

C. $\{x \mid -11 < x, 0\}$ **D.** $\{x \mid -5 < x, 6\}$

6. 已知 $(2-mx)(1-\frac{1}{x})^3$ 的展开式中的常数项为 8, 则实数 $m =$ ()

- A. 2 B. -2 C. -3 D. 3

7. 已知双曲线 $M: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 的焦距为 $2c$, 若 M 的渐近线上存在点 T , 使得经过点 T 所作的圆

$(x-c)^2 + y^2 = a^2$ 的两条切线互相垂直, 则双曲线 M 的离心率的取值范围是 ()

- A. $(1, \sqrt{2}]$ B. $(\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ C. $(\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ D. $(\sqrt{3}, \sqrt{5}]$

8. 下列函数中既关于直线 $x=1$ 对称, 又在区间 $[-1, 0]$ 上为增函数的是 ()

- A. $y = \sin \pi x$. B. $y = |x-1|$
C. $y = \cos \pi x$ D. $y = e^x + e^{-x}$

9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $2S_n = 2^{n+1} + \lambda$, 则 λ 的值是 ()

- A. 4 B. 2 C. -2 D. -4

10. 我国古代数学家秦九韶在《数书九章》中记述了“三斜求积术”, 用现代式子表示即为: 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C

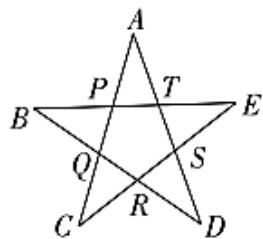
所对的边分别为 a, b, c , 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[(ab)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]}$. 根据此公式, 若

$a \cos B + (b+3c) \cos A = 0$, 且 $a^2 - b^2 - c^2 = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{3}$

11. 中国的国旗和国徽上都有五角星, 正五角星与黄金分割有着密切的联系, 在如图所示的正五角星中, 以 $A, B,$

C, D, E 为顶点的多边形为正五边形, 且 $PT = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AP$, 则 $\frac{PT}{AT} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \frac{PT}{ES} =$ ()



- A. $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \frac{PT}{QR}$ B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \frac{PT}{RQ}$ C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \frac{PT}{RD}$ D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \frac{PT}{RC}$

12. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(4, 9)$, 且 $P(X \leq 2) = P(X \geq a)$, 则 $a =$ ()

- A. 3 B. 5 C. 6 D. 7

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(1-x)(1+x)^4$ 展开式中，含 x^2 项的系数为_____.

14. 已知复数 $z = (1+2i)(a+i)$, 其中 i 是虚数单位. 若 z 的实部与虚部相等, 则实数 a 的值为_____.

15. 已知两圆相交于两点 $A(a, 3), B(-1, 1)$, 若两圆圆心都在直线 $x+y+b=0$ 上, 则 $a+b$ 的值是_____.

16. 抛物线 $y = \frac{1}{12}x^2$ 的焦点坐标为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

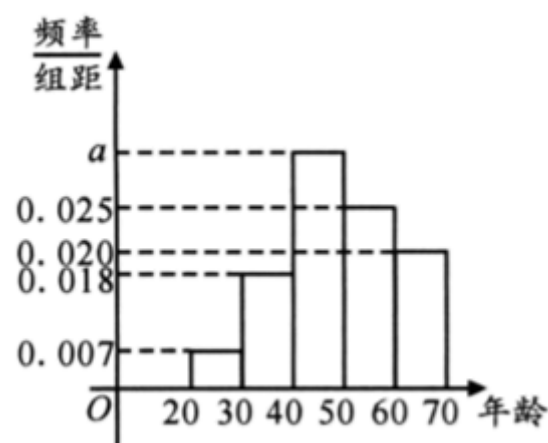
17. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $x_{n+1} = x_n^2 - 6$, $n \in N^*$, 且对任意的 $n \in N^*$ 都有 $x_n < \frac{\sqrt{21}-1}{2}$,

(I) 证明: 对任意 $n \in N^*$, 都有 $-3 \leq x_n \leq \frac{1-\sqrt{21}}{2}$;

(II) 证明: 对任意 $n \in N^*$, 都有 $|x_{n+1} + 2| \geq 2|x_n + 2|$;

(III) 证明: $x_1 = -2$.

