

第2讲 分离参数法：全分离及半分离

知识与方法

分离参数法解决恒成立求参问题, 可以有两个角度: 全分离和半分离.

1. 全分离参数法

将含参表达式中的参数从表达式中完全分离出来, 使所研究的函数由动态变为定态, 进而可得到新函数的图像、性质(最值), 将求参数的范围问题转化为求函数的最值或值域问题. 在分离参数时, 需点睛意: (1) 参数系数的正负是否确定; (2) 分参后目标函数的最值是否易解, 若不易解, 极可能需要洛必达法则辅助.

2. 半分离参数法

其一般步骤为: 将不等式变形为 $ax + b \geq f(x)$ 或 $ax + b \leq f(x)$ 的形式 (其中 a 为参数, b 为常数), 然后画出图像, 由图像的上下方关系得到不等式, 从而求得参数的取值范围. 不等号前后两个函数的图像特征为: 直线 $y = ax + b$ 与曲线 $y = f(x)$, 而直线 $y = ax + b$ 过定点 $(0, b)$.

需要说明的是: 半分离参数法一般只适用于客观题, 解答题则不宜使用.

典型例题

全分离参数

【例 1】已知函数 $f(x) = e^x + ax^2 - x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$, 求 a 的取值范围.

【解析】(1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = e^x + x^2 - x$, $f'(x) = e^x + 2x - 1$.

当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

所以, 当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 解法 1: 分离参数法

当 $x = 0$ 时, $a \in \mathbf{R}$.

当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1 \Leftrightarrow a \geq \frac{\frac{1}{2}x^3 + x + 1 - e^x}{x^2}$.

记 $h(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3 + x + 1 - e^x}{x^2} (x > 0)$,

则 $h'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3 - x - 2 + (2-x)e^x}{x^3} = \frac{(2-x)(e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1)}{x^3}$.

记 $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1 (x > 0)$, $g'(x) = e^x - x - 1$, $g''(x) = e^x - 1$.

因为 $x > 0$, 所以 $g''(x) = e^x - 1 > 0$, 所以 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

从而 $g'(x) > g'(0) = 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 所以 $g(x) > g(0) = 0$.

令 $h'(x) = 0$, 解得 $x = 2$.

当 $x \in (0, 2)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增;

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减.

所以 $h(x)$ 在 $x = 2$ 处取得最大值 $h(2) = \frac{7-e^2}{4}$, 从而 $a \geq \frac{7-e^2}{4}$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $[\frac{7-e^2}{4}, +\infty)$.

解法 2: 指数找朋友

$f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$ 等价于 $\frac{\frac{1}{2}x^3 - ax^2 + x + 1}{e^x} \leq 1$.

设 $g(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3 - ax^2 + x + 1}{e^x} (x \geq 0)$,

$$\text{则 } g'(x) = -\frac{\frac{1}{2}x[x^2 - (2a+3)x + (4a+2)]}{e^x} = -\frac{\frac{1}{2}x[x - (2a+1)](x-2)}{e^x}.$$

(1) 当 $2a+1 \leq 0$, 即 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时,

则当 $x \in (0, 2)$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递增, 而 $g(0) = 1$,

故当 $x \in (0, 2)$ 时, $g(x) > 1$, 不合题意;

(2) 当 $0 < 2a+1 < 2$, 即 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ 时,

则当 $x \in (0, 2a+1) \cup (2, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0, 2a+1)$, $(2, +\infty)$ 单调递减, 在 $(2a+1, 2)$ 上单调递增.

由于 $g(0) = 1$, 所以 $g(x) \leq 1$. 当且仅当 $g(2) = \frac{7-4a}{e^2} \leq 1$, 即 $a \geq \frac{7-e^2}{4}$.

所以当 $\frac{7-e^2}{4} \leq a < \frac{1}{2}$ 时, $g(x) \leq 1$.

(3) 若 $2a+1 \geq 2$, 即 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 则 $g(x) \leq \frac{\frac{1}{2}x^3+x+1}{e^x}$. 由于 $0 \in [\frac{7-e^2}{4}, \frac{1}{2})$, 故由 (2) 可得

$$\frac{\frac{1}{2}x^3+x+1}{e^x} \leq 1. \text{ 故当 } a \geq \frac{1}{2} \text{ 时, } g(x) \leq 1.$$

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $[\frac{7-e^2}{4}, +\infty)$.

