湖北省武汉市华中师范大学第一附属中学2024-2025学年高三上学期十一月月度检测数学试卷

学校:__________姓名：__________班级：__________考号：__________

一、单选题

1．已知集合 $A=\{x\mid x^2-9x+20\le 0\},B=\{x\mid \log_2(x-3)<1\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$(-\infty,5)$　　B．$[4,5)$　　C．$(-\infty,5]$　　D．$(3,5]$

2．若 $z=\dfrac{-\mathrm{i}}{-1+2\mathrm{i}}$，则 $\overline{z}$ 在复平面内对应的点位于（　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．已知 $\vec{a}$ 为单位向量，向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的投影向量是 $2\vec{a}$，且 $\left(4\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)\perp\vec{a}$，则 λ 的值为（　）

A．2　　B．0

C．-2　　D．-1

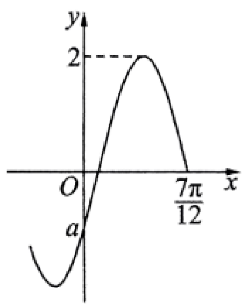
4．已知 $(ax-1)(1+\sqrt{x})^6$ 展开式各项系数之和为64，则展开式中 x^3 的系数为（　）

A．31　　B．30　　C．29　　D．28

5．在某班进行的歌唱比赛中，共有5位选手参加，其中3位女生，2位男生．如果2位男生不能连着出场，且女生甲不能排在第一个，那么出场顺序的排法种数为

A．30　　B．36　　C．60　　D．72

6．函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，图象上的所有点向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象.若对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $g\left(x\right)+g\left(-x\right)=0$，则图中 a 的值为（　）



A．-1　　　　B．$-\sqrt{3}$　　　　C．$-\sqrt{2}$　　　　D．$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

7．已知数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=2^n-1$，在其相邻两项a_k，a_{k+1}之间插入2^k个$3\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$，得到新的数列$\{b_n\}$，记$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$，则使$S_n\ge100$成立的$n$的最小值为（　）

A．28　　　　B．29　　　　C．30　　　　D．31

8．已知点F_1、F_2是椭圆$B:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左、右焦点，点$M$为椭圆$B$上一点，点$F_1$关于$\angle F_1MF_2$的角平分线的对称点$N$也在椭圆$B$上，若$\cos\angle F_1MF_2=\frac{7}{9}$，则椭圆$B$的离心率为（　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{6}$　　　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　　C．$\frac{\sqrt{10}}{25}$　　　　D．$\frac{\sqrt{10}}{5}$

二、多选题

9．已知直线$l:mx-y+2+m=0$和圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=9$相交于M，N两点，则下列说法正确的是（　）

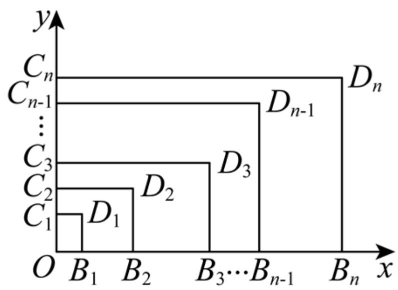
A．直线l过定点$(-1,2)$

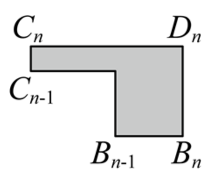
B．$|MN|$的最小值为3

C．$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}$的最小值为$-9$

D．圆C上到直线l的距离为$\frac{3}{2}$的点恰好有三个，则$m=\frac{3\sqrt{7}}{7}$

10．如图，在平面直角坐标系xOy中，点B_1，B_2，B_3，…，B_n均在x轴正半轴上，点C_1，C_2，C_3，…，C_n均在y轴正半轴上.已知$OB_1=1$，$B_1B_2=2$，$B_2B_3=3$，…，$B_{n-1}B_n=n(n\ge2)$，$OC_1=1$，$C_1C_2=C_2C_3=\cdots=C_{n-1}C_n=\frac{2}{3}(n\ge2)$，四边形$OB_1D_1C_1$，$OB_2D_2C_2$，$OB_3D_3C_3$，…，$OB_nD_nC_n$均为长方形.当$n\ge2$时，记$B_{n-1}B_nD_nC_nC_{n-1}$为第$n-1$个倒“$L$”形，则（　）





