

广东省梅州市五华县水寨中学 2025 届高三第二次模拟考试数学试卷

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点，过 F_2 的直线交椭圆于 P, Q 两点.若

$|QF_2|, |PF_2|, |PF_1|, |QF_1|$ 依次构成等差数列，且 $|PQ| = |PF_1|$ ，则椭圆 C 的离心率为

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{105}}{15}$

2. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线与圆 $x^2 + (y-2)^2 = 2$ 至多有一个交点，则双曲线的离心率的取值范围是 ()

- A. $[\sqrt{2}, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $(1, \sqrt{2}]$ D. $(1, 2]$

3. 已知 a, b 是两条不同的直线， α, β 是两个不同的平面，且 $a \subset \alpha, b \subset \beta, a \parallel \beta, b \parallel \alpha$ ，则“ $a \parallel b$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x \mid y = \lg(1-x)\}$ ， $B = \left\{x \mid y = \frac{1}{\sqrt{x}}\right\}$ 则 $(\complement_U A) \cap B =$ ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $(0, 1)$ C. $(0, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

5. $\left| \frac{i^{2020}}{1-i} \right| =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{4}$

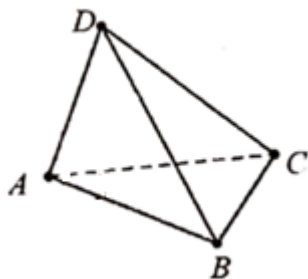
6. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 和点 $D(2, 0)$ ，直线 $x = ty - 2$ 与抛物线 C 交于不同两点 A, B ，直线 BD 与抛物线 C 交于另一点 E 。给出以下判断：

- ①以 BE 为直径的圆与抛物线准线相离；
②直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积为 -2 ；
③设过点 A, B, E 的圆的圆心坐标为 (a, b) ，半径为 r ，则 $a^2 - r^2 = 4$ 。

其中，所有正确判断的序号是 ()

- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

7. 如图, 已知三棱锥 $D-ABC$ 中, 平面 $DAB \perp$ 平面 ABC , 记二面角 $D-AC-B$ 的平面角为 α , 直线 DA 与平面 ABC 所成角为 β , 直线 AB 与平面 ADC 所成角为 γ , 则 ()



- A. $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ B. $\beta \geq \alpha \geq \gamma$ C. $\alpha \geq \gamma \geq \beta$ D. $\gamma \geq \alpha \geq \beta$

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的正项等比数列, 若 a_m 、 a_n 满足 $2a_n < a_m < 1024a_n$, 则 $(m-1)^2 + n$ 的最小值为 ()

- A. 3 B. 5 C. 6 D. 10

9. 已知复数 $z_1 = \cos 23^\circ + i \sin 23^\circ$ 和复数 $z_2 = \cos 37^\circ + i \sin 37^\circ$, 则 $z_1 \cdot z_2$ 为

- A. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ C. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

10. 已知 $\frac{|z|}{3} = \bar{z} - 2i$ (i 为虚数单位, $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数), 则复数 z 在复平面内对应的点在 () .

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

11. 已知函数 $f(x) = (x-a-1)e^x$, 若 $2^a = \log_2 b = c$, 则 ()

- A. $f(a) < f(b) < f(c)$ B. $f(b) < f(c) < f(a)$
C. $f(a) < f(c) < f(b)$ D. $f(c) < f(b) < f(a)$

12. 函数 $f(x) = x^3 - x^2 + x$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线为 l , 则 l 在 y 轴上的截距为 ()

- A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若关于 x 的不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(4^{x+1} + \lambda \cdot 2^x) < 0$ 在 $x > 0$ 时恒成立, 则实数 λ 的取值范围是_____

14. 平面向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$, 则 $|3\vec{a} - 2\vec{b}| =$ _____.

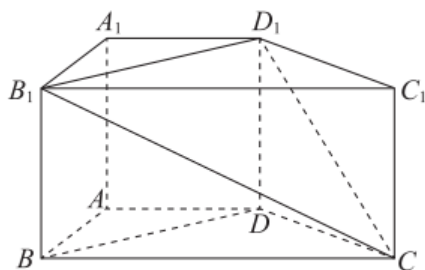
15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , 若 $\sin A + \sin B = \sqrt{3} \sin C$, 且 $c = 1$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

16. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1, a_n \cdot a_{n+1} = 2^n (n \in \mathbb{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n+1$ 项和为 $S_{2n+1} =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 满足 $AD \parallel BC$ ，且

$$AB = AD = AA_1 = 2, \quad BD = DC = 2\sqrt{2}.$$



(I) 求证: $AB \perp$ 平面 ADD_1A_1 ;

(II) 求直线 AB 与平面 B_1CD_1 所成角的正弦值.

