

2024 届榆林市吴堡县吴堡中学高三下学期 5 月中旬仿真考试数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 x_1, x_2 为 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x - \cos\omega x (\omega > 0)$ 的两个零点，且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 1，则 $\omega =$ ()

- A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{4}$

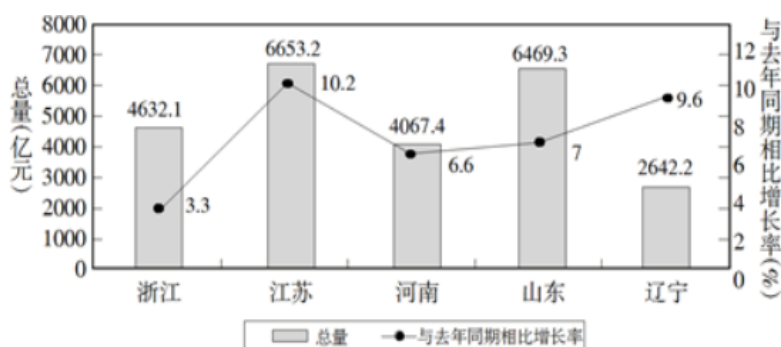
2. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ，过点 F 且与 x 轴垂直的直线交两渐近线于 M, N 两点，与双曲线的其中一个交点为 P ，若 $\vec{OP} = \lambda \vec{OM} + \mu \vec{ON} (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ ，且 $\lambda\mu = \frac{6}{25}$ ，则该双曲线的离心率为()

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{5\sqrt{2}}{12}$ C. $\frac{5\sqrt{3}}{12}$ D. $\frac{5\sqrt{6}}{12}$

3. 已知复数 $z_1 = 1 + ai (a \in \mathbb{R})$ ， $z_2 = 1 + 2i$ (i 为虚数单位)，若 $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数，则 $a =$ ()

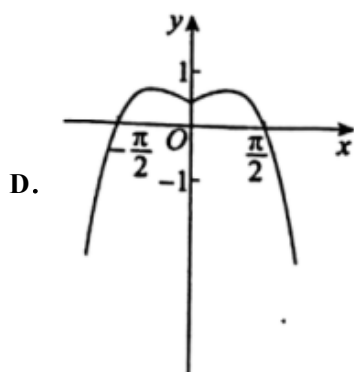
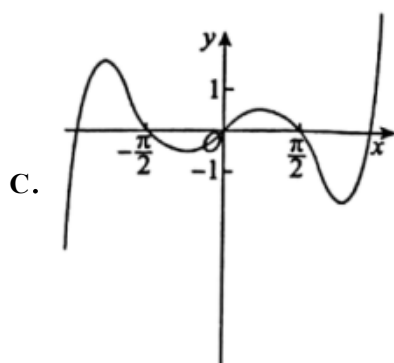
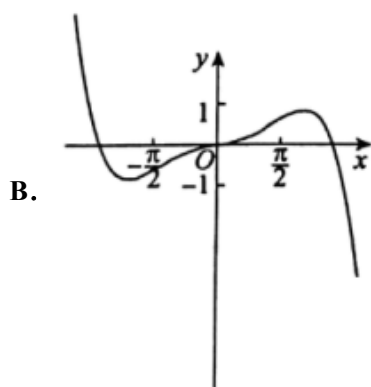
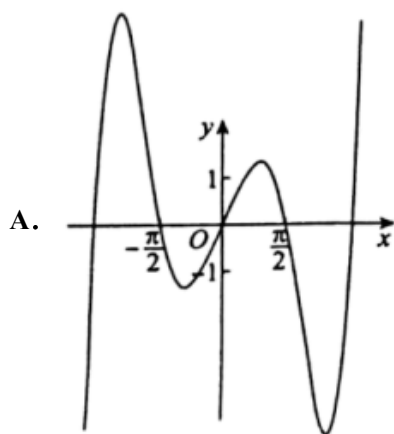
- A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

4. 如图所示是某年第一季度五省 GDP 情况图，则下列说法中不正确的是 ()