第n-1个倒“L”形

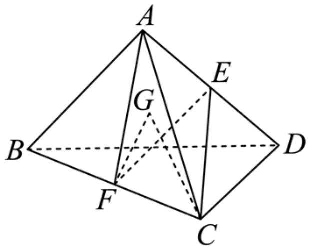
A．点 D_n 的纵坐标为 $\frac{2n}{3}+1$

B．点 D_1， D_2， D_3，…， D_n 均在曲线 $y^2=\frac{8}{9}x+\frac{1}{9}$ 上

C．长方形 $OB_nD_nC_n$ 的面积为 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

D．第 10 个倒“L”形的面积为 100

11．如图，已知四面体 $ABCD$ 的各条棱长均等于 2，E，F 分别是棱 AD， BC 的中点.G 为平面 ABD 上的一动点，则下列说法中正确的有（　　）



A．三棱锥 $E-AFC$ 体积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B．线段 $CG+GF$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{57}}{3}$

C．当 G 落在直线 BD 上时，异面直线 EF 与 AG 所成角的余弦值最大为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D．垂直于 EF 的一个面 α，截该四面体截得的截面面积最大为 1

三、填空题

12．无人酒店是利用人工智能与物联网技术为客人提供自助入住等服务的新型酒店，胜在科技感与新奇感.去某地旅游的游客有无人酒店和常规酒店两种选择.某游客去该地旅游，第一天随机选择一种酒店入住，如果第一天入住无人酒店，那么第二天还入住无人酒店的概率为 0.8；如果第一天入住常规酒店，那么第二天入住无人酒店的概率为 0.6，则该游客第二天入住无人酒店的概率为________.

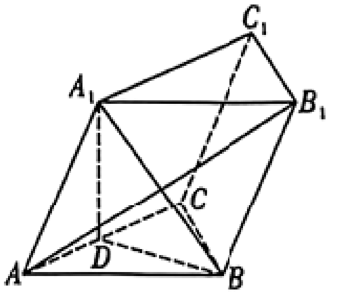
13．在 $\vee ABC$ 中， $AB=3$， $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$， $\angle ACD=\frac{\pi}{3}$，则 BC 的最大值为________.

14．已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对任意实数 m,n 均有 $[f(m)+1]\cdot[f(n)+1]=f(m+n)+1$，若 $f(1)=1$，且 $x<0$ 时， $f(x)<0$，则关于 x 的不等式 $f(x)+f(2-x)>3$ 的解集为________.

四、解答题

15．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 $ABC, AB=AC=BC=AA_1=1$，

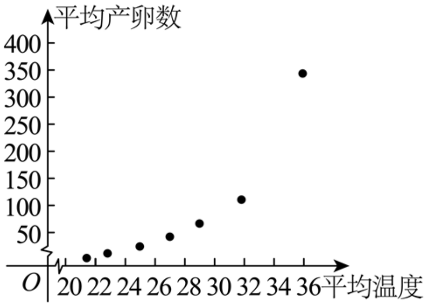
$A_1B=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, D 为 AC 的中点.



(1)证明：$AC\perp$ 平面 A_1DB；

(2)求平面 A_1AB 与平面 ACC_1A_1 夹角的余弦值.

16．红蜘蛛是柚子的主要害虫之一，能对柚子树造成严重伤害，每只红蜘蛛的平均产卵数 y（个）和平均温度 x（℃）有关.现收集了某地关于红蜘蛛的平均产卵数 y 和平均温度 x 的 7 组数据，得到如下散点图.



(1)根据散点图，判断模型 $y=bx+a$ 与 $y=ce^{dx}$（其中 e 为自然对数的底数）哪一个更适合作为平均产卵数 y 与平均温度 x 的回归分析模型；（给出判断即可，不必说明理由）

(2)由（1）的判断结果，求出 y 关于 x 的经验回归方程；

(3)根据以往每年平均气温以及对果园年产值的统计，得到以下数据：平均气温在 22°C 以下的年数占 60%，对柚子的产量影响不大，不需要采取防虫措施；平均气温在 22°C 至 28°C 的年数占 30%，柚子的产量会下降 20%；平均气温在 28°C 以上的年数占 10%，柚子的产量会下降 50%.为了更好的防治红蜘蛛虫害，农科所研发出多种防害措施供果农选择.在每年价格不变且无虫害的情况下，某果园的年产值为 200 万元，根据以上数据，以得到最高收益（收益=年产值一防害费用）为目标，请为果农从以下 3 个方案中选择最佳防害方案，并说明理由.

