

§ 1.2.1 函数的概念

一.【知识要点】

1 一、复习引入：

初中〔传统〕的函数的定义是什么？初中学过哪些函数？

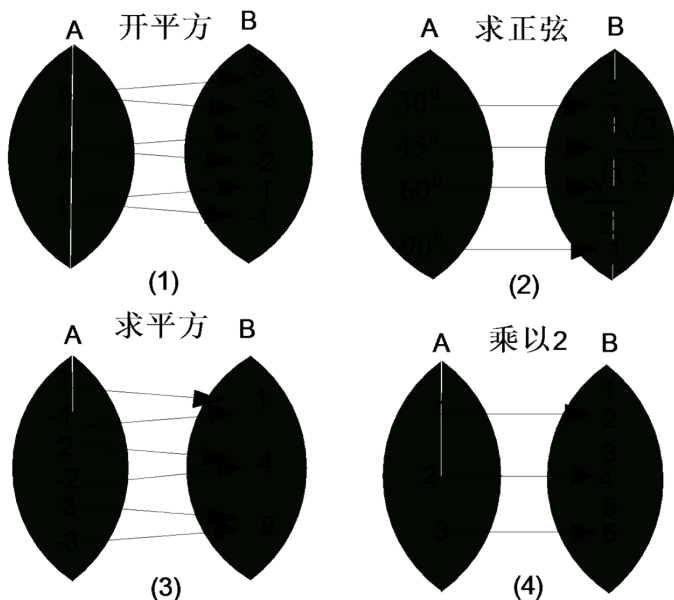
设在一个变化过程中有两个变量 x 和 y ，如果对于 x 的每一个值， y 都有唯一的值与它对应，那么就称 x 是自变量， y 是 x 的函数.并将自变量 x 取值的集合叫做函数的定义域，和自变量 x 的值对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域.这种用变量表达的函数定义我们称之为函数的传统定义.

初中已经学过：正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数等。

问题 1： $y = 1$ ($x \in R$) 是函数吗？

问题 2： $y = x$ 与 $y = \frac{x^2}{x}$ 是同一函数吗？

观察对应：



二、讲解新课：

(一) 函数的有关概念

设 A, B 是非空的数集，如果按某个确定的对应关系 f ，使对于集合 A 中的任意一个 x ，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的函数，记作

$$y = f(x), \quad x \in A$$

其中 x 叫自变量， x 的取值范围 A 叫做函数 $y = f(x)$ 的定义域；与 x 的值相对应的 y 的值叫做函数值，

函数值的集合 $\{f(x) | x \in A\}$ ($\subseteq B$) 叫做函数 $y=f(x)$ 的值域.

函数符号 $y = f(x)$ 表示 “ y 是 x 的函数”，有时简记作函数 $f(x)$.

(1)函数实际上就是集合 A 到集合 B 的一个特殊对应 $f: A \rightarrow B$

这里 A, B 为非空的数集.

(2) A: 定义域, 原象的集合: $\{f(x) | x \in A\}$; 值域, 象的集合, 其中 $\{f(x) | x \in A\} \subseteq B$; f :

对应法那么, $x \in A$, $y \in B$

(3) 函数符号: $y = f(x) \leftrightarrow y$ 是 x 的函数, 简记 $f(x)$

(二) 已学函数的定义域和值域

1. 一次函数 $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$): 定义域 $\mathbf{R}$, 值域 $\mathbf{R}$;

2. 反比例函数 $f(x) = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$): 定义域 $\{x | x \neq 0\}$, 值域 $\{x | x \neq 0\}$;

3. 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$): 定义域 $\mathbf{R}$

值域: 当 $a > 0$ 时, $\left\{y | y \geq \frac{4ac - b^2}{4a}\right\}$; 当 $a < 0$ 时, $\left\{y | y \leq \frac{4ac - b^2}{4a}\right\}$

4 求函数的定义域时, 一般应考虑:

(1) 偶次方根的被开方数不小于零;

(2) 分母不等于零;

(3) 零的零次幂没有意义.