18. (12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_1 + a_3 = 10$ ， $S_4 = 24$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分) 在 ① $A_5 = B_3$ ，② $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{4}{B_2}$ ，③ $B_5 = 35$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并解答.

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ($d > 0$)，等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 $2d$. 设 A_n, B_n 分别是数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和，且

$$b_1 = 3, A_2 = 3, \quad \underline{\hspace{2cm}},$$

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = 2^{a_n} + \frac{3}{b_n b_{n+1}}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

20. (12 分) 已知直线 $y = x - 1$ 是曲线 $f(x) = a \ln x$ 的切线.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $t \leq 3 - 4 \ln 2$ ，证明: 对于任意 $m > 0$ ， $h(x) = mx - \sqrt{x} + f(x) + t$ 有且仅有一个零点.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x - 1| - |x + 2|$.

(1) 求不等式 $f(x) \leq 2$ 的解集 A ;

(2) 若不等式 $f(x) \leq x^2 + 2x - m$ 对 $x \in A$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

22. (10 分) 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\cos\alpha \\ y=\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数, $0\leq\alpha<2\pi$). 以坐标原点

O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{3}$ ($\rho\in\mathbf{R}$), 曲线 C 与直线 l 其中的一个交点

为 A , 且点 A 极径 $\rho_0\neq 0$. 极角 $0\leq\theta_\rho<\frac{\pi}{2}$

(1) 求曲线 C 的极坐标方程与点 A 的极坐标;

(2) 已知直线 m 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y=0$, 直线 m 与曲线 C 相交于点 B (异于原点 O), 求 $\triangle AOB$ 的面积.

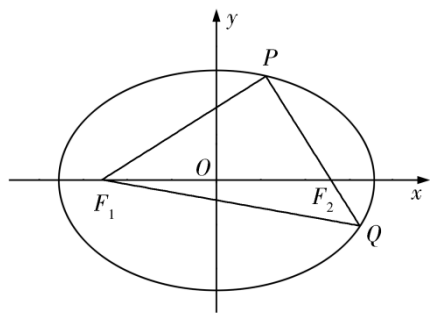
参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

如图所示, 设 $|QF_2|, |PF_2|, |PF_1|, |QF_1|$ 依次构成等差数列 $\{a_n\}$, 其公差为 d .



根据椭圆定义得 $a_1+a_2+a_3+a_4=4a$, 又 $a_1+a_2=a_3$, 则 $\begin{cases} a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)=4a \\ a_1+(a_1+d)=a_1+2d \end{cases}$, 解得 $d=\frac{2}{5}a$,

$a_1=\frac{2}{5}a, a_2=\frac{4}{5}a, a_3=\frac{6}{5}a, a_4=\frac{8}{5}a$. 所以 $|QF_1|=\frac{8}{5}a, |PF_1|=\frac{6}{5}a, |PF_2|=\frac{4}{5}a, |PQ|=\frac{6}{5}a$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 和 $\triangle PF_1Q$ 中, 由余弦定理得 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{(\frac{4}{5}a)^2+(\frac{6}{5}a)^2-(2c)^2}{2\cdot\frac{4}{5}a\cdot\frac{6}{5}a}=\frac{(\frac{6}{5}a)^2+(\frac{6}{5}a)^2-(\frac{8}{5}a)^2}{2\cdot\frac{6}{5}a\cdot\frac{6}{5}a}$, 整理解得

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{105}}{15}$. 故选 D.

2、C

【解析】

求得双曲线的渐近线方程，可得圆心 $(0, 2)$ 到渐近线的距离 $d \geq \sqrt{2}$ ，由点到直线的距离公式可得 a 的范围，再由离心率公式计算即可得到所求范围。

【详解】

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的一条渐近线为 $y = \frac{1}{a}x$ ，即 $x - ay = 0$ ，

由题意知，直线 $x - ay = 0$ 与圆 $x^2 + (y - 2)^2 = 2$ 相切或相离，则 $d = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} \geq \sqrt{2}$ ，

解得 $a \geq 1$ ，因此，双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} \in (1, \sqrt{2}]$ 。

故选：C.