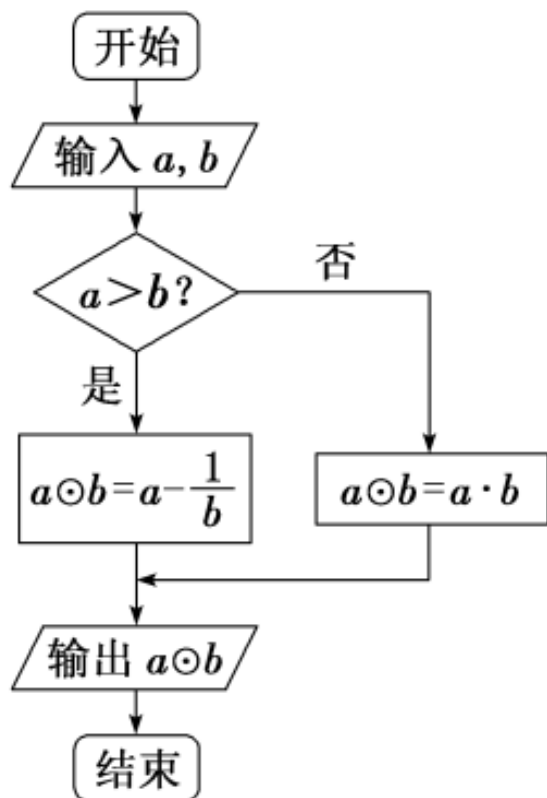


- A. 该年第一季度 GDP 增速由高到低排位第 3 的是山东省
- B. 与去年同期相比，该年第一季度的 GDP 总量实现了增长
- C. 该年第一季度 GDP 总量和增速由高到低排位均居同一位的省份有 2 个
- D. 去年同期浙江省的 GDP 总量超过了 4500 亿元

5. 函数 $f(x) = \frac{1}{8}e^{|x|} \sin 2x$ 的部分图象大致是 ()



6. 执行如图所示的程序框图，若输入 $a = \ln 10$ ， $b = \lg e$ ，则输出的值为（ ）



A. 0

B. 1

C. $2\lg e$

D. $2\lg 10$

7. 已知向量 $\vec{a} = (1, 4)$, $\vec{b} = (-2, m)$, 若 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $m =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -8 D. 8

8. 已知 $A(-\sqrt{3}, 0)$, $B(\sqrt{3}, 0)$, P 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的动点, $\vec{AP} = \vec{PQ}$, 过点 P 作与 AP 垂直的直线 l 交直线 QB 于点 M , 若点 M 的横坐标为 x , 则 $|x|$ 的取值范围是 ()

- A. $|x| \geq 1$ B. $|x| > 1$ C. $|x| \geq 2$ D. $|x| \geq \sqrt{2}$

9. 复数 $(a-i)(2-i)$ 的实部与虚部相等, 其中 i 为虚部单位, 则实数 $a =$ ()

- A. 3 B. $-\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -1

10. 已知 i 为虚数单位, 则 $\frac{2+3i}{(1-2i)i} =$ ()

- A. $\frac{7}{5} + \frac{4}{5}i$ B. $\frac{7}{5} - \frac{4}{5}i$ C. $\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$ D. $\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$

11. 已知复数 z 满足 $z \cdot i^{2020} = 1 + i^{2019}$ (其中 i 为虚数单位), 则复数 z 的虚部是 ()

- A. -1 B. 1 C. $-i$ D. i

12. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp BP$, $AC \perp PC$, $AB \perp AC$, $PB = PC = 2\sqrt{2}$, 点 P 到底面 ABC 的距离为 2, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 ()

- A. 3π B. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ C. 12π D. 24π

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = 2a(\ln x - x) + x^2$ ($a > 0$) 有两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 则 $f(x_1) + f(x_2)$ 的取值范围为 _____.