(4) 实际问题的背景所允许的取值范围.

例如: $S = \pi \cdot r^2$ 表示圆的面积时, r 的取值范围应是 $r \in (0, +\infty)$.

(三) 函数的值: 关于函数值 $f(a)$

例: $f(x) = x^2 + 3x + 1$ 那么 $f(2) = 2^2 + 3 \times 2 + 1 = 11$

注意: 1° 在 $y = f(x)$ 中 f 表示对应法那么, 不同的函数其含义不一样.

2° $f(x)$ 不一定是解析式, 有时可能是“列表”“图象”.

3° $f(x)$ 与 $f(a)$ 是不同的, 前者为变数, 后者为常数.

(四) 函数的三要素: 对应法那么 f 、定义域 A、值域 $\{f(x) | x \in A\}$

只有当这三要素完全相同时, 两个函数才能称为同一函数.

(五) 了解区间的概念

① 设 a, b 是两个实数, 且 $a < b$, 那么:

$\{x | a \leq x \leq b\} = [a, b]$ 叫闭区间; $\{x | a < x < b\} = (a, b)$ 叫开区间;

$\{x | a \leq x < b\} = [a, b)$; $\{x | a < x \leq b\} = (a, b]$; 都叫半开半闭区间.

② 符号: “ ∞ ”读“无穷大”; “ $-\infty$ ”读“负无穷大”; “ $+\infty$ ”读“正无穷大”

【典型例题】

例1 求以下函数的定义域:

① $f(x) = \frac{1}{x-2}$; ② $f(x) = \sqrt{3x+2}$; ③ $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{2-x}$.

分析: 函数的定义域通常由问题的实际背景确定. 如果只给出解析式 $y = f(x)$, 而没有指明它的定义域, 那么函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数 x 的集合.

解: ① $\because x-2=0$, 即 $x=2$ 时, 分式 $\frac{1}{x-2}$ 无意义,

而 $x \neq 2$ 时, 分式 $\frac{1}{x-2}$ 有意义, $\therefore$ 这个函数的定义域是 $\{x | x \neq 2\}$.

② $\because 3x+2 < 0$, 即 $x < -\frac{2}{3}$ 时, 根式 $\sqrt{3x+2}$ 无意义,

而 $3x+2 \geq 0$, 即 $x \geq -\frac{2}{3}$ 时, 根式 $\sqrt{3x+2}$ 才有意义,

$\therefore$ 这个函数的定义域是 $\{x | x \geq -\frac{2}{3}\}$.

③ $\because$ 当 $x+1 \geq 0$ 且 $2-x \neq 0$, 即 $x \geq -1$ 且 $x \neq 2$ 时, 根式 $\sqrt{x+1}$ 和分式 $\frac{1}{2-x}$ 同时有意义,

$\therefore$ 这个函数的定义域是 $\{x | x \geq -1 \text{ 且 } x \neq 2\}$

另解: 要使函数有意义, 必须:
$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2-x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 这个函数的定义域是: $\{x | x \geq -1 \text{ 且 } x \neq 2\}$

强调: 解题时要注意书写过程, 注意紧扣函数定义域的含义. 由本例可知, 求函数的定义域就是根据使函数式有意义的条件, 布列自变量应满足的不等式或不等式组, 解不等式或不等式组就得到所求的函数的定义域.

例2 函数 $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$, 求 $f(3)$, $f(-\sqrt{2})$, $f(a+1)$.

解: $f(3) = 3 \times 3^2 - 5 \times 3 + 2 = 14$;

$$f(-\sqrt{2}) = 3 \times (-\sqrt{2})^2 - 5 \times (-\sqrt{2}) + 2 = 8 + 5\sqrt{2};$$

$$f(a+1) = 3(a+1)^2 - 5(a+1) + 2 = 3a^2 + a.$$

例3 以下函数中哪个与函数 $y = x$ 是同一个函数?

