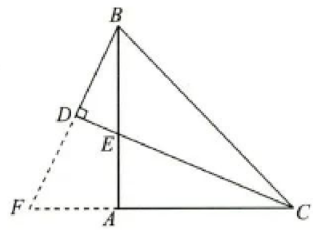
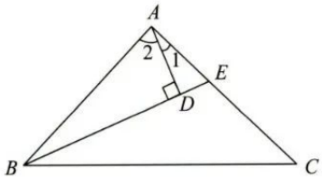
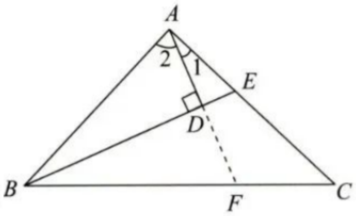
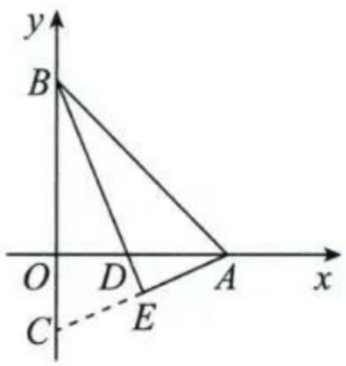
重难点 10 全等三角形中“雨伞”模型

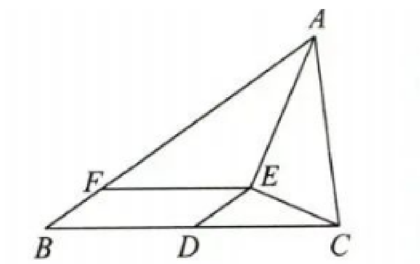
【知识梳理】







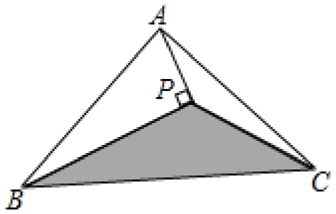




【考点剖析】

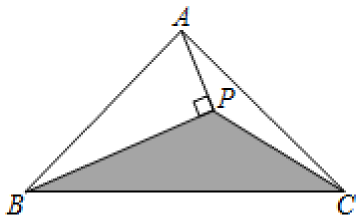
一．选择题（共 2 小题）

1．（2022 秋•东港区校级期末）如图，△ABC 的面积为 $10cm^2$，AP 垂直∠B 的平分线 BP 于 P，则△PBC 的面积为（　　）



A．$4cm^2$　　B．$5cm^2$　　C．$6cm^2$　　D．$7cm^2$

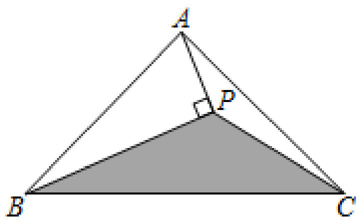
2．（2022秋•常州期中）如图，△ABC 的面积为 $12cm^2$，AP 垂直于∠ABC 的平分线 BP 于 P，则△PBC 的面积为（　　）



A．$9cm^2$　　B．$8cm^2$　　C．$6cm^2$　　D．$5cm^2$

二．填空题（共1小题）

3．（2022秋•邗江区校级月考）如图，△ABC 的面积为 $8cm^2$，AP 垂直∠B 的平分线 BP 于点 P，则△PBC 的面积为____cm^2．

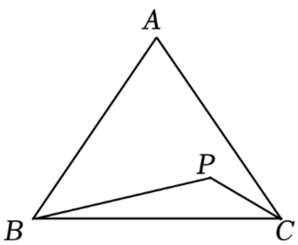


三．解答题

4．（2021秋•荔城区校级期中）如图，△ABC 中，$AB=AC$，点 P 在△ABC 内连接 PB 和 PC，$BP=AB$．

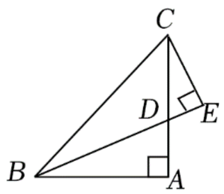
（1）若∠$BAC=50°$，且∠$PBC=$∠ACP，求∠BPC 的度数．

（2）取 BC 的中点 D，连接 AD 交 CP 延长线于点 M，当∠$ABP=2$∠ACP 时，试判断∠BAC 与∠ABP 之间的关系，画出图形并说明理由．



5．（2021秋•滨湖区校级月考）如图，已知在△ABC中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，BD平分$\angle ABC$，$CE\perp BD$交BD的延长线于点E.

