: $4^2+5^2=21^2-20^2$,

...

根据上述规律解决下列问题:

(1) 写出第⑤个等式;

(2) 写出你猜想的第 n 个等式(用含 n 的式子表示),并证明.

【分析】(1) 根据等式的计算规律分析即可;

(2) 利用等式的计算规律写出猜想,再运用平方差公式计算证明.

【解答】解: (1) 第⑤个等式为: $5^2+6^2=31^2-30^2$;

(2) 第 n 个等式(用含 n 的式子表示)为: $n^2+(n+1)^2=[n(n+1)+1]^2-[n(n+1)]^2$,

证明: 左边 = $n^2+(n^2+2n+1)=2n^2+2n+1$,

右边 = $[n(n+1)+1+n(n+1)] \cdot [n(n+1)+1-n(n+1)]=2n^2+2n+1$,

$\therefore$ 左边 = 右边,

$\therefore n^2+(n+1)^2=[n(n+1)+1]^2-[n(n+1)]^2$.

【点评】本题考查了数字规律的探究,熟练掌握平方差公式的应用是解答本题的关键.

题目 8 (2023·全椒县三模) 观察下列等式:

第1个等式: $\frac{2^2}{1} - 1 - 2 = 1$;

第2个等式: $\frac{3^2}{2} - 2 - 2 = \frac{1}{2}$;

第3个等式: $\frac{4^2}{3} - 3 - 2 = \frac{1}{3}$;

第4个等式: $\frac{5^2}{4} - 4 - 2 = \frac{1}{4}$;

第5个等式: $\frac{6^2}{5} - 5 - 2 = \frac{1}{5}$;

…;

按照以上规律,解决下列问题

(1) 写出第6个等式: $\frac{7^2}{6} - 6 - 2 = \frac{1}{6}$;

(2) 写出你猜想的第 n 个等式(用含 n 的式子表示),并验证其正确性.

【分析】(1) 根据前5个等式规律写出第6个等式;

(2) 根据前5个等式猜想出第 n 个等式并验证.

【解答】解: (1) $\because$ 第1个等式: $\frac{2^2}{1} - 1 - 2 = 1$;

第2个等式: $\frac{3^2}{2} - 2 - 2 = \frac{1}{2}$;

第3个等式: $\frac{4^2}{3} - 3 - 2 = \frac{1}{3}$;

第4个等式: $\frac{5^2}{4} - 4 - 2 = \frac{1}{4}$;

第5个等式: $\frac{6^2}{5} - 5 - 2 = \frac{1}{5}$,

可得第6个等式为: $\frac{7^2}{6} - 6 - 2 = \frac{1}{6}$,

故答案为: $\frac{7^2}{6} - 6 - 2 = \frac{1}{6}$;

(2) 由题意可猜想得,第 n 个等式为: $\frac{(n+1)^2}{n} - n - 2 = \frac{1}{n}$,

证明: $\because \frac{(n+1)^2}{n} - n - 2$

$= \frac{n^2+2n+1}{n} - \frac{n(n+2)}{n}$

$= \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{n}$

$= \frac{1}{n}$,

$\therefore$ 第 n 个等式为: $\frac{(n+1)^2}{n} - n - 2 = \frac{1}{n}$.

【点评】此题考查了算式规律的归纳能力,关键是能准确理解题意,并通过观察、计算、归纳进行求解.

题目 9 (2023·夏邑县校级三模) 设 $\overline{a5}$ 是一个两位数,其中 a 是十位上的数字($1 \leq a \leq 9$). 例如:当 $a=4$ 时, $\overline{a5}$ 表示的两位数是45.

(1) 尝试:

① 当 $a=1$ 时, $15^2=225=1 \times 2 \times 100 + 25$;

② 当 $a=2$ 时, $25^2=625=2 \times 3 \times 100 + 25$;

③ 当 $a=3$ 时, $35^2=1225=3 \times 4 \times 100 + 25$;

④ 当 $a=4$ 时, $45^2=2025=4 \times 5 \times 100 + 25$.

(2) 归纳: $\overline{a5}^2$ 与 $100a(a+1)+25$ 有怎样的大小关系? 试说明理由.

(3) 运用:若 $\overline{a5}^2$ 与 $100a$ 的和为6325,求 a 的值.