(1) $y = (\sqrt{x})^2$; (2) $y = \sqrt[3]{x^3}$; (3) $y = \sqrt{x^2}$

解: (1) $y = (\sqrt{x})^2 = x$ ($x \geq 0$), $y \geq 0$, 定义域不同且值域不同, 不是;

(2) $y = \sqrt[3]{x^3} = x$ ($x \in \mathbb{R}$), $y \in \mathbb{R}$, 定义域值域都相同, 是同一个函数;

(3) $y = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}, y \geq 0$; 值域不同, 不是同一个函数.

例 4 以下各组中的两个函数是否为相同的函数？

① $y_1 = \frac{(x+3)(x-5)}{x+3}$ $y_2 = x-5$ (定义域不同)

② $y_1 = \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$ $y_2 = \sqrt{(x+1)(x-1)}$ (定义域不同)

③ $f_1(x) = (\sqrt{2x-5})^2$ $f_2(x) = 2x-5$ (定义域、值域都不同)

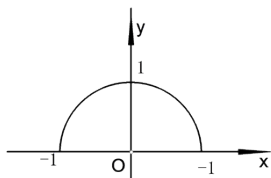
例 5. 函数 $f(x)$ 对一切实数 x, y 均有 $f(x+y) - f(y) = (x+2y+1)x$ 成立, 且 $f(1) = 0$,

(1) 求 $f(0)$ 的值;

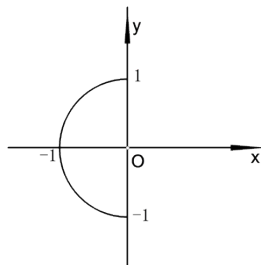
解: (1) 由等式 $f(x+y) - f(y) = (x+2y+1)x$, 令 $x=1, y=0$ 得 $f(1) - f(0) = 2$,

又 $\because f(1) = 0, \therefore f(0) = -2$.

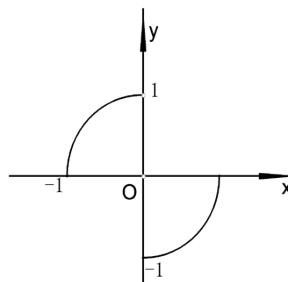
例 6. 以下图象不能表示函数的是_____.



(1)



(2)



(3)

小结: 函数包括三个要素: 定义域、值域和对应法那么, 其中对应法那么是核心, 当函数的定义域和对应法那么确定后, 值域也随之确定.

【课堂练习】

1、对于函数 $y = f(x)$, 以下说法正确的有 (B)

① y 是 x 的函数; ② 对于不同的 x, y 的值也不同; ③ $f(a)$ 表示当 $x=a$ 时函数 $f(x)$ 的值, 是一个常量;

④ $f(x)$ 一定可以用一个具体的式子表示出来。

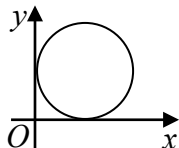
A、1 个

B、2 个

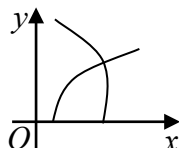
C、3 个

D、4 个

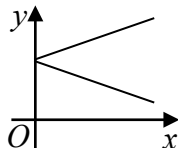
2、如以下图可作为函数 $y = f(x)$ 的图像的是 (D)



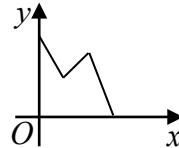
(A)



(B)



(C)



(D)

3、假设 $f(x) = \sqrt{x+1}$, 那么 $f(3) =$ _____ (A)

A、2

B、4

C、 $2\sqrt{2}$

D、10

4、以下各组函数是同一函数的是 (C)

① $f(x) = \sqrt{-2x^3}$ 与 $g(x) = x\sqrt{-2x}$; ② $f(x) = |x|$ 与 $g(x) = (\sqrt{x})^2$; ③ $f(x) = x^0$ 与 $g(x) = \frac{1}{x^0}$; ④