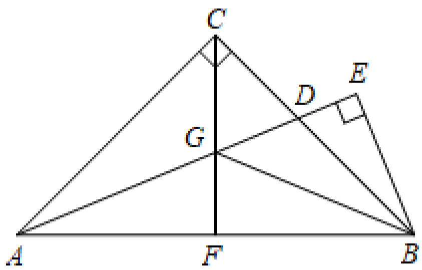
求证：$CE=\frac{1}{2}BD$.



6．（2023·浙江·八年级假期作业）如图，$\triangle ABC$中，$AC=BC$，$\angle ACB=90°$，AD平分$\angle BAC$交BC于点D，过点B作$BE\perp AD$，交AD延长线于点E，F为AB的中点，连接CF，交AD于点G，连接BG.

（1）线段BE与线段AD有何数量关系？并说明理由；

（2）判断$\triangle BEG$的形状，并说明理由.



7．（2021·全国·九年级专题练习）如图1，在平面直角坐标系中，直线AB分别交x轴、y轴于$A(a,0),B(0,b)$两点，且a,b满足$(a-b)^2+|a-4t|=0$，且$t>0,t$是常数，直线BD平分$\angle OBA$，交x轴于点D.

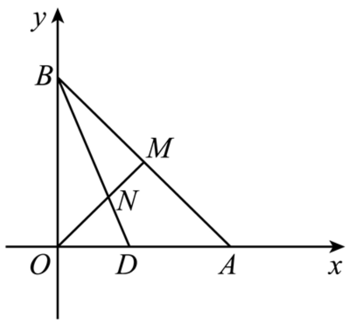


图1

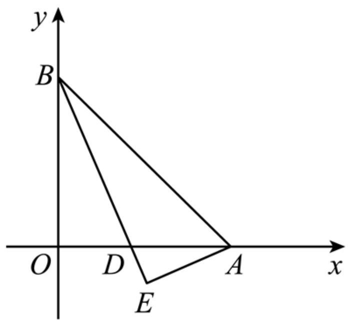


图2

（1）若 AB 的中点为 M，连接 OM 交 BD 于点 N，求证：$ON=OD$；

（2）如图 2，过点 A 作 $AE\perp BD$，垂足为 E，猜想 AE 与 BD 间的数量关系，并证明你的猜想.

8.（2023 春·江西抚州·八年级统考期末）如图，在△ABC 中，点 D 为边 BC 的中点，点 E 在△ABC 内，AE 平分∠BAC，CE⊥AE 点 F 在 AB 上，且 BF=DE

（1）求证：四边形 BDEF 是平行四边形

（2）线段 AB，BF，AC 之间具有怎样的数量关系？证明你所得到的结论

9.（2022 秋·八年级课时练习）已知，如图 ΔABC 中，$AB=AC$，$\angle A=90°$，$\angle ACB$ 的平分线 CD 交 AB 于点 E，$\angle BDC$=90°，

求证：$CE=2BD$.

10．（2021春·八年级课时练习）在△ABC中，AB=AC，将线段AC绕着点C逆时针旋转得到线段CD，旋转角为α，且$0^\circ<\alpha<180^\circ$，连接AD、BD．

（1）如图1，当∠BAC=100°，$\alpha=60^\circ$时，∠CBD 的大小为__________；

（2）如图2，当∠BAC=100°，$\alpha=20^\circ$时，求∠CBD的大小；

（3）已知∠BAC的大小为m（$60^\circ<m<120^\circ$），若∠CBD 的大小与（2）中的结果相同，请直接写出α的大小．

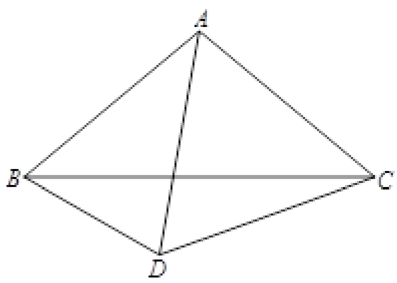


图1

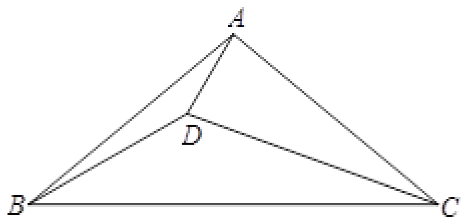


图2

11．（江苏省无锡市宜兴市实验中学2019-2020学年八年级上学期期中数学试题）【初步探索】

截长补短法，是初中几何题中一种添加辅助线的方法，也是把几何题化难为易的一种策略．截长就是在长边上截取一条线段与某一短边相等，补短就是通过延长或旋转等方式使两条短边拼合到一起，从而解决问题．

