

江苏省南京六合区程桥高中 2024 年高考数学考前最后一卷预测卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 过点 $P(2\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$ 的直线 l 与曲线 $y = \sqrt{13 - x^2}$ 交于 A, B 两点, 若 $2\overline{PA} = 5\overline{AB}$, 则直线 l 的斜率为()

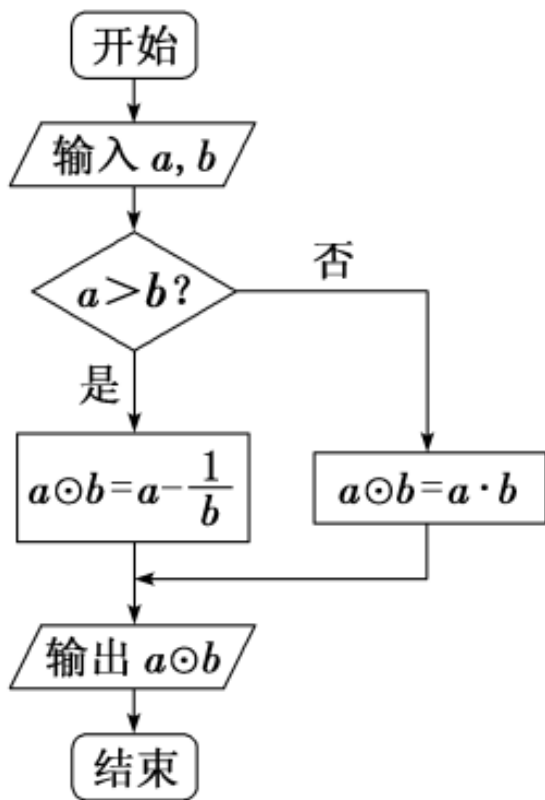
A. $2 - \sqrt{3}$

B. $2 + \sqrt{3}$

C. $2+\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$

D. $2-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}-1$

2. 执行如图所示的程序框图, 若输入 $a = \ln 10$, $b = \lg e$, 则输出的值为 ()



A. 0

B. 1

c. $2\lg e$

D. $2\lg 10$

3. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π , $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后关于 y 轴对称, 则 $f(x - \frac{\pi}{6})$ 的单调递增区间为()

A. $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right] \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\text{B. } \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi \right] \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{C. } \left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi \right] k \in Z$$

$$\text{D. } \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi \right] k \in Z$$

4. 设过点 $P(x, y)$ 的直线分别与 x 轴的正半轴和 y 轴的正半轴交于 A, B 两点, 点 Q 与点 P 关于 y 轴对称, O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA}$, 且 $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$, 则点 P 的轨迹方程是 ()

$$\text{A. } \frac{3}{2}x^2 + 3y^2 = 1 (x > 0, y > 0)$$

$$\text{B. } \frac{3}{2}x^2 - 3y^2 = 1 (x > 0, y > 0)$$

$$\text{C. } 3x^2 - \frac{3}{2}y^2 = 1 (x > 0, y > 0)$$

$$\text{D. } 3x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 1 (x > 0, y > 0)$$

5. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 和点 $D(2, 0)$, 直线 $x = ty - 2$ 与抛物线 C 交于不同两点 A, B , 直线 BD 与抛物线 C 交于另一点 E . 给出以下判断:

①以 BE 为直径的圆与抛物线准线相离;

②直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积为 -2 ;

③设过点 A, B, E 的圆的圆心坐标为 (a, b) , 半径为 r , 则 $a^2 - r^2 = 4$.

其中, 所有正确判断的序号是 ()

A. ①②

B. ①③

C. ②③

D. ①②③

6. “ $a \leq 0$ ” “是函数 $f(x) = |(ax-1)x|$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. 下列不等式成立的是 ()

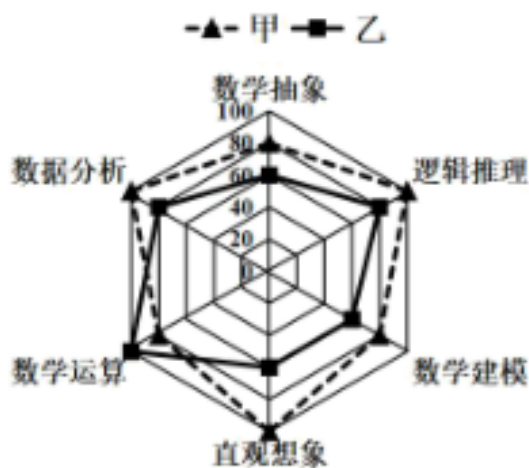
$$\text{A. } \sin \frac{1}{2} > \cos \frac{1}{2}$$

$$\text{B. } \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{C. } \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$$