$f(x) = x^2 - 2x - 1$ 与 $g(t) = t^2 - 2t - 1$ 。

A、①②

B、①③

C、③④

D、①④

5、设 $f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \leq -1) \\ x^2 & (-1 < x < 2) \\ 2x & (x \geq 2) \end{cases}$, 假设 $f(x) = 3$, 那么 $x = \underline{\sqrt{3}}$ 。

6. 给出以下的三组函数:

① $y = |x-1|$ 与 $y = \sqrt{(x-1)^2}$; ② $y = 1$ 与 $y = x^0$; ③ $y = \frac{x^2 - x}{x}$ 与 $y = x - 1$;

其中表示同一个函数的是 ①。

7 求以下函数的定义域:

$$(1) y = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}};$$

$$(2) y = \frac{1}{\sqrt{3x-2x^2-1}};$$

$$(3) y = \frac{3x}{2x - \sqrt{3-4x}};$$

$$(1) y = \sqrt{(x-2)(x-3)};$$

$$(2) y = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+3};$$

$$(3) y = \frac{1}{1 - \sqrt{x-1}}$$

8. $f(x) = x^2 + 1$ 求 $f(1)$ 、 $f(-1)$ 、 $f(a+1)$ 的值.

1.2.2 函数的表示法

【重要知识点】

函数的表示方法

表示函数的方法, 常用的有解析法、列表法和图象法三种.

(1)解析法: 就是把两个变量的函数关系, 用一个等式表示, 这个等式叫做函数的解析表达式, 简称解析式.

例如, $s=60t^2$, $A=\pi r^2$, $S=2\pi rl$, $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$, $y=\sqrt{x-2} (x \geq 2)$ 等等都是用解析式表示函数关系的.

优点: 一是简明、全面地概括了变量间的关系; 二是可以通过解析式求出任意一个自变量的值所对应的函数值. 中学阶段研究的函数主要是用解析法表示的函数.

(2)列表法: 就是列出表格来表示两个变量的函数关系.

例如, 学生的身高

单位: 厘米

学号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
身高	125	135	140	156	138	172	167	158	169

数学用表中的平方表、平方根表、三角函数表, 银行里的利息表, 列车时刻表等等都是用列表法来表示函数关系的. 公共汽车上的票价表

优点: 不需要计算就可以直接看出与自变量的值相对应的函数值.

(3)图象法: 就是用函数图象表示两个变量之间的关系.

例如, 气象台应用自动记录器描绘温度随时间变化的曲线, 课本中我国人口出生率变化的曲线, 工厂的生产图象, 股市走向图等都是用图象法表示函数关系的.

优点: 能直观形象地表示出自变量的变化, 相应的函数值变化的趋势, 这样使得我们可以通过图象来研究函数的某些性质.

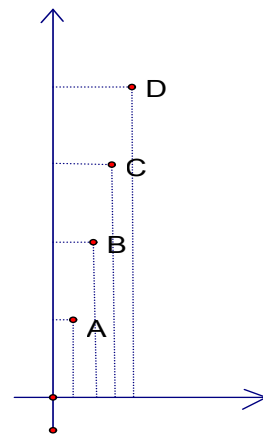
【典型例题】

例 1 某种笔记本每个 5 元, 买 $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ 个笔记本的钱数记为 y (元), 试写出以 x 为自变量的函数 y 的解析式, 并画出这个函数的图像.

解: 这个函数的定义域集合是 $\{1, 2, 3, 4\}$, 函数的解析式为

$$y=5x, x \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

它的图象由 4 个孤立点 A(1, 5) B(2, 10) C(3, 15) D(4, 20) 组成, 如下图.