（1）如图1，△ABC是等边三角形，点D是边BC下方一点，∠BDC＝120°，探索线段DA、DB、DC之间的数量关系；

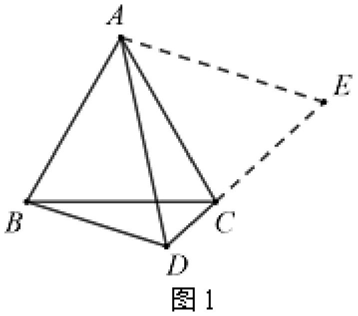


图1

【灵活运用】

（2）如图 2，$\triangle ABC$ 为等边三角形，直线 $a \parallel AB$，D 为 BC 边上一点，$\angle ADE$ 交直线 a 于点 E，且$\angle ADE$＝60°．求证：CD＋CE＝CA；

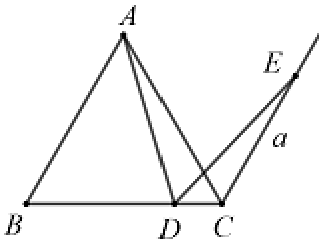


图 2

【延伸拓展】

（3）如图 3，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC$＋$\angle ADC$＝180°，AB＝AD．若点 E 在 CB 的延长线上，点 F 在 CD 的延长线上，满足 EF＝BE＋FD，请直接写出$\angle EAF$ 与$\angle DAB$ 的数量关系．

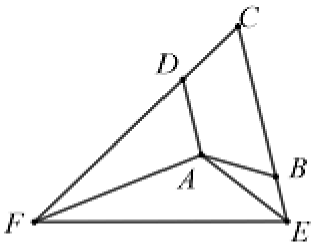
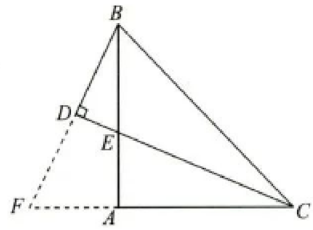
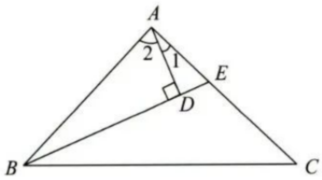


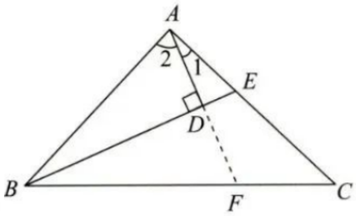
图 3

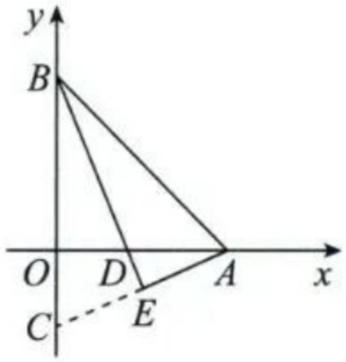
重难点10 全等三角形中“雨伞”模型

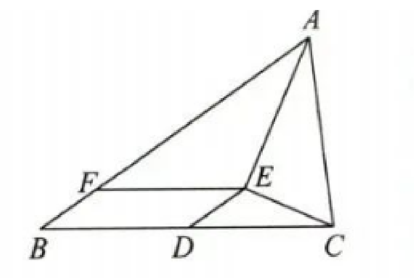
【知识梳理】







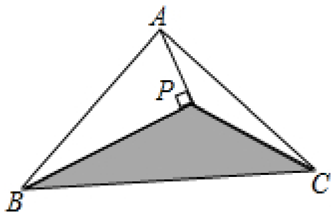




【考点剖析】

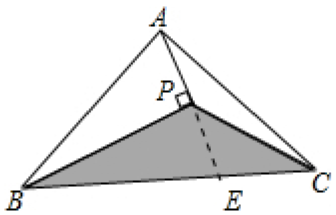
一．选择题（共2小题）

1．（2022秋•东港区校级期末）如图，△ABC的面积为10cm^2，AP垂直∠B的平分线BP于P，则△PBC的面积为（　　）



A．$4cm^2$　　B．$5cm^2$　　C．$6cm^2$　　D．$7cm^2$

【解答】解：延长 AP 交 BC 于 E，



∵AP 垂直∠B 的平分线 BP 于 P，

∠ABP＝∠EBP，

又知 BP＝BP，∠APB＝∠BPE＝90°，

∴△ABP≌△BEP，

∴$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle BEP}$，$AP$＝$PE$，

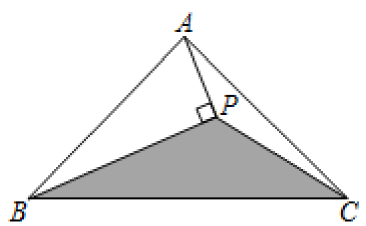
∴△APC 和△CPE 等底同高，

∴$S_{\triangle APC}=S_{\triangle PCE}$，

∴$S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PBE}+S_{\triangle PCE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=5cm^2$，

