

数学

(120 分钟 150 分)

一、单项选择题(本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

$$A = \left\{ x \in \mathbf{N} \mid -1 < x^{\frac{1}{3}} < \sqrt{2} \right\}$$

1. 已知集合 $A = \left\{ x \in \mathbf{N} \mid -1 < x^{\frac{1}{3}} < \sqrt{2} \right\}$, 则集合 A 的子集个数是 ()

- A. 4 B. 7 C. 8 D. 16

2. 已知复数 $z_1 = (1+2i)^2$, $i \cdot z_2 = 4-3i$, 则, z_1 和 z_2 在复平面内对应的点关于 ()

- A. 坐标原点对称 B. x 轴对称 C. y 轴对称 D. 直线 $y=x$ 对称

3. 已知向量 $\vec{a} = (x+4, x)$, $\vec{b} = (x, 2)$, 则 “ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ” 的一个充分条件是 ()

- A. $x=4$ B. $x=2$ C. $x=-3$ D. $x=-6$

4. 圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$ 关于直线 $l: x - y + 2 = 0$ 对称的圆的方程为 ()

- A. $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 10$ B. $(x-4)^2 + (y+6)^2 = 10$
C. $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 10$ D. $(x-5)^2 + (y+7)^2 = 10$

5. 已知 $\cos(x+y) = \sin(x-y)$, $\tan(x-y) = 2$, 则 $\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\tan y} =$ ()

- A. -4 B. $-\frac{4}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 4

6. 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AD=2$, $AA_1=1$, 点 E, F 分别是 AB, BC_1 的中点, 则直线 EF 与 AD 所成夹角的余弦值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

7. 定义: 若函数 $y=f(x)$ 存在 $n-1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 个极值点, 则称 $y=f(x)$ 为 n 折函数. 例如, 函数 $f(x)=x^3-3x$ 为 3 折函数. 已知函数 $f(x)=\cos 2x+x \ln x-x$, 则 $f(x)$ 为 () (参考数据: $e \approx 2.718, \pi \approx 3.14$)

- A. 3 折函数 B. 4 折函数 C. 5 折函数 D. 6 折函数

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2, 其左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 双曲线 C 上一点 P

到其两条渐近线的距离之积为 $\frac{3a^2}{2}$ ，若 $\angle F_1PF_2 = 120^\circ$ ，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为（ ）

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

二、多项选择题（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.）

9. 一组单调递增数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的极差，平均数，中位数，方差依次为 $\Delta x, \bar{x}, m, s_1^2$ ，构造一组新的数据 $y_1, y_2, \dots, y_n$ （其中 $y_i = 3x_i - 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ ），新数据的极差，平均数，中位数，方差依次为 $\Delta y, \bar{y}, n, s_2^2$ ，则下列结论中说法正确的（ ）

- A. $\Delta y = 3\Delta x$ B. 若 $\bar{x} = \bar{y}$ ，则 $\bar{x} = 0$
C. 若 $m + n = 3$ ，则 $n = 2$ D. 若 $s_1 + s_2 = 4$ ，则 $s_1 = 1$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足 $a_1 = 2, a_3 = 8, a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n (n \geq 2)$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 2, b_{n+1} = 2b_n$ ，记 $c_n = a_{b_n}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，则下列说法正确的是（ ）

- A. $S_n = \frac{3n^2 + n}{2}$ B. $T_n = 3 \cdot 2^{n+1} - 7$
C. 若 $T_n \leq 2025$ ，则 n 的最大值为 8 D. 满足 $2S_n \geq b_n$ 的最大 n 值为 8

11. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点（异于坐标原点 O ），则下列说法正确的是（ ）

- A. 以 AF 为直径的圆与 y 轴相切
B. 若直线 l 过点 F ，则 $|AB|$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$
C. 若直线 l 的斜率为 2，且 $S_{\triangle OFA} = 2S_{\triangle OFB}$ ，则 $|AB| = 3\sqrt{5}$
D. 若 $OA \perp OB$ ，则直线 l 过定点 $(4, 0)$

三、填空题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.）

12. 已知 $\left(ax + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中的第 2 项的系数与第 2 项二项式系数之和为 198，则展开式中的常数项为 _____.

13. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足对任意的 $m \in (0, +\infty)$ ，都有 $f(m+x) = f(m-x)$ 成立，且当 $x > m$ 时，

$f(x) = m \ln x - x$ ，则不等式 $f(2x+m) > f(x+m-1)$ 的解集是_____.

14. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1}a_n + a_{n+1} - a_n = 4$ ，若存在非零常数 a ，使得数列 $\left\{\frac{a_n + a}{a_n - a}\right\}$ 为等比数列，则 $a =$ _____；数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n =$ _____.

四、解答题（本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

15. 已知 $a_1 = \frac{\pi}{4}$, $a_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan a_{n+1} = \frac{1}{\cos a_n} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求 $\tan a_1, \tan a_2, \tan a_3$;

(2) 证明: $\{\tan^2 a_n\}$ 是等差数列, 并求出 $\tan^2 a_n$;

(3) 设 $b_n = \frac{1}{\tan a_n + \tan a_{n+1}}$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

16. 某市为了丰富市民的娱乐, 在我国的传统节日春节期间组织系列活动. 在广泛宣传之下, 有 1000 名市民参加本次活动. 组委会按照参赛市民的年龄, 将参加活动的市民分成“青年组”和“老龄组”, 得到如下 2×2 列联表:

	男性市民	女性市民	合计
青年组	400	200	600
老年组	250	150	400
合计	650	350	1000

(1) 是否有 75% 的把握认为“参加本次活动的市民与其性别有关”?

(2) 采用分层抽样的方法从青年组中抽取 6 人, 再从这 6 人中随机抽取 2 人进行“采访”, 记这 2 人中“女性市民”的人数为 X , 求 X 的分布列及期望 $E(X)$;

(3) 若本次活动有慢跑、冬泳、滑冰三个可选项目, 现组委会准备从来自“向阳小区”的 4 名男性市民和 2 名女性市民中随机抽取 2 人参加这三项活动, 其中每名女性市民至多从中选择参加 2 项活动, 且选择参加 1 项或 2 项的可能性均为 $\frac{1}{2}$, 每名男性市民至少从中选择参加 2 项活动, 且选择参加 2 项或 3 项的可能性也均为 $\frac{1}{2}$, 每人每参加 1 项活动可获得“体育明星”积分 3 分, 选择参加几项活动彼此互不影响, 记随机选取的 2 人的得分之和为 Y , 求 Y 的期望 $E(Y)$.

参考公式： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$.

参考数据：

$P(\chi^2 \geq x_a)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05
x_a	0.46	0.71	1.32	2.07	2.71	3.84

17. 设函数 $f(x) = \ln x + ax, a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x) \leq x+1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F_1(-1,0), F_2(1,0)$ ，动点 P 到点 F_1 和 F_2 的距离之和为 4. 记动点 P 的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程；

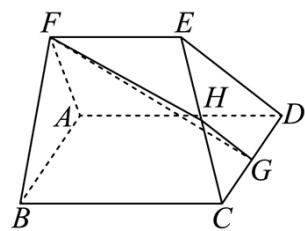
(2) 设直线 l 与曲线 C 交于 D, E 两点.

①若点 $A(0, \sqrt{3})$ ，直线 l 过点 F_1 且与直线 AF_2 垂直，求 $\triangle ADE$ 的周长；

②若 $OD \perp OE$ ，求 $\triangle ODE$ 面积的取值范围.

19. 如图多面体 $ABCDEF$ 中，面 $FAB \perp$ 面 $ABCD$ ， $\triangle FAB$ 为等边三角形，四边形 $ABCD$ 为正方形，

$EF \parallel BC$ ，且 $EF = \frac{3}{4}BC = 3$ ， H, G 分别为 CE, CD 的中点.



(1) 证明： $BF \perp AD$ ；

(2) 求平面 $BCEF$ 与平面 FGH 所成角的余弦值；

(3) 作平面 FHG 与平面 $ABCD$ 的交线，记该交线与直线 AD 交点为 P ，写出 $\frac{AP}{AD}$ 的值（不需要说明理由，保留作图痕迹）.