18. (12 分) 某保险公司给年龄在 20-70 岁的民众提供某种疾病的一年期医疗保险, 现从 10000 名参保人员中随机抽取 100 名作为样本进行分析, 按年龄段 $[20, 30), [30, 40), [40, 50), [50, 60), [60, 70]$ 分成了五组, 其频率分布直方图如下图所示; 参保年龄与每人每年应交纳的保费如下表所示. 据统计, 该公司每年为这一万名参保人员支出的各种费用为一百万元.



年龄 (单位: 岁)	$[20, 30)$	$[30, 40)$	$[40, 50)$	$[50, 60)$	$[60, 70]$
---------------	------------	------------	------------	------------	------------

保费 (单位: 元)	x	$2x$	$3x$	$4x$	$5x$
---------------	-----	------	------	------	------

- (1) 用样本的频率分布估计总体分布, 为使公司不亏本, 求 x 精确到整数时的最小值 x_0 ;
- (2) 经调查, 年龄在 $[60, 70]$ 之间的老人每 50 人中有 1 人患该项疾病(以此频率作为概率). 该病的治疗费为 12000 元, 如果参保, 保险公司补贴治疗费 10000 元. 某老人年龄 66 岁, 若购买该项保险(x 取 (1) 中的 x_0). 针对此疾病所支付的费用为 X 元; 若没有购买该项保险, 针对此疾病所支付的费用为 Y 元. 试比较 X 和 Y 的期望值大小, 并判断该老人购买此项保险是否划算?

19. (12 分) 某单位准备购买三台设备, 型号分别为 A, B, C 已知这三台设备均使用同一种易耗品, 提供设备的商家规定: 可以在购买设备的同时购买该易耗品, 每件易耗品的价格为 100 元, 也可以在设备使用过程中, 随时单独购买易耗品, 每件易耗品的价格为 200 元. 为了决策在购买设备时应购买的易耗品的件数. 该单位调查了这三种型号的设备各 60 台, 调查每台设备在一个月中使用的易耗品的件数, 并得到统计表如下所示.

每台设备一个月中使用的易耗品的件数		6	7	8
频数	型号 A	30	30	0
	型号 B	20	30	10
	型号 C	0	45	15

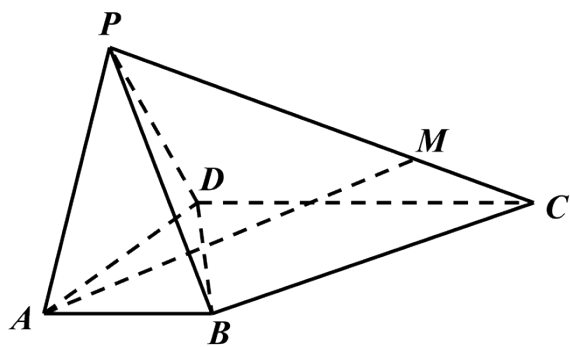
将调查的每种型号的设备的频率视为概率, 各台设备在易耗品的使用上相互独立.

- (1) 求该单位一个月中 A, B, C 三台设备使用的易耗品总数超过 21 件的概率;
- (2) 以该单位一个月购买易耗品所需总费用的期望值为决策依据, 该单位在购买设备时应同时购买 20 件还是 21 件易耗品?

20. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$, (t 为参数). 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho \cos \theta - 8 = 0$.

- (1) 求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;
- (2) 若点 P 是直线 l 的一点, 过点 P 作曲线 C 的切线, 切点为 Q , 求 $|PQ|$ 的最小值.