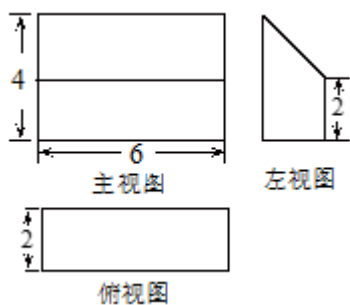
$$\text{D. } \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

8. 为比较甲、乙两名高中学生的数学素养, 对课程标准中规定的数学六大素养进行指标测验 (指标值满分为 100 分, 分值高者为优), 根据测验情况绘制了如图所示的六大素养指标雷达图, 则下面叙述不正确的是 ()



- A. 甲的数据分析素养优于乙 B. 乙的数据分析素养优于数学建模素养
- C. 甲的六大素养整体水平优于乙 D. 甲的六大素养中数学运算最强

9. 一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（ ）



- A. $48+12\sqrt{2}$ B. $60+12\sqrt{2}$ C. $72+12\sqrt{2}$ D. 84

10. 生活中人们常用“通五经贯六艺”形容一个人才识技艺过人，这里的“六艺”其实源于中国周朝的贵族教育体系，具体包括“礼、乐、射、御、书、数”.为弘扬中国传统文化，某校在周末学生业余兴趣活动中开展了“六艺”知识讲座，每艺安排一节，连排六节，则满足“数”必须排在前两节，“礼”和“乐”必须分开安排的概率为（ ）

- A. $\frac{7}{60}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{13}{60}$ D. $\frac{1}{4}$

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线经过圆 $E: x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ 的圆心，则双曲线 C 的离心率为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2

12. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ ，则 $f\left[f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right)\right] =$ （ ）

- A. 2 B. $\frac{2}{3}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. 3

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(e+x)=f(e-x)$ ，且 $f(0)=0$ ，当 $x \in (0, e]$ 时， $f(x)=\ln x$. 已知方程

$f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2e}x\right)$ 在区间 $[-e, 3e]$ 上所有的实数根之和为 $3ea$. 将函数 $g(x)=3\sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)+1$ 的图象向右平移 a 个

单位长度，得到函数 $h(x)$ 的图象，则 $a=$ _____， $h(8)=$ _____.

14. 若方程 $a^x = x (a > 0, a \neq 1)$ 有两个不等实根，则实数 a 的取值范围是 _____.

15. 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的左焦点为 F ，点 P 在椭圆上且在 x 轴的上方，若线段 PF 的中点在以原点 O 为圆心， $|OF|$ 为半径的圆上，则直线 PF 的斜率是 _____.

16. 已知函数 $f(x)=\log_2 x$ ，在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上随机取一个数 x_0 ，则使得 $f(x_0) \geq 0$ 的概率为 _____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ， $\sqrt{3}\sin(A+B)=4\sin^2\frac{C}{2}$.

(1) 求 $\cos C$;

(2) 若 $b=7$ ， D 是 BC 边上的点，且 $\triangle ACD$ 的面积为 $6\sqrt{3}$ ，求 $\sin\angle ADB$.

18. (12分) 某调查机构对某校学生做了一个是否同意生“二孩”抽样调查，该调查机构从该校随机抽查了100名不同性别的学生，调查统计他们是同意父母生“二孩”还是反对父母生“二孩”，现已得知100人中同意父母生“二孩”占60%，统计情况如下表：

	同意	不同意	合计
男生	a	5	
女生	40	d	
合计			100

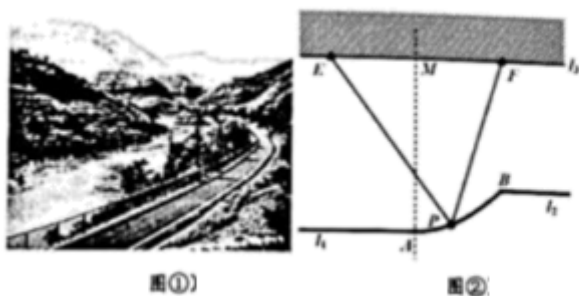
(1) 求 a, d 的值，根据以上数据，能否有97.5%的把握认为是否同意父母生“二孩”与性别有关？请说明理由；