数学

(120 分钟 150 分)

一、单项选择题(本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

1. 已知集合 $A = \left\{ x \in \mathbf{N} \mid -1 < x^{\frac{1}{3}} < \sqrt{2} \right\}$, 则集合 A 的子集个数是 ()

- A. 4 B. 7 C. 8 D. 16

【答案】C

【解析】

【分析】解不等式求得集合 A, 利用子集的定义即得.

【详解】因为 $-1 < x^{\frac{1}{3}} < \sqrt{2}$, 所以 $-1 < x < 2\sqrt{2}$, 又 $x \in \mathbf{N}$, 所以 $A = \{0, 1, 2\}$,

所以 A 的子集有 $2^3 = 8$ 个.

故选: C.

2. 已知复数 $z_1 = (1 + 2i)^2$, $i \cdot z_2 = 4 - 3i$, 则, z_1 和 z_2 在复平面内对应的点关于 ()

- A. 坐标原点对称 B. x 轴对称 C. y 轴对称 D. 直线 $y = x$ 对称

【答案】B

【解析】

【分析】利用复数的运算和几何意义求解即可.

【详解】因为 $z_1 = (1 + 2i)^2$, 所以 $z_1 = -3 + 4i$, 对应的点为 $(-3, 4)$,

又 $i \cdot z_2 = 4 - 3i$, 所以 $z_2 = \frac{4 - 3i}{i} = -3 - 4i$, 对应的点为 $(-3, -4)$,

点 $(-3, 4)$ 与点 $(-3, -4)$ 关于 x 轴对称.

故选: B.

3. 已知向量 $\vec{a} = (x + 4, x)$, $\vec{b} = (x, 2)$, 则 “ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ” 的一个充分条件是 ()

- A. $x = 4$ B. $x = 2$ C. $x = -3$ D. $x = -6$

【答案】A

【解析】

【分析】由 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 结合平面向量共线的坐标表示可求得 x 的值, 再结合充分条件的定义判断即可.

【详解】因为向量 $\vec{a} = (x+4, x)$, $\vec{b} = (x, 2)$ 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $2 \times (x+4) - x^2 = 0$, 即 $x^2 - 2x - 8 = 0$,

解得 $x = -2$ 或 $x = 4$,

所以, “ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ” 的一个充分条件 “ $x = 4$ ”.

故选: A.

4. 圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$ 关于直线 $l: x - y + 2 = 0$ 对称的圆的方程为 ()

A. $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 10$

B. $(x-4)^2 + (y+6)^2 = 10$

C. $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 10$

D. $(x-5)^2 + (y+7)^2 = 10$

【答案】C

【解析】

【分析】求得圆 C 的圆心与半径, 利用对称求得圆心 C 关于直线 l 的对称点, 可求对称圆的方程.

【详解】方程 $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$, 可化为 $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 10$,

则圆心 C 的坐标为 $(1, -3)$, 半径 $r = \sqrt{10}$,

设圆 C 关于直线 l 对称的圆的圆心为 $M(a, b)$, 则半径仍为 $\sqrt{10}$,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{a+1}{2} - \frac{b-3}{2} + 2 = 0 \\ \frac{b+3}{a-1} \times 1 = -1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = -5 \\ b = 3 \end{cases}.$$

所以圆 M 的方程为 $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 10$.

故选: C.

5. 已知 $\cos(x+y) = \sin(x-y)$, $\tan(x-y) = 2$, 则 $\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\tan y} =$ ()

A. -4

B. $-\frac{4}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】根据两角和与差的正、余弦公式, 结合同角的商数关系和两角差的正切公式化简计算即可求解.

【详解】因为 $\cos(x+y) = \sin(x-y)$,

所以 $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \sin x \cos y - \cos x \sin y$,

所以 $1 - \tan x \tan y = \tan x - \tan y$.

又 $\tan(x - y) = 2$, 即 $\frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} = 2$,

得 $\frac{1 - \tan x \tan y}{1 + \tan x \tan y} = 2$, 解得 $\tan x \tan y = -\frac{1}{3}$, $\tan x - \tan y = \frac{4}{3}$,

所以 $\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\tan y} = \frac{\tan y - \tan x}{\tan x \tan y} = 4$.

故选: D.