21. (12 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \perp PA$, $AB \parallel CD$, $AB = \frac{1}{2}CD$, $\triangle PAD$ 是等边三角形, 点 M 在棱 PC 上, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.

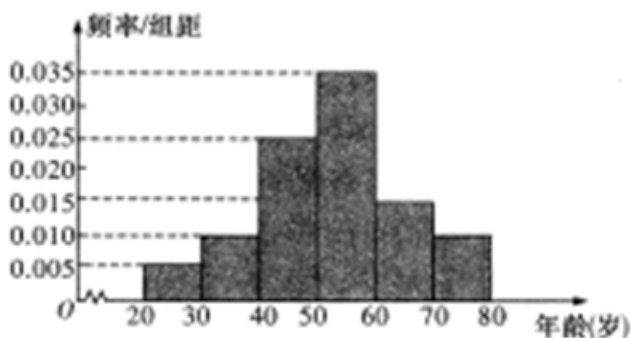


(1) 求证：平面 $PCD \perp$ 平面 PAD ；

(2) 若 $AB = AD$ ，求直线 AM 与平面 PBC 所成角的正弦值的最大值；

(3) 设直线 AM 与平面 PBD 相交于点 N ，若 $\frac{AN}{AM} = \frac{PM}{PC}$ ，求 $\frac{AN}{AM}$ 的值.

22. (10 分) 2019 年是中华人民共和国成立 70 周年. 为了让人民了解建国 70 周年的风雨历程, 某地的民调机构随机选取了该地的 100 名市民进行调查, 将他们的年龄分成 6 段 $[20,30)$, $[30,40)$, $\dots$, $[70,80]$, 并绘制了如图所示的频率分布直方图.



(1) 现从年龄在 $[20,30)$, $[30,40)$, $[40,50)$ 内的人员中按分层抽样的方法抽取 8 人, 再从这 8 人中随机选取 3 人进行座谈, 用 X 表示年龄在 $[30,40)$ 内的人数, 求 X 的分布列和数学期望;

(2) 若用样本的频率代替概率, 用随机抽样的方法从该地抽取 20 名市民进行调查, 其中有 k 名市民的年龄在 $[30,50)$ 的概率为 $P(X=k)$ ($k=0,1,2,\dots,20$). 当 $P(X=k)$ 最大时, 求 k 的值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

在等差数列 $\{a_n\}$ 中,利用已知可求得通项公式 $a_n = 2n - 9$,进而 $b_n = \frac{3}{a_n} = \frac{3}{2n-9}$,借助 $f(x) = \frac{3}{2x-9}$ 函数的单调性

可知,当 $n = 5$ 时, b_n 取最大即可求得结果.

【详解】

因为 $a_5 + a_6 + a_7 = 9$,所以 $3a_6 = 9$,即 $a_6 = 3$,又 $a_2 = -5$,所以公差 $d = 2$,所以 $a_n = 2n - 9$,即 $b_n = \frac{3}{2n-9}$,因

为函数 $f(x) = \frac{3}{2x-9}$,在 $x < 4.5$ 时,单调递减,且 $f(x) < 0$;在 $x > 4.5$ 时,单调递增,且 $f(x) > 0$.所以数列 $\{b_n\}$

的最大值是 b_5 ,且 $b_5 = \frac{3}{1} = 3$,所以数列 $\{b_n\}$ 的最大值是3.

故选:D.

【点睛】

本题考查等差数列的通项公式,考查数列与函数的关系,借助函数单调性研究数列最值问题,难度较易.

2、D

【解析】

根据题意,分析该邮车到第 k 站时,一共装上的邮件和卸下的邮件数目,进而计算可得答案.