【点睛】 解决本题的关键在于求导数 $h'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3 - x - 2 + (2-x)e^x}{x^3}$ 后的处理. 仔细观察

导数式中 e^x 前面的系数为 $2-x$, 由此可大胆猜测 $2-x$ 应该为 $\frac{1}{2}x^3 - x - 2$ 的一个

因式, 从而可设 $\frac{1}{2}x^3 - x - 2 = (2-x)(-\frac{1}{2}x^2 + px + q)$, 将右侧展开, 得 $\frac{1}{2}x^3 -$

$x - 2 = \frac{1}{2}x^3 - (p+1)x^2 + (2p-q)x + 2q$, 比较两侧的系数, 可得 $p = q = -1$,

从而 $\frac{1}{2}x^3 - x - 2 = (2-x)(-\frac{1}{2}x^2 - x - 1)$.

【例 2】设函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$.

(1) 若 $a = 0$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若当 $x \geq 0$ 时 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

【解析】(1) 因为 $a = 0$ 时, 所以 $f(x) = e^x - 1 - x$, $f'(x) = e^x - 1$.

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

(2) 解法 1:

由(1)可得, 当 $a = 0$ 时, $f(x) \geq f(0) = 0$,

即 $e^x \geq x + 1$, 当且仅当 $x = 0$ 时等号成立.

依题意, 当 $x \geq 0$ 时 $f(x) \geq 0$ 恒成立,

当 $x = 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 此时 $a \in \mathbf{R}$;

当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq 0$ 等价于 $a \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$,

令 $g(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2} (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{(x-2)e^x + x + 2}{x^3}$,

令 $h(x) = (x-2)e^x + x + 2 (x > 0)$, 则 $h'(x) = (x-1)e^x + 1$,

因为 $h''(x) = xe^x > 0$, 所以 $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 所以 $h'(x) >$

$h'(0) = 0$,

于是 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 从而 $h(x) > h(0) = 0$,

因此 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

由洛必达法则知, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$, 所以 $a \leq \frac{1}{2}$. 当

$a > \frac{1}{2}$ 时, $e^{-x} > 1 - x$ 得 $f'(x) < e^x - 1 + 2a(e^{-x} - 1) = e^{-x}(e^x - 1)(e^x - 2a)$,

故当 $x \in (0, \ln 2a)$ 时, $f'(x) < 0$, 而 $f(0) = 0$, 于是当 $x \in (0, \ln 2a)$ 时, $f(x) < 0$.

综上得 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{2}]$.

解法 2:

$f'(x) = e^x - 1 - 2ax$, 由 (1) 知 $e^x \geq 1 + x$, 当且仅当 $x = 0$ 时等号成立,

故 $f'(x) \geq x - 2ax = (1 - 2a)x$.

当 $1 - 2a \geq 0$, 即 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) \geq 0 (x \geq 0)$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(x) \geq f(0) = 0$, 即 $a \leq \frac{1}{2}$ 符合题意;

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 由 $e^x > 1 + x (x \neq 0)$ 可得 $e^{-x} > 1 - x (x \neq 0)$,

所以 $e^{-x} - 1 > -x (x \neq 0)$,

所以 $f'(x) = e^x - 1 - 2ax < e^x - 1 + 2a(e^{-x} - 1) = e^{-x}(e^x - 1)(e^x - 2a)$,

则当 $x \in (0, \ln 2a)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, \ln 2a)$ 上单调递减,

于是当 $x \in (0, \ln 2a)$ 时, $f(x) < f(0) = 0$, 故 $a > \frac{1}{2}$ 不合题意.

综上所述, a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{2}]$.

【例 3】 已知函数 $f(x) = x(e^x + 1 - a) (x \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $a = 2$, 判断 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性;

(2) 若 $f(x) - \ln x - 1 \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【解析】 (1) 若 $a = 2$, $f(x) = xe^x - x$, $f'(x) = e^x + xe^x - 1 = (x + 1)e^x - 1$.

当 $x > 0$ 时, $x + 1 > 1$, $e^x > 1$, 故 $(x + 1)e^x > 1$, $f'(x) = (x + 1)e^x - 1 > 0$,

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) **解法 1:** 分离参数+隐零点求最值

由题意可知 $xe^x + (1-a)x - \ln x - 1 \geq 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

整理得 $a - 1 \leq e^x - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$.