【分析】(1) 根据规律直接得出结论即可;

(2) 根据 $\overline{a5}^2 = (10a+5)(10a+5) = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25$ 即可得出结论;

(3) 根据题意列出方程求解即可.

【解答】解: (1) ①当 $a=1$ 时, $15^2=225=1 \times 2 \times 100+25$;

②当 $a=2$ 时, $25^2=625=2 \times 3 \times 100+25$;

③当 $a=3$ 时, $35^2=1225=3 \times 4 \times 100+25$;

$\therefore$ ③当 $a=4$ 时, $35^2=2025=4 \times 5 \times 100+25$,

故答案为: $4 \times 5 \times 100+25$;

(2) $\overline{a5^2}=100a(a+1)+25$, 理由如下:

$$\overline{a5^2}=(10a+5)(10a+5)$$

$$=100a^2+100a+25$$

$$=100a(a+1)+25;$$

(3) 由题知, $\overline{a5^2}-100a=6325$,

$$\text{即 } 100a^2+100a+25-100a=6325,$$

解得 $a=75$ 或 -7 (舍去),

$\therefore a$ 的值为 7.

【点评】本题主要考查数字的变化规律, 根据数字的变化规律得出 $\overline{a5^2}=100a(a+1)+25$ 的结论是解题的关键.

题目 10 (2023·凤台县校级三模) 观察等式:

$$\text{第1个等式: } \frac{3}{2 \times 4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \times 3 \times 4};$$

$$\text{第2个等式: } \frac{4}{3 \times 5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \times 4 \times 5};$$

$$\text{第3个等式: } \frac{5}{4 \times 6} - \frac{1}{5} = \frac{1}{4 \times 5 \times 6};$$

...

根据以上等式的规律, 解答下列问题:

$$(1) \text{直接写出第5个等式: } \frac{7}{6 \times 8} - \frac{1}{7} = \frac{1}{6 \times 7 \times 8};$$

(2) 猜想并写出第 n 个等式, 证明你所猜想的正确性.

【分析】先分别找出分子分母的规律, 再猜想出等式, 并证明即可.

【解答】解: (1) 先得到第一个分数的分子分母分别为 7, 6×8 ,

第二个分数的分子分母分别为 1, 7,

第三个分数的分子分母分别为 1, $6 \times 7 \times 8$,

$$\text{故得: } \frac{7}{6 \times 8} - \frac{1}{7} = \frac{1}{6 \times 7 \times 8}.$$

$$(2) \text{第 } n \text{ 个等式: } \frac{n+2}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \because \text{左边} &= \frac{(n+2)^2}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n^2+4n+4)-(n^2+4n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \text{右边}, \end{aligned}$$

$\therefore$ 得证.

【点评】本题主要考查学生找出分子分母的规律, 再猜想出等式的能力, 用分式运算证明是难点.

题目 11 (2023·萧县三模) 观察下列等式: 第1个等式: $1 + 1 - \frac{1}{5} = \frac{3^2}{1 \times 5}$;

第2个等式: $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4^2}{2 \times 6}$;

第3个等式: $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{5^2}{3 \times 7}$;

...

按照以上规律, 解决下列问题:

(1) 写出第4个等式: $1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6^2}{4 \times 8}$;

(2) 写出你猜想的第 n 个等式 (用含 n 的等式表示), 并证明.

【分析】(1) 根据题目中的三个等式各部分的变化规律, 可解决问题.

(2) 根据此等式各部分的变化规律, 可归纳猜想出第 n 个等式. 将所得等式的左边通分, 与右边相等, 则可得此等式成立.

【解答】解: (1) 由题知,

第4个等式为: $1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6^2}{4 \times 8}$.

故答案为: $1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6^2}{4 \times 8}$;

(2) 猜想第 n 个等式为: $1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} = \frac{(n+2)^2}{n(n+4)}$.

证明: 左边 = $\frac{n(n+4)}{n(n+4)} + \frac{n+4}{n(n+4)} - \frac{n}{n(n+4)} = \frac{n^2+4n+4}{n(n+4)} = \frac{(n+2)^2}{n(n+4)} =$ 右边,

所以此等式成立.

【点评】本题考查了数式变化规律的归纳猜想问题, 抓住等式中各部分的变化规律是解决问题的关键.