14. 如果函数 $f(x) = (m-2)x^2 + 2(n-8)x + 1$ ($m, n \in R$ 且 $m \geq 2, n \geq 0$) 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上单调递减, 那么 mn 的最大值为 _____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + \frac{1}{4x^2 + 8x}, & -2 < x < 0 \\ x^2 + 2x - 1, & x \leq -2, x \geq 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = a|f(x)| + 1$ 有 6 个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

16. 函数 $f(x) = \sin^3 x + 3\cos^2 x \left(x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right] \right)$ 的值域为 _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某商场举行有奖促销活动，顾客购买每满 400 元的商品即可抽奖一次。抽奖规则如下：抽奖者掷各面标有 1-6 点数的正方体骰子 1 次，若掷得点数大于 4，则可继续在抽奖箱中抽奖；否则获得三等奖，结束抽奖，已知抽奖箱中装有 2 个红球与 m ($m \geq 2, m \in N^*$) 个白球，抽奖者从箱中任意摸出 2 个球，若 2 个球均为红球，则获得一等奖，若 2 个球为 1 个红球和 1 个白球，则获得二等奖，否则，获得三等奖（抽奖箱中的所有小球，除颜色外均相同）。

(1) 若 $m = 4$ ，求顾客参加一次抽奖活动获得三等奖的概率；

(2) 若一等奖可获奖金 400 元，二等奖可获奖金 300 元，三等奖可获奖金 100 元，记顾客一次抽奖所获得的奖金为 X ，若商场希望 X 的数学期望不超过 150 元，求 m 的最小值。

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$

(1) 已知直线 $l: x - y - 1 = 0$ ， $l_1: 2x - y - 2 = 0$ 。若直线 l_2 与 l_1 关于 l 对称，又函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线与 l_2 垂直，求实数 a 的值；

(2) 若函数 $g(x) = (e - 2)x + 1$ ，则当 $x > 0$ ， $a = 1$ 时，求证：

① $f(x) \geq g(x)$ ；

② $e^x - ex - 1 \geq x(\ln x - 1)$ 。

19. (12 分) 已知 $a > 0, b > 0$ ，函数 $f(x) = |x + a| + |2x - b|$ 的最小值为 1。

(1) 证明： $2a + b = 2$ 。

(2) 若 $a + 2b \geq tab$ 恒成立，求实数 t 的最大值。

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{ex}$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线方程是 $y = (1 - \frac{2}{e})x + \frac{4}{e} - 1$ 。

(1) 求 a, b 的值；

(2) 若函数 $g(x) = xf(x)$ ，讨论 $g(x)$ 的单调性与极值；

(3) 证明： $f(x) > \frac{1}{e^x}$ 。

21. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$ ($n \in N^*$)，其前 n 项和为 S_n 。

(1) 通过计算 $\frac{a_1}{2^0}$ ， $\frac{a_2}{2^1}$ ， $\frac{a_3}{2^2}$ ，猜想并证明数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$ ， $b_{n+1} = \frac{n}{n+2}b_n$ ($n \in N^*$)， $c_n = S_n \left(b_n - \frac{t}{n}\right)$ ($n \in N^*$)，若数列 $\{c_n\}$

是单调递减数列，求常数 t 的取值范围.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = \frac{x-a}{x+1} + \ln(x+1), a \in R$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 函数 $g(x) = x^2 + \frac{2}{x}$, 若对于 $\forall x_1 \in (-1, +\infty), \exists x_2 \in [1, 2]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立, 求 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

先化简已知得 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$, 再根据题意得出 $f(x)$ 的最小值正周期 T 为 1×2 , 再求出 ω 的值.

【详解】

由题得 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$,

设 x_1, x_2 为 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 的两个零点, 且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 1,

$\therefore \frac{T}{2} = 1$, 解得 $T = 2$;

$\therefore \frac{2\pi}{\omega} = 2$,

解得 $\omega = \pi$.

故选 A.

【点睛】

本题考查了三角恒等变换和三角函数的图象与性质的应用问题, 是基础题.

2、D

【解析】

根据已知得本题首先求出直线与双曲线渐近线的交点, 再利用 $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OM} + \mu \overrightarrow{ON}$, 求出点

$P\left((\lambda + \mu)c, (\lambda - \mu)\frac{bc}{a}\right)$, 因为点 P 在双曲线上, 及 $e = \frac{c}{a}$, 代入整理及得 $4e^2\lambda\mu = 1$, 又已知 $\lambda\mu = \frac{6}{25}$, 即可求出

离心率.