【详解】

解:根据题意,该邮车到第 k 站时,一共装上了 $(n-1) + (n-2) + \dots + (n-k) = \frac{(2n-1-k) \times k}{2}$ 件邮件,

需要卸下 $1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) = \frac{k \times (k-1)}{2}$ 件邮件,

则 $a_k = \frac{(2n-1-k) \times k}{2} - \frac{k \times (k-1)}{2} = k(n-k)$,

故选:D.

【点睛】

本题主要考查数列递推公式的应用,属于中档题.

3、B

【解析】

因为 $A \cup B = A$,所以 $B \subseteq A$,所以 $m = 3$ 或 $m = \sqrt{m}$.

若 $m = 3$,则 $A = \{1, 3, \sqrt{3}\}$, $B = \{1, 3\}$,满足 $A \cup B = A$.

若 $m = \sqrt{m}$,解得 $m = 0$ 或 $m = 1$.若 $m = 0$,则 $A = \{1, 3, 0\}$, $B = \{1, 3, 0\}$,满足 $A \cup B = A$.若 $m = 1$,

$A = \{1, 3, 1\}$, $B = \{1, 1\}$ 显然不成立,综上 $m = 0$ 或 $m = 3$,选B.

4、B

【解析】

设直线 l 的方程为 $x = my + 1$ 代入抛物线方程, 利用韦达定理可得 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4$, 由 $|AF| = 3|BF|$ 可知

$\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$ 所以可得 $y_1 = -3y_2$ 代入化简求得参数, 即可求得结果.

【详解】

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ($y_1 > 0, y_2 < 0$). 易知直线 l 的斜率存在且不为 0, 设为 $\frac{1}{m}$, 则直线 l 的方程为 $x = my + 1$.

与抛物线方程联立得 $y^2 = 4(my + 1)$, 所以 $y_1 y_2 = -4, y_1 + y_2 = 4m$. 因为 $|AF| = 3|BF|$, 所以 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$, 得

$$y_1 = -3y_2, \text{ 所以 } y_2^2 = \frac{4}{3}, \text{ 即 } y_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, y_1 = 2\sqrt{3}, \text{ 所以 } \frac{1}{m} = \frac{4}{y_1 + y_2} = \sqrt{3}.$$

故选:B.

【点睛】

本题考查直线与抛物线的位置关系, 考查韦达定理及向量的坐标之间的关系, 考查计算能力, 属于中档题.

5、C

【解析】

根据 $A * B$ 定义, 求出 $A * B$, 即可求出结论.

【详解】

因为集合 $B = \{x \mid 1, -x, 5\}$, 所以 $B = \{x \mid -5, x, -1\}$,

则 $A * B = \{x \mid -6 < x, 1\}$, 所以 $B * (A * B) = \{x \mid -11 < x, 0\}$.

故选:C.

【点睛】

本题考查集合的新定义运算, 理解新定义是解题的关键, 属于基础题.

6、A

【解析】

先求 $(1 - \frac{1}{x})^3$ 的展开式, 再分类分析 $(2 - mx)$ 中用哪一项与 $(1 - \frac{1}{x})^3$ 相乘, 将所有结果为常数的相加, 即为 $(2 - mx)(1 - \frac{1}{x})^3$ 展开式的常数项, 从而求出 m 的值.

【详解】

$(1 - \frac{1}{x})^3$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_3^r \cdot 1^{3-r} \cdot (-\frac{1}{x})^r = C_3^r \cdot (-1)^r x^{-r}$,

当 $(2 - mx)$ 取 2 时, 常数项为 $2 \times C_3^0 = 2$,

当 $(2 - mx)$ 取 $-mx$ 时, 常数项为 $-m \times C_3^1 \times (-1)^1 = 3m$

由题知 $2 + 3m = 8$, 则 $m = 2$.

故选: A.

【点睛】

本题考查了两个二项式乘积的展开式中的系数问题, 其中对 $(2 - mx)$ 所取的项要进行分类讨论, 属于基础题.