【点睛】

本题考查双曲线的离心率的范围，注意运用圆心到渐近线的距离不小于半径，考查化简整理的运算能力，属于中档题。

3、D

【解析】

根据面面平行的判定及性质求解即可。

【详解】

解： $a \subset \alpha$ ， $b \subset \beta$ ， $a \parallel \beta$ ， $b \parallel \alpha$ ，

由 $a \parallel b$ ，不一定有 $a \parallel \beta$ ， a 与 β 可能相交；

反之，由 $a \parallel \beta$ ，可得 $a \parallel b$ 或 a 与 b 异面，

$\therefore a, b$ 是两条不同的直线， α, β 是两个不同的平面，且 $a \subset \alpha$ ， $b \subset \beta$ ， $a \parallel \beta$ ， $b \parallel \alpha$ ，

则“ $a \parallel b$ ”是“ $a \parallel \beta$ ”的既不充分也不必要条件。

故选：D.

【点睛】

本题主要考查充分条件与必要条件的判断，考查面面平行的判定与性质，属于基础题。

4、D

【解析】

根据函数定义域的求解方法可分别求得集合 A, B ，由补集和交集定义可求得结果。

【详解】

$$Q A = \{x | 1 - x > 0\} = (-\infty, 1), B = (0, +\infty), \therefore \complement_U A = [1, +\infty),$$

$$\therefore (\complement_U A) \cap B = [1, +\infty).$$

故选：D.

【点睛】

本题考查集合运算中的补集和交集运算问题，涉及到函数定义域的求解，属于基础题.

5、A

【解析】

利用复数的乘方和除法法则将复数 $\frac{i^{2020}}{1-i}$ 化为一般形式，结合复数的模长公式可求得结果.

【详解】

$$i^{2020} = (i^4)^{505} = 1^{505} = 1, \quad \frac{i^{2020}}{1-i} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$\text{因此, } \left| \frac{i^{2020}}{1-i} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查复数模长的计算，同时也考查了复数的乘方和除法法则的应用，考查计算能力，属于基础题.

6、D

【解析】

对于①，利用抛物线的定义，利用 $d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{|BF| + |EF|}{2} > \frac{|BE|}{2} = R$ 可判断；

对于②，设直线 DE 的方程为 $x = my + 2$ ，与抛物线联立，用坐标表示直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积，即可判断；

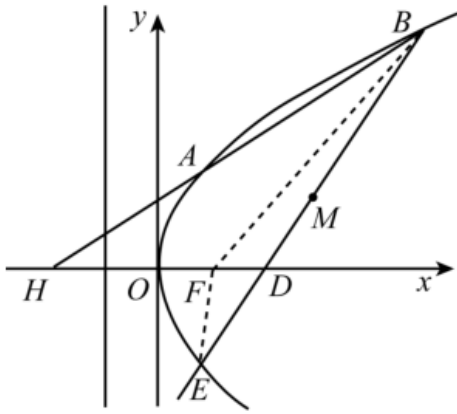
对于③，将 $x = ty - 2$ 代入抛物线 C 的方程可得， $y_A y_1 = 8$ ，从而， $y_A = -y_2$ ，利用韦达定理可得

$$|BE|^2 = 16m^4 + 48m^2 + 32, \text{ 再由 } r^2 = |MN|^2 + \left(\frac{|BE|}{2}\right)^2, \text{ 可用 } m \text{ 表示 } r^2, \text{ 线段 } BE \text{ 的中垂线与 } x \text{ 轴的交点 (即圆心}$$

N) 横坐标为 $2m^2 + 4$ ，可得 a ，即可判断.

【详解】

如图，设 F 为抛物线 C 的焦点，以线段 BE 为直径的圆为 M ，则圆心 M 为线段 BE 的中点.