设 $g(x) = e^x - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$, $g'(x) = \frac{x^2 e^x + \ln x}{x^2}$,

设 $h(x) = x^2 e^x + \ln x$, 则 $h'(x) = (x^2 + 2x)e^x + \frac{1}{x} > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $h(1) = e > 0$, $h(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{e}}{4} - \ln 2 < 0$.

所以函数 $h(x)$ 有唯一的零点 x_0 , 且 $\frac{1}{2} < x_0 < 1$.

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < 0$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

即 $g(x_0)$ 为 $g(x)$ 在定义域内的最小值.

所以 $a - 1 \leq e^{x_0} - \frac{\ln x_0}{x_0} - \frac{1}{x_0}$. 因为 $h(x_0) = 0$, 得 $x_0 e^{x_0} = -\frac{\ln x_0}{x_0}$, $\frac{1}{2} < x_0 < 1$ (*)

令 $k(x) = xe^x$ ($\frac{1}{2} < x < 1$), 方程(*)等价于 $k(x) = k(-\ln x)$ ($\frac{1}{2} < x < 1$).

而 $k'(x) = (x+1)e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒大于零, 所以 $k(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

故 $k(x) = k(-\ln x)$ 等价于 $x = -\ln x$ ($\frac{1}{2} < x < 1$).

设函数 $m(x) = x + \ln x$ ($\frac{1}{2} < x < 1$), 易知 $m(x)$ 单调递增.

又 $m(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \ln 2 < 0$, $m(1) = 1 > 0$,

所以 x_0 为 $m(x)$ 的唯一零点. 即 $\ln x_0 = -x_0$, $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$.

故 $g(x)$ 的最小值为 $g(x_0) = e^{x_0} - \frac{\ln x_0}{x_0} - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0} - \frac{-x_0}{x_0} - \frac{1}{x_0} = 1$.

所以 $a - 1 \leq 1$, 即 $a \leq 2$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

解法 2: 分离参数+放缩法求最值

由题意可知 $xe^x + (1-a)x - \ln x - 1 \geq 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

$$\text{即 } a - 1 \leq \frac{xe^x - \ln x - 1}{x}.$$

利用不等式 $e^x \geq x + 1$ (当且仅当 $x = 0$ 时, 等号成立), 可得

$$\frac{xe^x - \ln x - 1}{x} = \frac{e^{x+\ln x} - \ln x - 1}{x} \geq \frac{(x+\ln x+1) - \ln x - 1}{x} = 1,$$

当且仅当 $x + \ln x = 0$ 时, 等号成立.

所以 $\frac{xe^x - \ln x - 1}{x}$ 的最小值为 1.

于是 $a - 1 \leq 1$, 得 $a \leq 2$, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

【例 4】 已知函数 $f(x) = x^3 e^{ax} - 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a = 2$, 不等式 $f(x) \geq mx + 3\ln x$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

【解析】 (1) $f'(x) = 3x^2 e^{ax} + ax^3 e^{ax} = x^2 e^{ax} (ax + 3)$.

① 当 $a = 0$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 单调递增;

② 当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > -\frac{3}{a}$; 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -\frac{3}{a}$.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\frac{3}{a}, +\infty)$, 单调递增区间为 $(-\infty, -\frac{3}{a}]$.

③ 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) \geq 0$, 得 $x \geq -\frac{3}{a}$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $x < -\frac{3}{a}$.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -\frac{3}{a})$, 单调递增区间为 $[-\frac{3}{a}, +\infty)$.

(2) 因为 $a = 2$, 所以 $m \leq \frac{x^3 e^{2x} - 3\ln x - 1}{x}$ 恒成立.

设 $g(t) = t - 1 - \ln t (t > 0)$, $g'(t) = \frac{t-1}{t}$,

令 $g'(t) < 0$, 得 $0 < t < 1$; 令 $g'(t) > 0$, 得 $t > 1$.

所以 $g(t)_{\min} = g(1) = 0$, 所以 $t - 1 - \ln t \geq 0$.