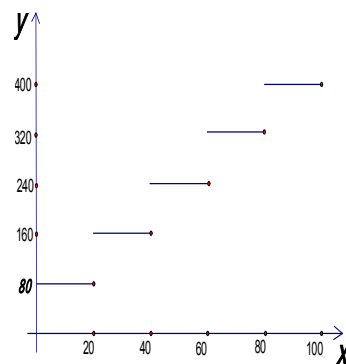


例 2 国内投寄信函 (外埠), 每封信函不超过 20g 付邮资 80 分, 超过 20g 而不超过 40g 付邮资 160 分, 依次类推, 每封 x g ($0 < x \leq 100$) 的信函应付邮资为 (单位: 分), 试写出以 x 为自变量的函数 y 的解析式, 并画出这个函数的图像.

解: 这个函数的定义域集合是 $0 < x \leq 100$, 函数的解析式为

$$y = \begin{cases} 80, & x \in (0, 20], \\ 160, & x \in (20, 40], \\ 240, & x \in (40, 60], \\ 320, & x \in (60, 80], \\ 400, & x \in (80, 100]. \end{cases}$$

这个函数的图象是 5 条线段 (不包括左端点), 都平行于 x 轴, 如下图.



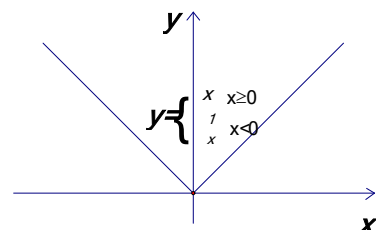
这一种函数我们把它称为分段函数.

例 3 画出函数 $y=|x| = \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0. \end{cases}$ 的图象.

解: 这个函数的图象是两条射线, 分别是第一象限和第二象限的角平分线, 如下图.

说明: ①再次说明函数图象的多样性;

②从例 4 和例 5 看到, 有些函数在它的定义域中, 对于自变量 x 的不同取值范围, 对应法那么不同, 这样的函数通常称为分段函数.



注意分段函数是一个函数，而不是几个函数.

③ 注意：并不是每一个函数都能作出它的图象，如狄利克雷（Dirichlet）函数

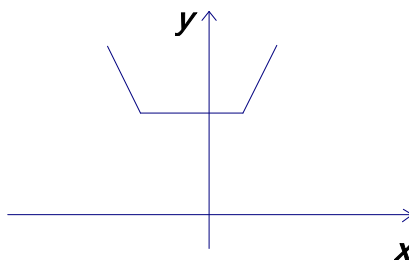
$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数,} \\ 0, & x \text{ 是无理数.} \end{cases} \text{我们就作不出它的图象.}$$

例 4 作出分段函数 $y = |x-1| + |x+2|$ 的图像

解：根据“零点分段法”去掉绝对值符号，即：

$$y = |x-1| + |x+2| = \begin{cases} -(2x+1) & x \leq -2 \\ 3 & -2 < x \leq 1 \\ 2x+1 & x > 1 \end{cases}$$

作出图像如下



例 5 求以下函数的解析式

(1) $f(x) = x^2 + 2x$; 求 $f(2x+1)$;

(2) $f(\sqrt{x}-1) = x + 2\sqrt{x}$, 求 $f(x)$

(3) $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x + 2$, 求 $f(x)$

【课堂练习】

1. 假设 $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$, 那么 $f(x-1) = \underline{2\sqrt{x-1} - 1}$

2. $f(x+1) = 2(x^2 + x + 1)$, 那么 $f(x) = \underline{2x^2 - 2x + 2}$

3. 某城市出租车按如下方法收费，起步价 6 元，可行 3km，3km 到 10km 每走 1km 加价 1 元，10km 后每走 1km 加价 0.8 元，某人坐出租车走了 12km，他应交费 14.6 元

4. 假设 $f(x)$ 满足 $f(x) + 2f(-x) = 2x + 1$, 那么 $f(x) = \underline{-2x + 1/3}$

5. 假设 $3f(x) - f(\frac{1}{x}) = 4x$, 那么 $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{2x}$

6 $y = x^2 + \frac{1}{x^2} + 9 (x \neq 0)$;

解: $\because x \neq 0, y = x^2 + \frac{1}{x^2} + 9 = (x - \frac{1}{x})^2 + 11, \therefore y \geq 11$.