(2) 将上述调查所得的频率视为概率，现在从所有学生中，采用随机抽样的方法抽取4位学生进行长期跟踪调查，记被抽取的4位学生中持“同意”态度的人数为 X ，求 X 的分布列及数学期望.

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(k^2 \geq k_0)$	0.15	0.100	0.050	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

19. (12分) 某地为改善旅游环境进行景点改造. 如图, 将两条平行观光道 l_1 和 l_2 通过一段抛物线形状的栈道 AB 连通 (道路不计宽度), l_1 和 l_2 所在直线的距离为 0.5 (百米), 对岸堤岸线 l_3 平行于观光道且与 l_2 相距 1.5 (百米) (其中 A 为抛物线的顶点, 抛物线的对称轴垂直于 l_3 , 且交 l_3 于 M), 在堤岸线 l_3 上的 E, F 两处建造建筑物, 其中 E, F 到 M 的距离为 1 (百米), 且 F 恰在 B 的正对岸 (即 $BF \perp l_3$).



(1) 在图②中建立适当的平面直角坐标系, 并求栈道 AB 的方程;

(2) 游客 (视为点 P) 在栈道 AB 的何处时, 观测 EF 的视角 ($\angle EPF$) 最大? 请在 (1) 的坐标系中, 写出观测点 P 的坐标.

20. (12分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前列项和为 S_n , 已知 $a_1 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{2 + a_{n-1}} (n \geq 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

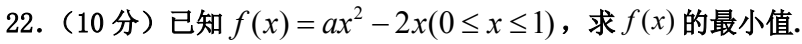
(2) 求证: $\frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} \leq S_n < \frac{11}{6}$.

21. (12分) 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 侧面 PAD 为正三角形, 且面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$, E, F 分别为棱 AB, PC 的中点.

(1) 求证: $EF \parallel$ 平面 PAD ;

(2) (文科) 求三棱锥 $B-EFC$ 的体积;

(理科) 求二面角 $P-EC-D$ 的正切值.



一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

【解析】

利用切割线定理求得 $|PA|, |AB|$ ，利用勾股定理求得圆心到弦 AB 的距离，从而求得 $\angle APO = 30^\circ$ ，结合

$\angle POx = 45^\circ$, 求得直线 l 的倾斜角为 15° , 进而求得 l 的斜率.

【详解】

曲线 $y = \sqrt{13 - x^2}$ 为圆 $x^2 + y^2 = 13$ 的上半部分, 圆心为 $(0, 0)$, 半径为 $\sqrt{13}$.

设 PQ 与曲线 $y = \sqrt{13 - x^2}$ 相切于点 Q ,

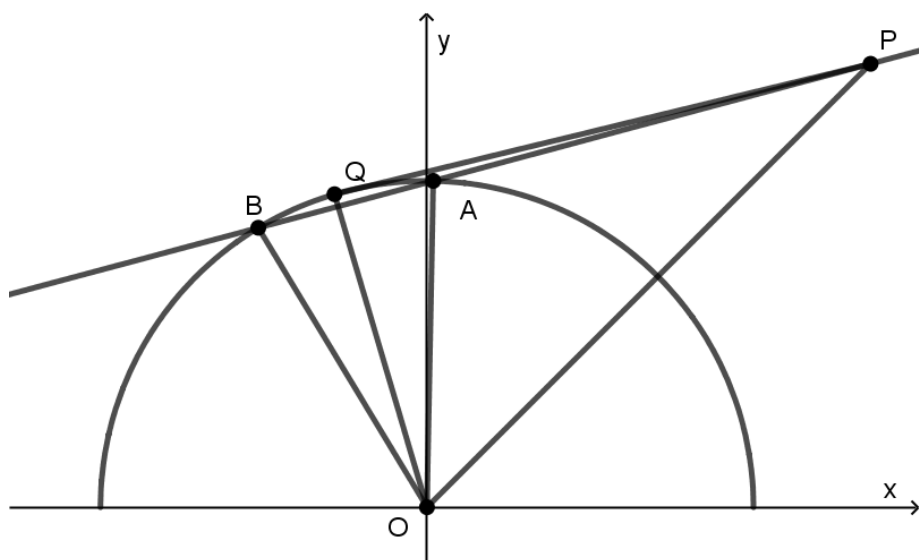
$$\text{则 } |PQ|^2 = |PA| \cdot |PB| = |PA| \cdot (|PA| + |AB|) = \frac{7}{5}|PA|^2 = |PO|^2 - |OQ|^2 = 35$$