取 $t = x^3 e^{2x}$, 则 $x^3 e^{2x} - 1 - \ln(x^3 e^{2x}) \geq 0$, 即 $x^3 e^{2x} - 3\ln x - 1 \geq 2x$,

所以 $\frac{x^3 e^{2x} - 3\ln x - 1}{x} \geq \frac{2x}{x} = 2$.

设 $h(x) = x^3 e^{2x}$, 因为 $h(0) = 0 < 1$, $h(1) = e^2 > 1$, 所以方程 $x^3 e^{2x} = 1$ 必有解,

所以当且仅当 $x^3 e^{2x} = 1$ 时, 函数 $y = \frac{x^3 e^{2x} - 3\ln x - 1}{x}$ 取得最小值 2,

所以 $m \leq 2$, 即 m 的取值范围为 $(-\infty, 2]$.

【点睛】本题在进行分参后, 首先证明了一个常用的不等式:

当 $t > 0$ 时, 有 $\ln t \leq t - 1$, 接下来利用该不等式直接得到 $x^3 e^{2x} - 3\ln x - 1 \geq 2x$,

从而得出 $y = \frac{x^3 e^{2x} - 3\ln x - 1}{x}$ 的最小值 2. 最后证明能够取到最小值.

从而得出实数 m 的取值范围.

本题也可用同构法解决:

$$m \leq \frac{x^3 e^{2x} - 3\ln x - 1}{x},$$

$$\frac{x^3 e^{2x} - 3\ln x - 1}{x} = \frac{e^{3\ln x + 2x} - 3\ln x - 1}{x} \geq \frac{2x + 3\ln x + 1 - 3\ln x - 1}{x} = 2,$$

故 $m \leq 2$, 即 m 的取值范围为 $(-\infty, 2]$.

换元后分离参数

【例 5】已知函数 $f(x) = x \left(e^{\frac{x}{a}} - \frac{2}{a} - 2 \right) + a$.

(1) 若 $a = -1$, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值点;

(2) 若 $x > 0$ 时, $f(x) > -1 (a > 0)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

【解析】(1) $a = -1$ 时 $f(x) = xe^{-x} - 1, f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = 0$,

所以当 $x < 1, f'(x) > 0, x > 1, f'(x) < 0$. 所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(1, +\infty)$,

单调递增区间为 $(-\infty, 1)$, 极大值点为 $x = 1$, 无极小值点.

(2) 解法 1: $f(x) > -1 \Leftrightarrow x \left(e^{\frac{x}{a}} - \frac{2}{a} - 2 \right) + a > -1$, 即 $x \left(e^{\frac{x}{a}} - \frac{2}{a} - 2 \right) + a + 1 > 0$,

令 $\frac{x}{a} = t$, 则 $x = at, ate^t - (2a + 2)t + a + 1 > 0$ 对于 $t > 0$ 恒成立,

即 $a(te^t - 2t + 1) > 2t - 1$

易证 $e^t \geq t + 1$ (过程略), 则 $te^t - 2t + 1 \geq t(t + 1) - 2t + 1 > (t - 1)^2 \geq 0$,

即 $te^t - 2t + 1 > 0$.

于是, 由 (*) 可得 $a > \frac{2t-1}{te^t-2t+1}$.

令 $g(t) = \frac{2t-1}{te^t-2t+1} (t > 0)$, 则 $g'(t) = \frac{-(2t+1)(t-1)}{(te^t-2t+1)^2} e^t (t > 0)$.

当 $t \in (0, 1)$ 时 $g'(t) > 0$, 当 $t \in (1, +\infty)$ 时 $g'(t) < 0$.

所以 $g(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $[g(t)]_{\max} = g(1) = \frac{1}{e-1}$,

所以 $a > \frac{1}{e-1}$, 实数 a 的取值范围是 $(\frac{1}{e-1}, +\infty)$.