方案 1：选择防害措施 A，可以防治各种气温的红蜘蛛虫害且不减产，费用是 18 万元；

方案 2：选择防害措施 B，可以防治 22°C 至 28°C 的红蜘蛛虫害，但无法防治 28°C

以上的红蜘蛛虫害，费用是10万元；

方案3：不采取防虫害措施.

附：对于一组数据$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，其回归直线$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

x	$\sum_{i=1}^{7}x_i^2$	$\sum_{i=1}^{7}x_iy_i$	$\sum_{i=1}^{7}x_iz_i$	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{z}$
ln$y$	5215	17713	714	27	81.3	3.6

17．在数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n-1$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n；

（2）记$b_n=a_n+(1-\lambda)n$，且数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，若S_2为数列$\{S_n\}$中的最小项，求λ的取值范围.

18．已知抛物线$y^2=4x$，顶点为O，过焦点F的直线交抛物线于A，B两点.

(1)若$|AB|=8$，求线段AB中点到y轴的距离；

(2)设点G是线段AB上的动点，顶点O关于点G的对称点为C，求四边形$OACB$面积的最小值；

(3)设D为抛物线上的一点，过点D作直线DM，DN分别交抛物线于M，N两点，作直线DP，DQ分别交抛物线于P，Q两点，且$DM\perp DN$，$DP\perp DQ$，设线段MN与线段PQ的交点为T，求直线OT斜率的取值范围.

19．函数$f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}$，$g(x)=ax+b$.

（1）若函数$h(x)=f(x)-g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，求实数a的取值范围；

（2）若直线$g(x)=ax+b$是函数$f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}$图象的切线，求$a+b$的最小值；

（3）当$b=0$时，若$f(x)$与$g(x)$的图象有两个交点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，试比较x_1x_2与$2e^2$的大小.（取e为2.8，取$\ln 2$为0.7，取$\sqrt{2}$为1.4）

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	C	C	C	A	B	B	AC	ABC
题号	11									
答案	BCD									

1．B

【分析】由一元二次不等式的解法得 $A=\{x\mid 4\le x\le 5\}$，由对数函数的性质可得 $B=\{x\mid 3<x<5\}$，再由交集的定义求解即可.

【详解】解：由 $x^2-9x+20\le 0$，可得 $4\le x\le 5$，

所以 $A=\{x\mid 4\le x\le 5\}$；

由 $\log_2(x-3)<1$，可得 $0<x-3<2$，解得 $3<x<5$，

所以 $B=\{x\mid 3<x<5\}$；

所以 $A\cap B=\{x\mid 4\le x\le 5\}\cap\{x\mid 3<x<5\}=\{x\mid 4\le x<5\}$.

故选：B.

2．C

【分析】先由复数乘除法运算结合共轭复数的概念求出 $\bar{z}$ 即可由复数的坐标表示得解.

【详解】由题可得 $z=\dfrac{-\mathrm{i}}{-1+2\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=\dfrac{-2+\mathrm{i}}{5}=-\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$，

所以 $\bar{z}=-\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点坐标为 $\left(-\dfrac{2}{5},-\dfrac{1}{5}\right)$，

所以 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于第三象限.

故选：C.

3．C

【分析】根据投影向量的概念可求得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，利用向量垂直数量积为 0 可求得 λ 的值.

【详解】由题意得，$|\vec{a}|=1,\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=2$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$.

$\because\left(4\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)\perp\vec{a}$，

$\therefore\left(4\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0$，即 $4\vec{a}^2+\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

$\therefore 4+2\lambda=0$，解得 $\lambda=-2$.

故选：C.

4．C

【分析】赋值法得到方程，求出$a=2$，求出$\left(1+\sqrt{x}\right)^6$展开式通项公式，得到

$T_5=C_6^4x^2=15x^2$，$T_7=x^3$，从而得到展开式中x^3的系数.

【详解】$(ax-1)(1+\sqrt{x})^6$中令$x=1$得$(a-1)(1+\sqrt{1})^6=64$，解得$a=2$，

$\left(1+\sqrt{x}\right)^6$展开式通项公式为$T_{r+1}=C_6^r x^{\frac{1}{2}r}$，$0\le r\le 6, r\in N$，

当$r=4$时，$T_5=C_6^4x^2=15x^2$，当$r=6$时，$T_7=x^3$，

故展开式中x^3的系数为$15\times 2-1=29$.