设 B ， E 到准线的距离分别为 d_1 ， d_2 ， $\odot M$ 的半径为 R ，点 M 到准线的距离为 d ，

显然 B ， E ， F 三点不共线，

$$\text{则 } d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{|BF| + |EF|}{2} > \frac{|BE|}{2} = R. \text{ 所以①正确.}$$

由题意可设直线 DE 的方程为 $x = my + 2$ ，

代入抛物线 C 的方程，有 $y^2 - 4my - 8 = 0$ ．

设点 B ， E 的坐标分别为 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) ，

$$\text{则 } y_1 + y_2 = 4m, \quad y_1 y_2 = -8.$$

$$\text{所以 } x_1 x_2 = (my_1 + 2)(my_2 + 2) = m^2 y_1 y_2 + 2m(y_1 + y_2) + 4 = 4.$$

$$\text{则直线 } OB \text{ 与直线 } OE \text{ 的斜率乘积为 } \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -2. \text{ 所以②正确.}$$

将 $x = ty - 2$ 代入抛物线 C 的方程可得， $y_A y_1 = 8$ ，从而， $y_A = -y_2$ ．根据抛物线的对称性可知，

A ， E 两点关于 x 轴对称，所以过点 A ， B ， E 的圆的圆心 N 在 x 轴上．

$$\text{由上，有 } y_1 + y_2 = 4m, \quad x_1 + x_2 = 4m^2 + 4,$$

$$\text{则 } |BE|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 + (y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2 = 16m^4 + 48m^2 + 32.$$

所以，线段 BE 的中垂线与 x 轴的交点（即圆心 N ）横坐标为 $2m^2 + 4$ ，所以 $a = 2m^2 + 4$ ．

$$\text{于是， } r^2 = |MN|^2 + \left(\frac{|BE|}{2}\right)^2 = \left(2m^2 + 4 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + 4m^4 + 12m^2 + 8,$$

$$\text{代入 } x_1 + x_2 = 4m^2 + 4, \quad y_1 + y_2 = 4m, \text{ 得 } r^2 = 4m^4 + 16m^2 + 12,$$

$$\text{所以 } a^2 - r^2 = (2m^2 + 4)^2 - (4m^4 + 16m^2 + 12) = 4.$$

所以③正确.

故选: D

【点睛】

本题考查了抛物线的性质综合,考查了学生综合分析,转化划归,数形结合,数学运算的能力,属于较难题.

7、 A

【解析】

作 $DD' \perp AB$ 于 D' , $DE \perp AC$ 于 E , 分析可得 $\alpha = \angle DED'$, $\beta = \angle DAD'$, 再根据正弦的大小关系判断分析得 $\alpha \geq \beta$,

再根据线面角的最小性判定 $\beta \geq \gamma$ 即可.

【详解】

作 $DD' \perp AB$ 于 D' , $DE \perp AC$ 于 E .

因为平面 $DAB \perp$ 平面 ABC , $DD' \perp$ 平面 ABC . 故 $AC \perp DE$, $AC \perp DD'$,

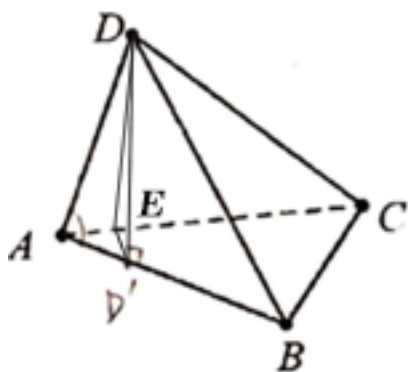
故 $AC \perp$ 平面 DED' . 故二面角 $D-AC-B$ 为 $\alpha = \angle DED'$.

又直线 DA 与平面 ABC 所成角为 $\beta = \angle DAD'$, 因为 $DA \geq DE$,

故 $\sin \angle DED' = \frac{DD'}{DE} \geq \frac{DD'}{DA} = \sin \angle DAD'$. 故 $\alpha \geq \beta$, 当且仅当 A, E 重合时取等号.

又直线 AB 与平面 ADC 所成角为 γ , 且 $\beta = \angle DAD'$ 为直线 AB 与平面 ADC 内的直线 AD 所成角, 故 $\beta \geq \gamma$, 当且仅当 $BD \perp$ 平面 ADC 时取等号.

故 $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.



故选: A

【点睛】

本题主要考查了线面角与线线角的大小判断,需要根据题意确定角度的正弦的关系,同时运用线面角的最小性进行判定.属于中档题.

8、 B

【解析】

利用等比数列的通项公式和指数幂的运算法则、指数函数的单调性求得 $1 < m - n < 10$ 再根据此范围求 $(m-1)^2 + n$ 的最小值.