解法 2: $f(x) > -1 \Leftrightarrow x \left(e^{\frac{x}{a}} - \frac{2}{a} - 2 \right) + a > -1$, 即 $x \left(e^{\frac{x}{a}} - \frac{2}{a} - 2 \right) + a + 1 > 0$,

令 $\frac{x}{a} = t$, 则 $x = at, ate^t - (2a + 2)t + a + 1 > 0$ 对于 $t > 0$ 恒成立,

即 $\frac{a}{a+1} > \frac{2t-1}{te^t}$ 对于 $t > 0$ 恒成立,

设 $h(t) = \frac{2t-1}{te^t}, h'(t) = \frac{-(2t+1)(t-1)}{t^2 e^t}$

当 $t \in (0, 1)$ 时 $h'(t) > 0$, 当 $t \in (1, +\infty)$ 时 $h'(t) < 0$

可得 $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上递增, 在 $(1, +\infty)$ 上递减,

所以 $h(t)_{\max} = h(1) = \frac{1}{e}$, 则 $\frac{a}{a+1} > \frac{1}{e}$, 解得 $a > \frac{1}{e-1}$.

故实数 a 的取值范围是 $(\frac{1}{e-1}, +\infty)$.

【点睛】本题第(2)问显然不能直接分离参数, 如果利用 $f'(x)$ 处理也是十分复杂, 于是着眼于简化指数进行换元: 令 $\frac{x}{a} = t$, 则 $ate^t - (2a+2)t + a+1 > 0$ 对于 $t > 0$ 恒成立. 换元之后就可以轻松分离参数了, 特别是解法 2 的处理手法值得回味.

半分离参数

【例 6】已知函数 $f(x) = e^x - ax - 1$ ($a \in \mathbb{R}$, 其中 e 为自然对数的底数).

(1) 若 $f(x)$ 在定义域内有唯一零点, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x) \leq x^2 e^x$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.

【解析】(1) $f'(x) = e^x - a$,

① 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增;

$$\text{又 } f(-1) = \frac{1}{e} - 1 + a < 0, f(1) = e - a - 1 > 0,$$

由零点存在定理可知, 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有唯一零点.

故 $a \leq 0$ 符合题意;

② 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \ln a$,

当 $x \in (-\infty, \ln a)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

$x \in (\ln a, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

$$\text{所以 } f(x)_{\min} = f(\ln a) = e^{\ln a} - a \ln a - 1 = a - a \ln a - 1,$$

设 $g(a) = a - a \ln a - 1$ ($a > 0$), 则 $g'(a) = 1 - (\ln a + 1) = -\ln a$,

当 $0 < a < 1$ 时, $g'(a) > 0, g(a)$ 单调递增;

当 $a > 1$ 时, $g'(a) < 0, g(a)$ 单调递减,

所以 $g(a)_{\max} = g(1) = 0$, 故 $a = 1$.

综上: 实数 a 的取值范围为 $\{a \mid a \leq 0 \text{ 或 } a = 1\}$.

(2) 解法 1: $f(x) \leq x^2 e^x$ 对 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立,

即 $(1 - x^2)e^x \leq ax + 1$ 对 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立,

即函数 $h(x) = (1 - x^2)e^x$ 的图像恒在直线 $y = ax + 1$ 的下方.

而 $h'(x) = (1 - x^2 - 2x)e^x, h''(x) = (-x^2 - 4x - 1)e^x < 0 (x \geq 0)$,

所以函数 $h(x)$ 是上凸函数, 且在 $x = 0$ 处的切线斜率 $k = h'(0) = 1$;

直线 $y = ax + 1$ 过定点 $(0, 1)$, 斜率为 a , 故 $a \geq 1$, 即 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

解法 2:

$f(x) \leq x^2 e^x$ 对 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立, 即 $(1 - x^2)e^x \leq ax + 1$ 对 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立,

记 $h(x) = (1 - x^2)e^x = (1 + x)(1 - x)e^x$,

① 当 $a \geq 1$ 时, 设函数 $m(x) = (1 - x)e^x$,

则 $m'(x) = -xe^x \leq 0$, 因此 $m(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递减,

又 $m(0) = 1$, 故 $m(x) \leq 1$,

所以 $h(x) = (1 + x)m(x) \leq 1 + x \leq ax + 1$,

故 $f(x) \leq x^2 e^x$ 对 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立;

② 当 $0 < a < 1$ 时, 设函数 $n(x) = e^x - x - 1$,

则 $n'(x) = e^x - 1 \geq 0$, 所以 $n(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增,

且 $n(0) = 0$, 故 $e^x \geq x + 1$.