故选：C

5．C

【分析】记事件A:2位男生连着出场，事件B:女生甲排在第一个，利用容斥原理可知所求出场顺序的排法种数为$A_5^5-n\left(A\cup B\right)=A_5^5-\left[n\left(A\right)+n\left(B\right)-n\left(A\cap B\right)\right]$，再利用排列组合可求出答案.

【详解】记事件A:2位男生连着出场，即将2位男生捆绑，与其他3位女生形成4个元素，所以，事件A的排法种数为$n\left(A\right)=A_2^2A_4^4=48$，

记事件B:女生甲排在第一个，即将甲排在第一个，其他四个任意排列，所以，事件B的排法种数为$n\left(B\right)=A_4^4=24$，

事件$A\cap B$:女生甲排在第一位，且2位男生连着，那么只需考虑其他四个人，将2位男生与其他2个女生形成三个元素，所以，事件$A\cap B$的排法种数为$A_2^2A_3^3=12$种，

因此，出场顺序的排法种数$A_5^5-n\left(A\cup B\right)=A_5^5-\left[n\left(A\right)+n\left(B\right)-n\left(A\cap B\right)\right]$

$=120-\left(48+24-12\right)=60$种，故选C.

【点睛】本题考查排列组合综合问题，题中两个事件出现了重叠，可以利用容斥原理

$n\left(A\cup B\right)=$

$n\left(A\right)+n\left(B\right)-n\left(A\cap B\right)$来等价处理，考查计算能力与分析问题的能力，属于中等题.

6．A

【分析】易得$A=2$，再由平移变换得到函数$f\left(x\right)$的图象过点$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$

，进而求得周期，然后代入点$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$求得$f\left(x\right)$的解析式即可.

【详解】解：由$f\left(x\right)_{\max}=2$，得$A=2$.

$f\left(x\right)$的图象上的所有点向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度后得$g\left(x\right)$的图象，

由题意知$g\left(x\right)$为奇函数，所以其图象关于原点对称，得函数$f\left(x\right)$的图象过点$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$.

设$f\left(x\right)$的最小正周期为T，则$\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{T}{2}$，所以$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，故$\omega=2$.

又$\frac{\pi}{12}\omega+\varphi=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，且$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，可得$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，

所以$f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$a=f\left(0\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-1$.

故选：A.

7．B

【分析】根据题意分析得$\left\{b_n\right\}$的项的情况，从而求得T_{29}，T_{28}，进而得解.

【详解】由题意，$\left\{b_n\right\}$数列元素依次为$a_1,\underbrace{3,3}_{2^1},a_2,\underbrace{3,\cdots,3}_{2^2},a_3,\underbrace{3,\cdots,3}_{2^3},a_4$，$\cdots$，

在a_1到a_5之间 3 的个数为$2^1+2^2+2^3+2^4=30$，故到a_5处$\left\{b_n\right\}$共有 35 个元素，

所以前 30 项中含a_1，…，a_4及 26 个 3，

故$T_{29}=a_1+a_2+\cdots+a_4+25\times3=2+2^2+2^3+2^4-4+75=2+4+8+16-4+75=101$，

而$T_{28}=T_{28}-3=98<0$，

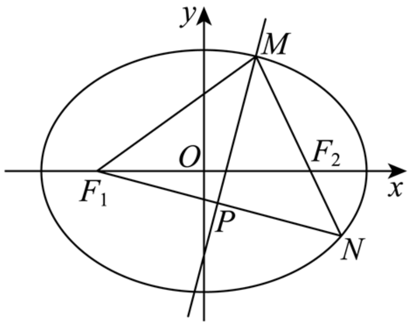
故$S_n\geq100$成立的最小的n为 29.

故选：B

8．B

【分析】根据角平分线的对称性以及椭圆的性质，建立方程，表示出焦半径，利用余弦定理，结合齐次方程的思想，可得答案.