6. 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = AD = 2, AA_1 = 1$, 点 E, F 分别是 AB, BC_1 的中点, 则直线 EF 与 AD 所成夹角的余弦值为 ()

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】取 CD 的中点 M , 连接 EM, FM , 可证明 $AD // EM$, 进而可得 $\angle MEF$ 是直线 AD 与 EF 所成的角, 取 EM 的中点 N , 连接 NF , 则 $FN \perp EM$, 可求得 EN, EF , 可求直线 EF 与 AD 所成夹角的余弦值.

【详解】如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 取 CD 的中点 M , 连接 EM, FM ,

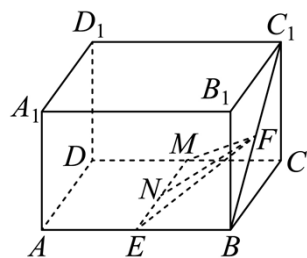
又因为 E 是 AB 的中点, 所以 $AE = DM$, 且 $AE // DM$,

所以四边形 $AEMD$ 是平行四边形, 所以 $AD // EM$, 且 $AD = EM = 2$,

所以 EM 与 EF 所成的角就是 AD 与 EF 所成的角, 即 $\angle MEF$.

因为 F 是 BC_1 的中点, 所以 F 是四边形 BCC_1B_1 的中心, 所以 $EF = MF$,

取 EM 的中点 N , 连接 NF , 则 $FN \perp EM$, 且 $EN = 1$,



在矩形 BCC_1B_1 中, $BC = 2, CC_1 = 1$, 所以 $BC_1 = \sqrt{5}$, 则 $BF = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

在 $\text{Rt}\triangle EBF$ 中, $BE = 1, EF = \sqrt{BE^2 + BF^2} = \frac{3}{2}$,

所以在 $\text{Rt}\triangle ENF$ 中, $\cos\angle MEF = \frac{EN}{EF} = \frac{2}{3}$.

故选: B.

7. 定义: 若函数 $y = f(x)$ 存在 $n-1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 个极值点, 则称 $y = f(x)$ 为 n 折函数. 例如, 函数

$f(x) = x^3 - 3x$ 为 3 折函数. 已知函数 $f(x) = \cos 2x + x \ln x - x$, 则 $f(x)$ 为 () (参考数据: $e \approx 2.718, \pi \approx 3.14$)

A. 3 折函数

B. 4 折函数

C. 5 折函数

D. 6 折函数

【答案】D

【解析】

【分析】求函数的导数, 函数 $f(x)$ 的极值点问题, 等价于 $f'(x)$ 的零点问题, 转化为函数 $g(x) = \ln x$ 与函数 $h(x) = 2\sin 2x$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上的交点个数问题.

【详解】因为 $f(x) = \cos 2x + x \ln x - x$, 所以 $f'(x) = -2\sin 2x + \ln x$.

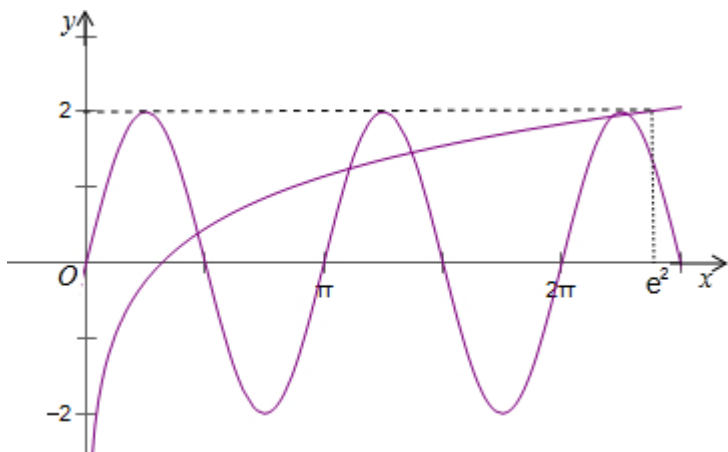
函数 $f(x)$ 的极值点问题, 等价于 $f'(x)$ 的零点问题, 令 $f'(x) = 0$, 得 $\ln x = 2\sin 2x$,

所以将函数 $f'(x)$ 的零点个数问题,

转化为函数 $g(x) = \ln x$ 与函数 $h(x) = 2\sin 2x$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上的交点个数问题.