当 $0 < x < 1$ 时, $h(x) > (1-x)(1+x)^2$,

$$(1-x)(1+x)^2 - ax - 1 = x(1-a-x-x^2),$$

$$\text{取 } x_0 = \frac{-1+\sqrt{5-4a}}{2},$$

$$\text{则 } x_0 \in (0,1), (1-x_0)(1+x_0)^2 - ax_0 - 1 = 0,$$

$$\text{所以 } h(x_0) > ax_0 + 1;$$

故 $0 < a < 1$ 不合题意.

$$\textcircled{3} \text{ 当 } a \leq 0 \text{ 时, 取 } x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\text{则 } x_0 \in (0,1), h(x_0) > (1-x_0)(1+x_0)^2 = 1 \geq ax_0 + 1.$$

故 $a \leq 0$ 不合题意.

综上, a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

【点睛】 解法 1 将不等式进行变形为 $ax + b \leq f(x)$ (其中 a 为参数, b 为常数), 不等号前后两个函数的图像特征为: “一直一曲”, 而直线 $y = ax + b$ 过定点 $(0, b)$.

半分离参数的方法, 通过变形将不等式两边化为一直线与一曲线的形式, 再结合图像利用函数凹凸性解决问题, 过程简洁快捷. 需要指出的是, 这种解法只适用于选择题与填空题, 不适用于解答题.

解法 2 是不分离参数, 直接构造差函数对参数进行讨论, 过程更加严谨, 理由更加充分,

是解答题的一般做法. 其中讨论的临界点, 可以结合解法 1 的过程而得到.

【例 7】 已知函数 $f(x) = x \ln x + ax - 1, a \in \mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a = 2$ 时, 对任意 $x > 1, f(x) > b(x-1)$ 恒成立, 求正整数 b 的最大值.

【解析】(1) $f(x)$ 的单调递增区间为 $(e^{-a-1}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, e^{-a-1})$.

(2) 解法 1: 全分离

$$f(x) > b(x-1) \text{ 变形为 } b < \frac{f(x)}{x-1} = \frac{x \ln x + 2x - 1}{x-1},$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{x \ln x + 2x - 1}{x-1}, g'(x) = \frac{-\ln x + x - 2}{(x-1)^2},$$

$$\text{令 } h(x) = -\ln x + x - 2, \text{ 则 } h'(x) = -\frac{1}{x} + 1 = \frac{x-1}{x} > 0,$$

所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, 又 $h(3) = 1 - \ln 3 < 0$, $h(4) = 2 - 2\ln 2 > 0$,

所以存在唯一 $x_0 \in (3, 4)$, 使得 $h(x_0) = 0$, 即 $\ln x_0 = x_0 - 2$.

故当 $x \in (1, x_0)$ 时, $h(x) < 0$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

$$\text{所以 } g(x)_{\min} = g(x_0) = \frac{x_0 \ln x_0 + 2x_0 - 1}{x_0 - 1} = \frac{x_0^2 - 1}{x_0 - 1} = x_0 + 1,$$

即 $b < x_0 + 1$, 又 $x_0 \in (3, 4)$, 所以 $x_0 + 1 \in (4, 5)$, 因为 $b \in \mathbf{N}^*$, 所以 $b_{\max} = 4$.

解法 2: 半分离

$f(x) > b(x-1)$ 恒成立, 即 $f(x) = x \ln x + 2x - 1$ 图像恒在直线 $y = b(x-1)$ 的上方.

因为 $f'(x) = 3 + \ln x > 0$, $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, 且下凸;

直线 $y = b(x-1)$ 过定点 $(1, 0)$.

设过 $(1, 0)$ 的直线与 $f(x)$ 相切于点 $(x_0, f(x_0))$, 即 $(x_0, x_0 \ln x_0 + 2x_0 - 1)$.

切线斜率为 $f'(x_0)$, 所以 $b < f'(x_0)$.

$$\text{由 } \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - 1} = f'(x_0), \text{ 得 } \frac{x_0 \ln x_0 + 2x_0 - 1}{x_0 - 1} = 3 + \ln x_0, \text{ 化简整理得 } \ln x_0 = x_0 - 2,$$

所以 $f'(x_0) = 3 + \ln x_0 = 3 + (x_0 - 2) = x_0 + 1$. 故 $b < x_0 + 1$.

下面估计 x_0 的范围.