【详解】

由题意可知 $M\left(c, \frac{bc}{a}\right)$, $N\left(c, -\frac{bc}{a}\right)$, 代入 $\vec{OP} = \lambda \vec{OM} + \mu \vec{ON}$ 得: $P\left((\lambda + \mu)c, (\lambda - \mu)\frac{bc}{a}\right)$,

代入双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 整理得: $4e^2 \lambda \mu = 1$, 又因为 $\lambda \mu = \frac{6}{25}$, 即可得到 $e = \frac{5\sqrt{6}}{12}$,

故选: D.

【点睛】

本题主要考查的是双曲线的简单几何性质和向量的坐标运算, 离心率问题关键寻求关于 a , b , c 的方程或不等式, 由此计算双曲线的离心率或范围, 属于中档题.

3、C

【解析】

把 $z_1 = 1 + ai$ ($a \in R$), $z_2 = 1 + 2i$ 代入 $\frac{z_1}{z_2}$, 利用复数代数形式的除法运算化简, 由实部为 0 且虚部不为 0 求解即可.

【详解】

$\because z_1 = 1 + ai$ ($a \in R$), $z_2 = 1 + 2i$,

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + ai}{1 + 2i} = \frac{(1 + ai)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{1 + 2a}{5} + \frac{a - 2}{5}i,$$

$\therefore \frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数,

$$\therefore \begin{cases} 1 + 2a = 0 \\ a - 2 \neq 0 \end{cases}, \text{解得 } a = -\frac{1}{2}.$$

故选 C.

【点睛】

本题考查复数代数形式的除法运算, 考查复数的基本概念, 是基础题.

4、D

【解析】

根据折线图、柱形图的性质, 对选项逐一判断即可.

【详解】

由折线图可知 A、B 项均正确, 该年第一季度 GDP 总量和增速由高到低排位均居同一位的

省份有江苏均第一.河南均第四.共 2 个.故 C 项正确; $4632.1 \div (1 + 3.3\%) \approx 4484 < 4500$.

故 D 项不正确.

故选: D.

【点睛】

本题考查折线图、柱形图的识别, 考查学生的阅读能力、数据处理能力, 属于中档题.

5、C

【解析】

判断函数的性质, 和特殊值的正负, 以及值域, 逐一排除选项.

【详解】

$f(-x) = -f(x)$, $\therefore$ 函数是奇函数, 排除 D,

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f(x) > 0$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $f(x) < 0$, 排除 B,

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\sin 2x \in (0, 1)$, $\frac{1}{8}e^{|x|} \in \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}e^{\frac{\pi}{2}}\right) \subset (0, 1)$

$\therefore x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f(x) \in (0, 1)$, 排除 A,

C 符合条件, 故选 C.

【点睛】

本题考查了根据函数解析式判断函数图象, 属于基础题型, 一般根据选项判断函数的奇偶性, 零点, 特殊值的正负, 以及单调性, 极值点等排除选项.

6、A

【解析】

根据输入的值大小关系, 代入程序框图即可求解.

【详解】

输入 $a = \ln 10$, $b = \lg e$,

因为 $\ln 10 > 1 > \lg e$, 所以由程序框图知,

输出的值为 $a - \frac{1}{b} = \ln 10 - \frac{1}{\lg e} = \ln 10 - \ln 10 = 0$.

故选: A

【点睛】

本题考查了对数式大小比较，条件程序框图的简单应用，属于基础题.

7、B

【解析】

先求出向量 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ 的坐标，然后由 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ 可求出参数 m 的值.

【详解】

由向量 $\vec{a} = (1, 4)$, $\vec{b} = (-2, m)$,

则 $\vec{a} + \vec{b} = (-1, 4 + m)$, $\vec{a} - \vec{b} = (3, 4 - m)$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1^2 + (4 + m)^2}, \quad |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3^2 + (4 - m)^2}$$

又 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $\sqrt{1^2 + (4 + m)^2} = \sqrt{3^2 + (4 - m)^2}$, 解得 $m = \frac{1}{2}$.

故选：B

【点睛】

本题考查向量的坐标运算和模长的运算，属于基础题.

8、A

【解析】

由题意得 $||MB| - |MA|| = |BQ| = 2|OP|$ ，即可得点 M 的轨迹为以 A, B 为左、右焦点， $a = 1$ 的双曲线，根据双曲线的性质即可得解.