题目 12 (2023·无为市四模) 观察下列等式:

第1个等式: $\frac{1}{1} - \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$;

第2个等式: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$;

第3个等式: $\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{4}$;

第4个等式: $\frac{1}{4} - \frac{1}{4 \times 5} = \frac{1}{5}$;

.....

按照以上规律, 解决下列问题:

(1) 写出第5个等式: $\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \times 6} = \frac{1}{6}$;

(2) 写出你猜想的第 n 个等式 (用含 n 的式子表示), 并证明.

【分析】(1) 根据所给的等式的形式进行求解即可;

(2) 利用所给的规律进行求解即可.

【解答】解: (1) 按照以上规律, 第5个等式为: $\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \times 6} = \frac{1}{6}$;

故答案为: $\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \times 6} = \frac{1}{6}$;

(2) 按照以上规律, 第 n 个等式为: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$. 证明如下:

等式左边 = $\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}$

$$= \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n+1},$$

$$\text{等式右边} = \frac{1}{n+1},$$

$\therefore$ 等式左边 = 等式右边,

$\therefore$ 等式成立.

【点评】本题主要考查分式的加减法,数字的变化规律,解题的关键是读懂题意,找到已知等式的规律.

题目 13 (2023·思明区模拟)“歌唱家在家唱歌”“蜜蜂酿蜂蜜”这两句话从左往右读和从右往左读,结果完全相同.文学上把这样的现象称为“回文”,数学上也有类似的“回文数”,比如 252, 7887, 34143. 小明在计算两位数减法的过程中意外地发现有些等式从左往右读的结果和从右往左读的结果一样,如: $65 - 38 = 83 - 56$; $91 - 37 = 73 - 19$; $54 - 36 = 63 - 45$. 数学上把这类等式叫做“减法回文等式”.

(1) ①观察以上等式,请你再写出一个“减法回文等式”;

②请归纳“减法回文等式”的被减数 $\overline{ab}$ (十位数字为 a , 个位数字为 b) 与减数 $\overline{cd}$ 应满足的条件,并证明.

(2) 两个两位数相乘,是否也存在“乘法回文等式”? 如果存在,请你直接写出“乘法回文等式”的因数 $\overline{xy}$ 与因数 $\overline{mn}$ 应满足的条件.

【分析】(1) ①根据题意写出一个“减法回文等式”即可;

②由已知“减法回文等式”的定义证明即可;

(2) 类似“减法回文等式”定义得到“乘法回文等式”,再根据“乘法回文等式”定义证明即可.

【解答】解: (1) ①观察已知等式,再写出一个“减法回文等式”可以是 $81 - 72 = 27 - 18$ (答案不唯一);

②归纳“减法回文等式”的被减数 $\overline{ab}$ (十位数字为 a , 个位数字为 b) 与减数 $\overline{cd}$ 应满足的条件是 $a - c = d - b$, 证明如下:

$$\because \overline{ab} - \overline{cd} = \overline{dc} - \overline{ba}, \text{ 即 } 10a + b - (10c + d) = 10d + c - (10b + a),$$

$$\text{整理, 得: } 11(a - c) = 11(d - b),$$

$$\therefore a - c = d - b;$$

(2) 两个两位数相乘, 也存在“乘法回文等式”, “乘法回文等式”的因数 $\overline{xy}$ 与因数 $\overline{mn}$ 满足的条件是 $\overline{xm} = \overline{yn}$, 理由如下:

$$\because \overline{xy} \times \overline{mn} = \overline{nm} \times \overline{yx},$$

$$\text{即 } (10x + y)(10m + n) = (10n + m)(10y + x),$$

整理, 得:

$$99xm = 99yn,$$

$$\therefore xm = yn.$$

【点评】本题主要考查了整式的加减, 注意发现数字之间的联系, 找出运算的规律解决问题.

题目 14 (2023·武安市三模) 某数学兴趣小组研究如下等式: $38 \times 32 = 1216$, $53 \times 57 = 3021$, $71 \times 79 = 5609$, $84 \times 86 = 7224$. 观察发现以上等式均是“十位数字相同, 个位数字之和是 10 的两个两位数相乘, 且积有一定的规律”.

(1) 根据上述的运算规律, 直接写出结果: $58 \times 52 = \underline{3016}$; $75^2 = \underline{\quad\quad\quad}$;

(2) 设其中一个数的十位数字为 a , 个位数字为 b ($a > 0, b > 0$).

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/545324141213011213>