【详解】由题意可作图如下：



由图可知：$|MF_1|+|MF_2|=|NF_1|+|NF_2|=2a$，

由MP平分$\angle F_1MF_2$，则$\angle F_1MP=\frac{1}{2}\angle F_1MF_2$，所以$\sin\angle F_1MP=\sqrt{\frac{1-\cos\angle F_1MF_2}{2}}$，

由$\cos\angle F_1MF_2=\frac{7}{9}$，则解得$\sin\angle F_1MP=\frac{1}{3}$，

由N是F_1关于直线MP的对称点，则N,F_2,M共线，$|F_1P|=\frac{1}{2}|NF_1|$，$MP\perp F_1N$，

$|MF_1|=|MN|$，

所以$|MF_1|+|MN|+|NF_1|=4a$，在$\mathrm{Rt}\vee MF_1P$中，$|F_1P|=|MF_1|\cdot\sin\angle F_1MP=\frac{1}{3}|MF_1|$，

可得$|MF_1|+|MF_1|+2|F_1P|=2|MF_1|+\frac{2}{3}|MF_1|=4a$，解得$|MF_1|=\frac{3}{2}a$，$|MF_2|=\frac{1}{2}a$，

在$\triangle F_1MF_2$中，由余弦定理，可得$|F_1F_2|^2=|MF_1|^2+|MF_2|^2-2|MF_1||MF_2|\cos\angle F_1MF_2$，

代入可得：$4c^2=\frac{9}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2-2\times\frac{3}{2}a\times\frac{1}{2}a\times\frac{7}{9}$，化简可得：$4c^2=\frac{4}{3}a^2$，

所以其离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：B.

9．AC

【分析】根据直线的定点、圆的相乘、向量数量积运算、直线和圆的位置关系等知识对选项进行分析，从而确定正确答案.

【详解】对于A，直线$l:mx-y+2+m=0$，即$m(x+1)-y+2=0$，

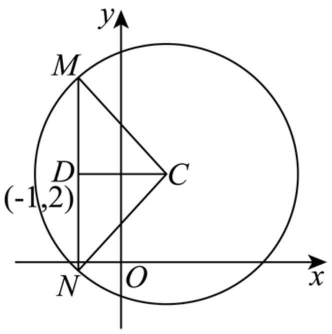
由$\begin{cases}x+1=0\\-y+2=0\end{cases}$解得$x=-1,y=2$，所以定点坐标为$(-1,2)$，A正确，

对于B，圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=9$的圆心为$(1,2)$，半径为3，

点$(-1,2)$与圆心$(1,2)$的距离为2，

所以$|MN|$的最小值为$2\sqrt{3^2-2^2}=2\sqrt{5}$，B错误，

对于 C，设 $D(-1,2)$，则 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}=\left|\overrightarrow{CM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CN}\right|\cdot\cos\langle\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}\rangle=9\cos\langle\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}\rangle$，



当 $\langle\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}\rangle=\pi$，即直线方程为 $y=2$ 时，

$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}$ 取得最小值为 -9，所以 C 正确，

对于 D，若圆 C 上到直线 l 的距离为 $\frac{3}{2}$ 的点恰好有三个，

则圆心到直线 l 的距离为 $\frac{3}{2}$，

所以 $\frac{|m-2+2+m|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{3}{2}$，

整理得 $16m^2=9m^2+9,7m^2=9,m=\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$，所以 D 错误.

故选：AC

10．ABC

【分析】先求得 D_n 的坐标，然后长方形 $OB_nD_nC_n$ 的面积，由此对选项进行分析，从而确定正确答案.

【详解】由题意 $x_{D_n}=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},y_{D_n}=1+\frac{2}{3}(n-1)=\frac{2n+1}{3}$，A 正确，

所以 $\frac{8}{9}x_{D_n}+\frac{1}{9}=\frac{4n^2+4n+1}{9}=\left(y_{D_n}\right)^2$，所以 B 正确.

$S_{OB_nD_nC_n}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2n+1}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，所以 C 正确.

第 10 个倒“L”形的面积为 $S_{OB_{11}D_{11}C_{11}}-S_{OB_{10}D_{10}C_{10}}=\frac{11\times12\times23-10\times11\times21}{6}=121$，所以 D 错误.

故选：ABC

11．BCD

【分析】对 A，求出正四面体 $ABCD$ 的高 h，点 E 到平面 ACF 的距离为 $\frac{1}{2}h$，求出体积判断；对 B，作点 C 关于平面 ABD 的对称点 C'，由对称性得 $CG+GF=C'G+GF\geq C'F$，求解判断；对 C，由最小角定理可知，EF 与 AG 所成的最小角即 EF 与平面 ABD