7、B

【解析】

由 $b > a$ 可得 $e > \sqrt{2}$; 由过点 T 所作的圆的两条切线互相垂直可得 $|TF| = \sqrt{2}a$, 又焦点 $F(c, 0)$ 到双曲线渐近线的距离为 b , 则 $|TF| = \sqrt{2}a \geq b$, 进而求解.

【详解】

$$\text{Q } b > a, \text{ 所以离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} > \sqrt{2},$$

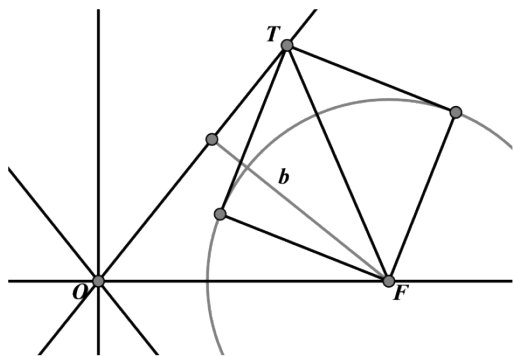
又圆 $(x - c)^2 + y^2 = a^2$ 是以 $F(c, 0)$ 为圆心, 半径 $r = a$ 的圆, 要使得经过点 T 所作的圆的两条切线互相垂直, 必有

$$|TF| = \sqrt{2}a,$$

而焦点 $F(c, 0)$ 到双曲线渐近线的距离为 b , 所以 $|TF| = \sqrt{2}a \geq b$, 即 $\frac{b}{a} \leq \sqrt{2}$,

所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \leq \sqrt{3}$, 所以双曲线 M 的离心率的取值范围是 $(\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

故选: B



【点睛】

本题考查双曲线的离心率的范围, 考查双曲线的性质的应用.

8、C

【解析】

根据函数的对称性和单调性的特点, 利用排除法, 即可得出答案.

【详解】

A 中, 当 $x=1$ 时, $y=\sin \pi x=0 \neq 1$, 所以 $y=\sin \pi x$ 不关于直线 $x=1$ 对称, 则 A 错误;

B 中, $y=|x-1|=\begin{cases} x-1, (x \geq 1) \\ -x+1, (x < 1) \end{cases}$, 所以在区间 $[-1, 0]$ 上为减函数, 则 B 错误;

D 中, $y=f(x)=e^x+e^{-x}$, 而 $f(0)=2, f(2)=e^2+e^{-2}$, 则 $f(0) \neq f(2)$, 所以 $y=e^x+e^{-x}$ 不关于直线 $x=1$ 对称, 则 D 错误;

故选: C.

【点睛】

本题考查函数基本性质, 根据函数的解析式判断函数的对称性和单调性, 属于基础题.

9、C

【解析】

利用 S_n 先求出 a_n , 然后计算出结果.

【详解】

根据题意, 当 $n=1$ 时, $2S_1=2a_1=4+\lambda, \therefore a_1=\frac{4+\lambda}{2}$,

故当 $n \geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}$,

Q 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列,

则 $a_1=1$, 故 $\frac{4+\lambda}{2}=1$,

解得 $\lambda=-2$,

故选 C.

【点睛】

本题主要考查了等比数列前 n 项和 S_n 的表达形式, 只要求出数列中的项即可得到结果, 较为基础.

10、A

【解析】

根据 $a \cos B + (b+3c) \cos A = 0$, 利用正弦定理边化为角得 $\sin A \cos B + \cos A \sin B + 3 \sin C \cos A = 0$, 整理为

$\sin C(1+3 \cos A)=0$, 根据 $\sin C \neq 0$, 得 $\cos A = -\frac{1}{3}$, 再由余弦定理得 $bc=3$, 又 $a^2-b^2-c^2=2$, 代入公式

$$S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[(bc)^2 - \left(\frac{c^2+b^2-a^2}{2} \right)^2 \right]} \text{ 求解.}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/547114062164006063>