所以 $|PA| = 5, |AB| = 2,$

O 到弦 AB 的距离为 $\sqrt{13-1}=2\sqrt{3}$, $\sin \angle APO = \frac{2\sqrt{3}}{|OP|} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, 所以 $\angle APO = 30^\circ$, 由于 $\angle POx = 45^\circ$,

所以直线 l 的倾斜角为 $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$, 斜率为 $\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \times \tan 30^\circ} = 2 - \sqrt{3}$.

故选：A



【点睛】

本小题主要考查直线和圆的位置关系，考查数形结合的数学思想方法，属于中档题.

2、A

【解析】

根据输入的值大小关系，代入程序框图即可求解.

【详解】

输入 $a = \ln 10$ ， $b = \lg e$ ，

因为 $\ln 10 > 1 > \lg e$ ，所以由程序框图知，

输出的值为 $a - \frac{1}{b} = \ln 10 - \frac{1}{\lg e} = \ln 10 - \ln 10 = 0$.

故选：A

【点睛】

本题考查了对数式大小比较，条件程序框图的简单应用，属于基础题.

3、D

【解析】

先由函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的周期和图象的平移后的函数的图象性质得出函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的解析式，从而得出 $f(x - \frac{\pi}{6})$ 的解析式，再根据正弦函数 $f(x) = \sin x$ 的单调递增区间得出函数 $f(x - \frac{\pi}{6})$ 的单调递增区间，可得选项.

【详解】

因为函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期是 π , 所以 $\pi = \frac{2\pi}{\omega}$, 即 $\omega = 2$, 所以 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$,

$f(x) = \sin(2x + \varphi)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到的函数解析式为

$$y = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \varphi\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi\right),$$

由于其图象关于 y 轴对称, 所以 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 所以 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

$$\text{所以 } f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

因为 $f(x) = \sin x$ 的递增区间是: $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right], k \in \mathbb{Z}$,

由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 得: $-\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$,

所以函数 $f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$.

故选: D.

【点睛】

本题主要考查正弦型函数的周期性, 对称性, 单调性, 图象的平移, 在进行图象的平移时, 注意自变量的系数, 属于中档题.

4、A

【解析】

设 A, B 坐标, 根据向量坐标运算表示出 $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA}$, 从而可利用 x, y 表示出 a, b ; 由坐标运算表示出 $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$, 代入 a, b 整理可得所求的轨迹方程.

【详解】

设 $A(a, 0), B(0, b)$, 其中 $a > 0, b > 0$

$$\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA} \quad \therefore (x, y - b) = 2(a - x, -y), \text{ 即 } \begin{cases} x = 2(a - x) \\ y - b = -2y \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a = \frac{3x}{2} > 0 \\ b = 3y > 0 \end{cases}$$

Q, P, Q 关于 y 轴对称 $\therefore Q(-x, y)$

$$\therefore \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AB} = (-x, y) \cdot (-a, b) = ax + by = 1 \quad \therefore \frac{3}{2}x^2 + 3y^2 = 1 (x > 0, y > 0)$$

故选：A

【点睛】

本题考查动点轨迹方程的求解，涉及到平面向量的坐标运算、数量积运算；关键是利用动点坐标表示出变量，根据平面向量数量积的坐标运算可整理得轨迹方程.