【详解】

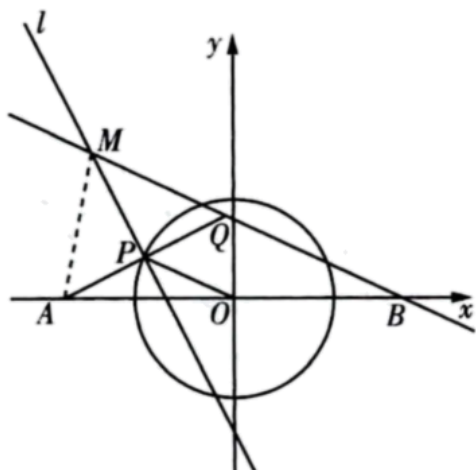
如图，连接 OP, AM ,

由题意得 $||MB| - |MA|| = |BQ| = 2|OP| = 2$,

$\therefore$ 点 M 的轨迹为以 A, B 为左、右焦点， $a = 1$ 的双曲线，

$\therefore |x| \geq 1$.

故选：A.



【点睛】

本题考查了双曲线定义的应用，考查了转化化归思想，属于中档题.

9、B

【解析】

利用乘法运算化简复数 $(a-i)(2-i)$ 即可得到答案.

【详解】

由已知， $(a-i)(2-i)=2a-1-(a+2)i$ ，所以 $2a-1=-a-2$ ，解得 $a=-\frac{1}{3}$.

故选：B

【点睛】

本题考查复数的概念及复数的乘法运算，考查学生的基本计算能力，是一道容易题.

10、A

【解析】

根据复数乘除运算法则，即可求解.

【详解】

$$\frac{2+3i}{(1-2i)i} = \frac{2+3i}{2+i} = \frac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查复数代数运算，属于基础题.

11、A

【解析】

由虚数单位 i 的运算性质可得 $z=1-i$ ，则答案可求.

【详解】

解：∵ $i^4 = 1$ ，

$$\therefore i^{2020} = i^{4 \times 505} = 1, \quad i^{2019} = i^{4 \times 504 + 3} = -i,$$

则 $z \cdot i^{2020} = 1 + i^{2019}$ 化为 $z = 1 - i$ ，

∴ z 的虚部为 -1 。

故选：A.

【点睛】

本题考查了虚数单位 i 的运算性质、复数的概念，属于基础题.

12、C

【解析】

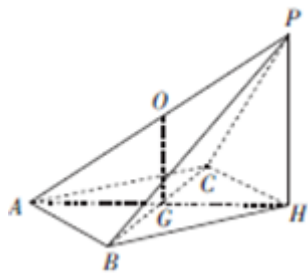
首先根据垂直关系可确定 $OP = OA = OB = OC$ ，由此可知 O 为三棱锥外接球的球心，在 $\triangle PAB$ 中，可以算出 AP 的一个表达式，在 $\triangle OAG$ 中，可以计算出 AO 的一个表达式，根据长度关系可构造等式求得半径，进而求出球的表面积。

【详解】

取 AP 中点 O ，由 $AB \perp BP$ ， $AC \perp PC$ 可知： $OP = OA = OB = OC$ ，

∴ O 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球球心，

过 P 作 $PH \perp$ 平面 ABC ，交平面 ABC 于 H ，连接 AH 交 BC 于 G ，连接 OG ， HB ， HC ，



∵ $PB = PC$ ，∴ $HB = HC$ ，∴ $AB = AC$ ，∴ G 为 BC 的中点

由球的性质可知： $OG \perp$ 平面 ABC ，∴ $OG \parallel PH$ ，且 $OG = \frac{1}{2}PH = 1$ 。

设 $AB = x$ ，

$$\text{∵ } PB = 2\sqrt{2}, \therefore AO = \frac{1}{2}PA = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 8},$$

$$\text{∵ } AG = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}x, \therefore \text{在 } \triangle OAG \text{ 中, } AG^2 + OG^2 = OA^2,$$

$$\text{即 } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 8}\right)^2, \text{ 解得: } x = 2,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/547034144044006142>