另外, 此题利用根本不等式解更简捷: $y = x^2 + \frac{1}{x^2} + 9 \geq 2 + 9 = 11$

7 $y = \frac{5}{2x^2 - 4x + 3}$

$\because 2x^2 - 4x + 3 > 0$ 恒成立(为什么?),

$\therefore$ 函数的定义域为 $\mathbb{R}$, $\therefore$ 原函数可化为 $2yx^2 - 4yx + 3y - 5 = 0$, 由判别式 $\Delta \geq 0$,

即 $16y^2 - 4 \times 2y(3y - 5) = -8y^2 + 40y \geq 0 (y \neq 0)$,

解得 $0 \leq y \leq 5$, 又 $\because y \neq 0, \therefore 0 < y \leq 5$.

注意: 利用判别式法要考察两端点的值是否可以取到.

8 求函数的值域

① $y = x + \sqrt{2 - x}$; ② $y = 2 - \sqrt{4x - x^2}$

解: ① 令 $u = \sqrt{2 - x} \geq 0$, 那么 $x = 2 - u^2$,

原式可化为 $y = 2 - u^2 + u = -(u - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}$, $\because u \geq 0, \therefore y \leq \frac{9}{4}$, $\therefore$ 函数的值域是 $(-\infty, \frac{9}{4}]$.

② 解: 令 $t = 4x - x^2 \geq 0$ 得 $0 \leq x \leq 4$

在此区间内 $(4x - x^2)_{\max} = 4$, $(4x - x^2)_{\min} = 0$ $\therefore$ 函数 $y = 2 - \sqrt{4x - x^2}$ 的值域是 $\{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$

【课后练习】

1. 设 $g(x+2) = 2x+3$, 那么 $g(x)$ 等于 (B)

(A) $2x+1$ (B) $2x-1$ (C) $2x-3$ (D) $2x+7$

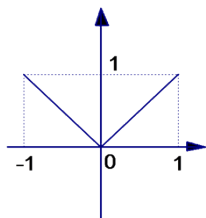
2. $x \neq 0$, 函数 $f(x)$ 满足 $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 那么 $f(x)$ 的表达式为 (B)

(A) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (B) $f(x) = x^2 + 2$ (C) $f(x) = x^2$ (D) $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$

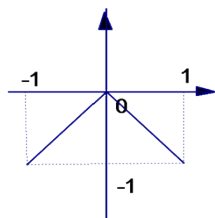
3. $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad (x \neq \pm 1)$, 那么 $f(-x) =$ (A)

(A) $\frac{1}{f(x)}$ (B) $-f(x)$ (C) $-\frac{1}{f(x)}$ (D) $-f(-x)$

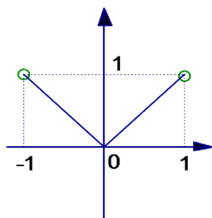
4. 以下图象中, 能表示函数 $y = -|x|, x \in [-1, 1]$ 的图象是 (B)



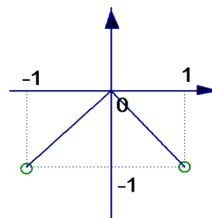
(A)



(B)



(C)



(D)

5. 在 x 克 $a\%$ 的盐水中, 参加 y 克 $b\%$ 的盐水, 浓度变成 $c\%$ ($a, b > 0$, 且 $a \neq b$), 那么 x 与 y 的函数关系式是 (C)

(A) $y = \frac{a-c}{b-c}x \quad (x > 0)$

(B) $y = \frac{b-c}{c-a}x \quad (x > 0)$

(C) $y = \frac{c-a}{b-c}x \quad (x > 0)$

(D) $y = \frac{c-b}{c-a}x \quad (x > 0)$

6 假设 $f(x)$ 满足关系式 $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$, 那么 $f(2)$ 的值为 (B)