因为 $\frac{9\pi}{4} < e^2 < \frac{13\pi}{4}$, 所以 $h(2\pi) < h(e^2) < h\left(\frac{9\pi}{4}\right) = 2$, 又 $g(e^2) = 2$,

在同一坐标系中, 画出函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的图象,



由图象可知，函数 $g(x) = \ln x$ 与函数 $h(x) = 2\sin 2x$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上有 5 个交点，

所以函数 $f(x)$ 为 6 折函数.

故选：D.

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2，其左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，双曲线 C 上一点 P

到其两条渐近线的距离之积为 $\frac{3a^2}{2}$ ，若 $\angle F_1 P F_2 = 120^\circ$ ，则 $\triangle F_1 P F_2$ 的面积为 ()

A. $\sqrt{3}$

B. $\sqrt{6}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $4\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】由已知可求得双曲线的渐近线方程，进而根据题意可得 $\frac{a^2 b^2}{c} = \frac{3a^2}{2}$ ，结合离心率可求得 a, b, c ，

设点 P 在右支上， $|PF_2| = m$ ，由双曲线的定义可知，再利用余弦定理列方程可得

$16 = (m+2)^2 + m^2 + (m+2)m$ ，求解即可求得 $\triangle F_1 P F_2$ 的面积.

【详解】由题意知双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，即 $bx \pm ay = 0$.

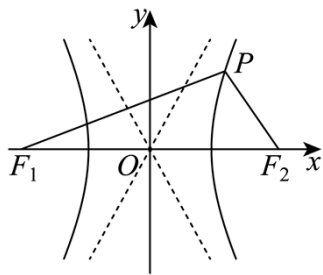
设 $P(x_0, y_0)$ ，所以 $\frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2|}{c} = \frac{3a^2}{2}$ ，

因为点 P 在双曲线上，所以 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ ，所以 $b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = a^2 b^2$ ，

所以 $\frac{a^2 b^2}{c} = \frac{3a^2}{2}$ ，即 $2b^2 = 3c$ ，因为 $\frac{c}{a} = 2$ ，所以 $c = 2a$ ，

又 $c^2 = a^2 + b^2$ ，所以 $b^2 = 3a^2$ ，所以 $2 \times 3a^2 = 3 \times 2a$ ，解得 $a = 1, b^2 = 3, c = 2$ 。

由双曲线的对称性，不妨设点 P 在双曲线的右支上，令 $|PF_2| = m$ ，则 $|PF_1| = 2a + m = m + 2$ ，



因为 $\angle F_1PF_2 = 120^\circ$ ，所以由余弦定理得 $|F_1F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| \cos 120^\circ$ ，

即 $16 = (m+2)^2 + m^2 + (m+2)m$ ，化简得 $(m+2)m = 4$ ，

所以 $\triangle F_1PF_2$ 的面积 $S = \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| \sin \angle F_1PF_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(m+2)m = \sqrt{3}$ 。

故选：A。

【点睛】关键点点睛：关键在于利用余弦定理可求得 $(m+2)m = 4$ ，进而利用三角形面积公式求得面积。

二、多项选择题（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分。）

9. 一组单调递增数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的极差，平均数，中位数，方差依次为 $\Delta x, \bar{x}, m, s_1^2$ ，构造一组新的数据 $y_1, y_2, \dots, y_n$ （其中 $y_i = 3x_i - 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ ），新数据的极差，平均数，中位数，方差依次为 $\Delta y, \bar{y}, n, s_2^2$ ，则下列结论中说法正确的（ ）

A. $\Delta y = 3\Delta x$

B. 若 $\bar{x} = \bar{y}$ ，则 $\bar{x} = 0$

C. 若 $m + n = 3$ ，则 $n = 2$

D. 若 $s_1 + s_2 = 4$ ，则 $s_1 = 1$

【答案】ACD

【解析】

【分析】由已知及极差、中位数的定义判断 A、C；由样本中心在 $y_i = 3x_i - 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ 上判断 B；由方差的性质判断 D。

【详解】对于 A，因为数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 单调递增，所以数据 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 也单调递增，

所以极差 $\Delta x = x_n - x_1, \Delta y = y_n - y_1 = 3x_n - 1 - (3x_1 - 1) = 3(x_n - x_1) = 3\Delta x$ ，正确；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/547012060042010044>