5、D

【解析】

对于①，利用抛物线的定义，利用 $d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{|BF| + |EF|}{2} > \frac{|BE|}{2} = R$ 可判断；

对于②，设直线 DE 的方程为 $x = my + 2$ ，与抛物线联立，用坐标表示直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积，即可判断；

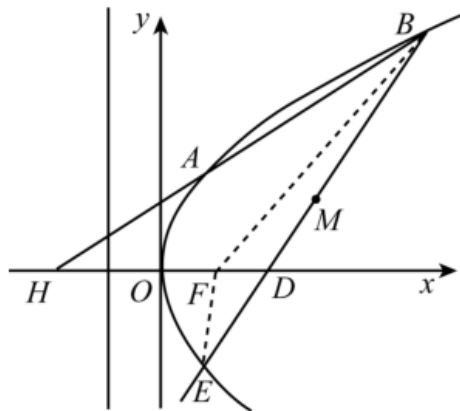
对于③，将 $x = ty - 2$ 代入抛物线 C 的方程可得， $y_A y_1 = 8$ ，从而， $y_A = -y_2$ ，利用韦达定理可得

$|BE|^2 = 16m^4 + 48m^2 + 32$ ，再由 $r^2 = |MN|^2 + \left(\frac{|BE|}{2}\right)^2$ ，可用 m 表示 r^2 ，线段 BE 的中垂线与 x 轴的交点（即圆心

N ）横坐标为 $2m^2 + 4$ ，可得 a ，即可判断.

【详解】

如图，设 F 为抛物线 C 的焦点，以线段 BE 为直径的圆为 M ，则圆心 M 为线段 BE 的中点.



设 B ， E 到准线的距离分别为 d_1 ， d_2 ， $\odot M$ 的半径为 R ，点 M 到准线的距离为 d ，

显然 B ， E ， F 三点不共线，

则 $d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{|BF| + |EF|}{2} > \frac{|BE|}{2} = R$ ．所以①正确.

由题意可设直线 DE 的方程为 $x = my + 2$ ，

代入抛物线 C 的方程，有 $y^2 - 4my - 8 = 0$ ．

设点 B ， E 的坐标分别为 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) ，

则 $y_1 + y_2 = 4m$, $y_1 y_2 = -8$.

所以 $x_1 x_2 = (my_1 + 2)(my_2 + 2) = m^2 y_1 y_2 + 2m(y_1 + y_2) + 4 = 4$.

则直线 OB 与直线 OE 的斜率乘积为 $\frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -2$. 所以②正确.

将 $x = ty - 2$ 代入抛物线 C 的方程可得, $y_A y_1 = 8$, 从而, $y_A = -y_2$. 根据抛物线的对称性可知,

A , E 两点关于 x 轴对称, 所以过点 A , B , E 的圆的圆心 N 在 x 轴上.

由上, 有 $y_1 + y_2 = 4m$, $x_1 + x_2 = 4m^2 + 4$,

则 $|BE|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 + (y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2 = 16m^4 + 48m^2 + 32$.

所以, 线段 BE 的中垂线与 x 轴的交点 (即圆心 N) 横坐标为 $2m^2 + 4$, 所以 $a = 2m^2 + 4$.

于是, $r^2 = |MN|^2 + \left(\frac{|BE|}{2}\right)^2 = \left(2m^2 + 4 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + 4m^4 + 12m^2 + 8$,

代入 $x_1 + x_2 = 4m^2 + 4$, $y_1 + y_2 = 4m$, 得 $r^2 = 4m^4 + 16m^2 + 12$,

所以 $a^2 - r^2 = (2m^2 + 4)^2 - (4m^4 + 16m^2 + 12) = 4$.

所以③正确.

故选: D

【点睛】

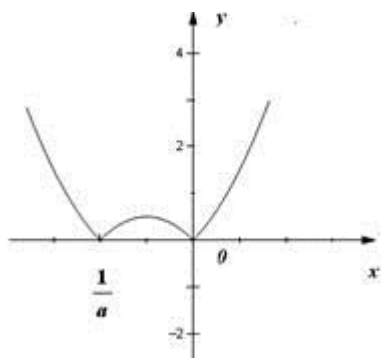
本题考查了抛物线的性质综合, 考查了学生综合分析, 转化划归, 数形结合, 数学运算的能力, 属于较难题.

6、C

【解析】

$f(x) = |(ax-1)x| = |ax^2 - x|$, 令 $ax^2 - x = 0$, 解得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{a}$

当 $a \leq 0$, $f(x)$ 的图像如下图



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/547113164116006114>