【详解】

Q 数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的正项等比数列, a_m 、 a_n 满足 $2a_n < a_m < 1024a_n$,

由等比数列的通项公式得 $2a_1 \cdot 2^{n-1} < a_1 \cdot 2^{m-1} < 1024a_1 \cdot 2^{n-1}$, 即 $2^n < 2^{m-1} < 2^{n+9}$,

$\therefore 2 < 2^{m-n} < 2^{10}$, 可得 $1 < m - n < 10$, 且 m 、 n 都是正整数,

求 $(m-1)^2 + n$ 的最小值即求在 $1 < m - n < 10$, 且 m 、 n 都是正整数范围下求 $m-1$ 最小值和 n 的最小值, 讨论 m 、 n 取值.

$\therefore$ 当 $m=3$ 且 $n=1$ 时, $(m-1)^2 + n$ 的最小值为 $(3-1)^2 + 1 = 5$.

故选: B.

【点睛】

本题考查等比数列的通项公式和指数幂的运算法则、指数函数性质等基础知识, 考查数学运算求解能力和分类讨论思想, 是中等题.

9、C

【解析】

利用复数的三角形式的乘法运算法则即可得出.

【详解】

$$z_1 z_2 = (\cos 23^\circ + i \sin 23^\circ) \cdot (\cos 37^\circ + i \sin 37^\circ) = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

故答案为 C.

【点睛】

熟练掌握复数的三角形式的乘法运算法则是解题的关键, 复数问题高考必考, 常见考点有: 点坐标和复数的对应关系, 点的象限和复数的对应关系, 复数的加减乘除运算, 复数的模长的计算.

10、D

【解析】

设 $z = a + bi$, ($a, b \in R$), 由 $\frac{|z|}{3} = \bar{z} - 2i$, 得 $\bar{z} - 2i = a - (b+2)i = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{3}$, 利用复数相等建立方程组即可.

【详解】

设 $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$, 则 $\bar{z} - 2i = a - (b+2)i = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{3}$, 所以 $\begin{cases} a = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{3} \\ b + 2 = 0 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ b = -2 \end{cases}$, 故 $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - 2i$, 复数 z 在复平面内对应的点为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -2)$, 在第四象限.

故选: D.

【点睛】

本题考查复数的几何意义, 涉及到共轭复数的定义、复数的模等知识, 考查学生的基本计算能力, 是一道容易题.

11、C

【解析】

利用导数求得 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上递增, 结合 $y = c$ 与 $y = 2^x, y = \log_2 x, y = x$ 图象, 判断出 a, b, c 的大小关系, 由此比较出 $f(a), f(b), f(c)$ 的大小关系.

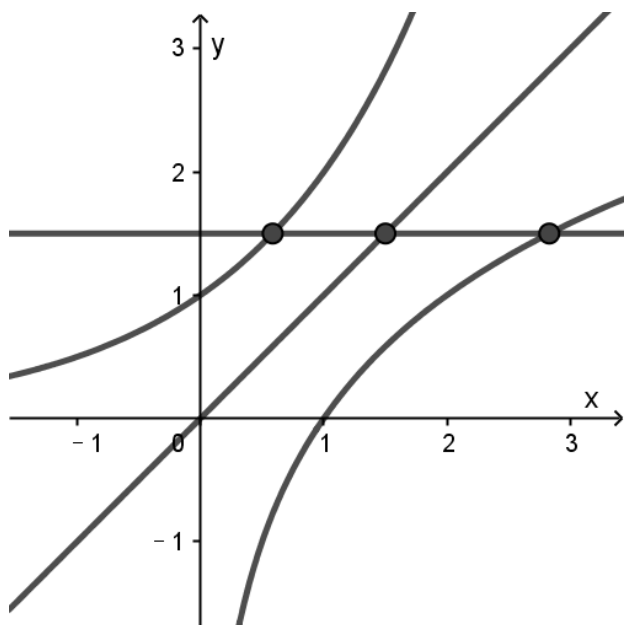
【详解】

因为 $f'(x) = (x - a)e^x$, 所以 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增;

在同一坐标系中作 $y = c$ 与 $y = 2^x, y = \log_2 x, y = x$ 图象,

由 $2^a = \log_2 b = c$, 可得 $a < c < b$, 故 $f(a) < f(c) < f(b)$.

故选: C



【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/546142055041011052>