A 1

B -1

C $-\frac{3}{2}$

D $\frac{3}{2}$

7. $f(x) = 3x - 1$, $f[g(x)] = 2x + 3$, $g(x)$ 为 x 的一次函数, 求 $g(x)$

8. $f(\sqrt{x} + 1) = x + 2\sqrt{x}$, 求 $f(x)$, $f(x+1)$, $f(x^2)$

附【函数值域的求法】

1. 直接法: 利用常见函数的值域来求

一次函数 $y = ax + b (a \neq 0)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 值域为 $\mathbb{R}$;

反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 值域为 $\{y | y \neq 0\}$;

二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$,

当 $a > 0$ 时, 值域为 $\{y | y \geq \frac{(4ac - b^2)}{4a}\}$; 当 $a < 0$ 时, 值域为 $\{y | y \leq \frac{(4ac - b^2)}{4a}\}$.

例 1. 求以下函数的值域

$$\textcircled{1} y=3x+2(-1 \leq x \leq 1) \quad \textcircled{2} f(x)=2+\sqrt{4-x}$$

$$\textcircled{3} y=\frac{x}{x+1} \quad \textcircled{4} y=x+\frac{1}{x}.$$

解: ① $\because -1 \leq x \leq 1, \therefore -3 \leq 3x \leq 3,$

$\therefore -1 \leq 3x+2 \leq 5$, 即 $-1 \leq y \leq 5$, $\therefore$ 值域是 $[-1, 5]$

$$\textcircled{2} \because \sqrt{4-x} \in [0, +\infty) \quad \therefore f(x) \in [2, +\infty).$$

即函数 $f(x)=2+\sqrt{4-x}$ 的值域是 $\{y | y \geq 2\}$.

$$\textcircled{3} y=\frac{x}{x+1}=\frac{x+1-1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$$

$$\because \frac{1}{x+1} \neq 0 \quad \therefore y \neq 1$$

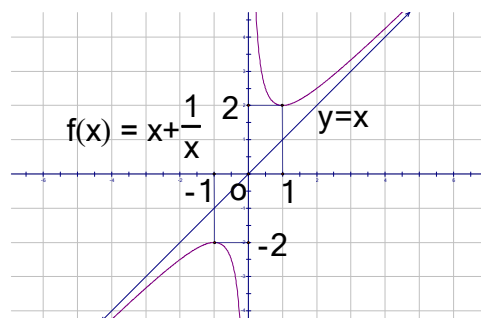
即函数的值域是 $\{y | y \in \mathbb{R} \text{ 且 } y \neq 1\}$ (此法亦称**别离常数法**).

$$\textcircled{4} \text{ 当 } x > 0, \therefore y=x+\frac{1}{x}=(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^2+2 \geq 2,$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } y=-(-x+\frac{1}{-x})=-(\sqrt{-x}-\frac{1}{\sqrt{-x}})^2-2 \leq -2.$$

$\therefore$ 值域是 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. (此法也称为**配方法**)

函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图像为:



2. 二次函数在区间上的值域(最值):

例 2 求以下函数的最大值、最小值与值域:

$$\textcircled{1} y=x^2-4x+1;$$

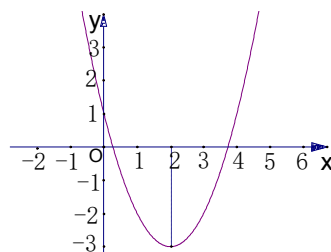
$$\textcircled{2} y=x^2-4x+1, x \in [3, 4];$$

$$\textcircled{3} y=x^2-4x+1, x \in [0, 1]; \quad \textcircled{4} y=x^2-4x+1, x \in [0, 5];$$

解: $\because y=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$, $\therefore$ 顶点为 $(2, -3)$, 顶点横坐标为 2.

① $\because$ 抛物线的开口向上, 函数的定义域 $\mathbb{R}$,

$\therefore x=2$ 时, $y_{\min}=-3$, 无最大值; 函数的值域是 $\{y | y \geq -3\}$.



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/547105065034010036>