令 $h(x) = x - \ln x - 2$, 则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增;

又 $h(3) = 1 - \ln 3 < 0$, $h(4) = 2 - 2\ln 2 > 0$, 所以 $h(x)$ 的唯一零点 $x_0 \in (3, 4)$.

于是 $x_0 + 1 \in (4, 5)$, 因为 $b \in \mathbf{N}^*$, 所以 $b_{\max} = 4$.

【点睛】需要点睛意的是, 利用半分离参数求解含参问题, 需要结合二阶导数研究函数的凹凸性, 在解答题中有“以图代证”的嫌疑, 因而这个解法一般只适用于选择题或填空题.

【例8】设函数 $f(x) = e^x(2x-1) - ax + a$, 其中 $a < 1$. 若存在在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0) < 0$. 则 a 的取值范围是 ()

- A. $[-\frac{3}{2e}, 1)$ B. $[-\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$ C. $[\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$ D. $[\frac{3}{2e}, 1)$

【解析】解法1: 全分离参数 $f(x) < 0 \Leftrightarrow (x-1)a > e^x(2x-1)$

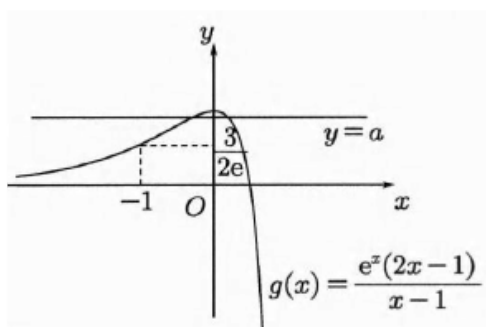
当 $x > 1$ 时, 有 $a > \frac{e^x(2x-1)}{x-1} > 1$, 这与题设矛盾, 舍去;

当 $x < 1$ 时, 有 $a < \frac{e^x(2x-1)}{x-1}$, 记 $g(x) = \frac{e^x(2x-1)}{x-1}$,

则 $g'(x) = \frac{e^x(2x+1)(x-1) - e^x(2x-1)}{(x-1)^2} = \frac{xe^x(2x-3)}{(x-1)^2} (x < 1)$,

当 $x < 0$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$,

故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 作出其大致图象如图所示.



由题意知, 存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0) < 0$, 即 $a < g(x_0)$,

由图易知 a 的取值范围是 $\frac{3}{2e} = g(-1) \leq a < 1$, 选D.

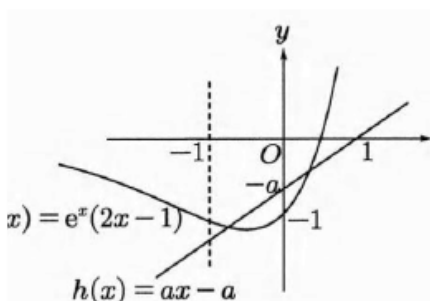
解法2: 半分离参数

设 $g(x) = e^x(2x-1)$, $h(x) = ax - a$, 由题意知, 存在唯一的整数 x_0 , 使得 $g(x_0) <$

$h(x_0)$, $g'(x) = e^x(2x+1)$, 当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > -\frac{1}{2}$ 时, $g'(x) > 0$,

则 $g(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增. 作出 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的大

致图象如图所示.



因为 $g(0) = -1 < -a = h(0)$, 故只需 $g(-1) \geq h(-1)$ 即可, 解得 $a \geq \frac{3}{2e}$, 则 a 的取

值范围是 $\frac{3}{2e} \leq a < 1$,

故选D.

强化训练

1. 设函数 $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = e^x(cx + d)$. 若曲线 $y = f(x)$ 和曲线 $y = g(x)$ 都过点 $P(0, 2)$, 且在点 P 处有相同的切线 $y = 4x + 2$.

(1) 求 a, b, c, d 的值;

(2) 若 $x \geq -2$ 时, $f(x) \leq kg(x)$, 求 k 的取值范围.

【解析】(1) $a = 4, b = 2, c = 2, d = 2$ (过程略).

(2) 由 (1) 知, $f(x) = x^2 + 4x + 2, g(x) = 2e^x(x + 1)$,

① 当 $x = -1$ 时, $f(x) = -1, g(x) = 0$, 此时 $f(x) \leq kg(x)$ 恒成立, 则 $k \in \mathbf{R}$;

② 当 $x \in [-2, -1)$ 时, $g(x) = 2e^x(x + 1) < 0, f(x) \leq kg(x)$ 可化为: $k \leq \frac{x^2 + 4x + 2}{2e^x(x + 1)}$,

令 $h(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{2e^x(x + 1)}$, 则 $h'(x) = \frac{-x(x + 2)^2}{2e^x(x + 1)^2} \geq 0$ 恒成立,

故 $h(x)$ 在区间 $[-2, -1)$ 上单调递增, 当 $x = -2$ 时, $h(x)$ 取最小值 e^2 , 故 $k \leq e^2$;

③ 当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $g(x) = 2e^x(x + 1) > 0, f(x) \leq kg(x)$ 可化为: $k \geq$

$$\frac{x^2 + 4x + 2}{2e^x(x + 1)},$$

令 $h(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{2e^x(x + 1)}$, 则 $h'(x) = \frac{-x(x + 2)^2}{2e^x(x + 1)^2}$,

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $h'(x) > 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$,

故当 $x = 0$ 时, $h(x)$ 取极大值 1, 故 $k \geq 1$.

综上所述: $k \in [1, e^2]$, 即 k 的取值范围是 $[1, e^2]$.

2. 设函数 $f(x) = e^x - ax - 2$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $a = 1$, k 为整数, 且当 $x > 0$ 时, $(x - k)f'(x) + x + 1 > 0$, 求 k 的最大值.

【解析】(1) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 无减区间;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty, \ln a)$, 单调递增区间是 $(\ln a, +\infty)$.

(2) $(x - k)f'(x) + x + 1 > 0$ 等价于 $k < \frac{x+1}{e^x-1} + x (x > 0)$ (1),

令 $g(x) = \frac{x+1}{e^x-1} + x$, 则 $g'(x) = \frac{e^x(e^x-x-2)}{(e^x-1)^2}$,

而函数 $f(x) = e^x - x - 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(1) < 0, f(2) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在唯一的零点.

故 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在唯一的零点.

设此零点为 a , 则 $a \in (1, 2)$.

当 $x \in (0, a)$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (a, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的最小值为 $g(a)$.

又由 $g'(a) = 0$, 可得 $e^a = a + 2$, 所以 $g(a) = a + 1 \in (2, 3)$.

由于 (1) 式等价于 $k < g(a)$, 故整数 k 的最大值为 2.

3 已知函数 $f(x) = \ln^2(1+x) - \frac{x^2}{1+x}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若不等式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+a} \leq e$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立 (其中 e 是自然对数的底数).

求 a 的最大值.

【解析】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{2\ln(1+x)}{1+x} - \frac{x^2+2x}{(1+x)^2} = \frac{2(1+x)\ln(1+x) - x^2 - 2x}{(1+x)^2}.$$

设 $g(x) = 2(1+x)\ln(1+x) - x^2 - 2x$, 则 $g'(x) = 2\ln(1+x) - 2x$.

令 $h(x) = 2\ln(1+x) - 2x$, 则 $h'(x) = \frac{2}{1+x} - 2 = \frac{-2x}{1+x}$.

当 $-1 < x < 0$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上为增函数,

当 $x > 0$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数.

所以 $h(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极大值, 而 $h(0) = 0$, 所以 $g'(x) < 0 (x \neq 0)$,

函数 $g(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上为减函数.

于是当 $-1 < x < 0$ 时, $g(x) > g(0) = 0$,

当 $x > 0$ 时, $g(x) < g(0) = 0$.

所以, 当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上为增函数.

当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数.

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$.

(2) 不等式 $(1 + \frac{1}{n})^{n+a} \leq e$ 等价于不等式 $(n+a)\ln(1 + \frac{1}{n}) \leq 1$.

由 $1 + \frac{1}{n} > 1$ 知, $a \leq \frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})} - n$.

设 $\varphi(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$,

则 $\varphi'(x) = -\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$.

由 (1) 知, $\ln^2(1+x) - \frac{x^2}{1+x} \leq 0$, 即 $(1+x)\ln^2(1+x) - x^2 \leq 0$.

所以 $\varphi'(x) < 0$, $x \in (0, 1]$, 于是 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1]$ 上为减函数.

故函数 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1]$ 上的最小值为 $\varphi(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/546045153144010104>