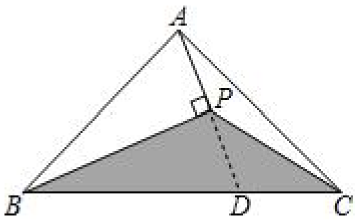
故选：B．

2．（2022 秋•常州期中）如图，△ABC 的面积为 $12cm^2$，AP 垂直于∠ABC 的平分线 BP 于 P，则△PBC 的面积为（　　）



A．$9cm^2$　　B．$8cm^2$　　C．$6cm^2$　　D．$5cm^2$

【解答】解：延长 AP 交 BC 于点 D，



∵BP 平分$\angle ABD$，

∴$\angle ABP=\angle DBP$，

∵$BP\perp AP$，

∴$\angle BPA=\angle BPD=90°$，

∵$BP=BP$，

∴$\triangle BAP\cong\triangle BDP$（$ASA$），

∴$AP=PD$，

∴$\triangle ABP$ 的面积＝$\triangle BDP$ 的面积，$\triangle APC$ 的面积＝$\triangle DPC$ 的面积，

∵$\triangle ABC$ 的面积为 $12cm^2$，

∴$\triangle PBC$ 的面积＝$\triangle BPD$ 的面积+$\triangle DCP$ 的面积

$=\dfrac{1}{2}\triangle ABC$ 的面积

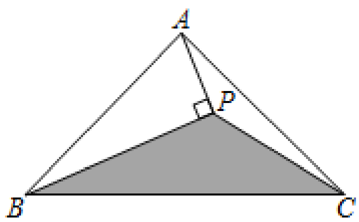
$=\dfrac{1}{2}\times 12$

$=6$（cm^2），

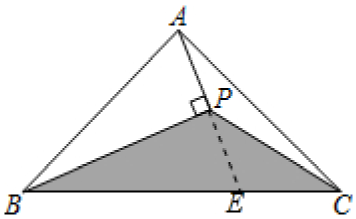
故选：C．

二．填空题（共 1 小题）

3．（2022 秋•邗江区校级月考）如图，$\triangle ABC$ 的面积为 $8cm^2$，AP 垂直$\angle B$ 的平分线 BP 于点 P，则$\triangle PBC$ 的面积为____cm^2．



【解答】解：延长 AP 交 BC 于 E，



∵AP 垂直∠B 的平分线 BP 于 P，

$\angle ABP=\angle EBP$，

又知 $BP=BP$，$\angle APB=\angle BPE=90°$，

∴$\triangle ABP\cong\triangle BEP$，

∴$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle BEP}$，$AP=PE$，

∴△APC 和△CPE 等底同高，

∴$S_{\triangle APC}=S_{\triangle PCE}$，

∴$S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PBE}+S_{\triangle PCE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=4cm^2$，

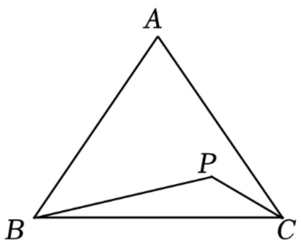
故答案为：4．

三．解答题

4．（2021 秋•荔城区校级期中）如图，△ABC 中，$AB=AC$，点 P 在△ABC 内连接 PB 和 PC，$BP=AB$．

（1）若 $\angle BAC=50°$，且 $\angle PBC=\angle ACP$，求∠BPC 的度数．

（2）取 BC 的中点 D，连接 AD 交 CP 延长线于点 M，当 $\angle ABP=2\angle ACP$ 时，试判断∠BAC 与∠ABP 之间的关系，画出图形并说明理由．



【解答】解：（1）∵$AB=AC$，$\angle BAC=50°$，

∴$\angle ABC=\angle ACB=\frac{1}{2}(180°-\angle BAC)=\frac{1}{2}(180°-50°)=65°$，

∵$\angle PBC=\angle ACP$，

又∵$\angle APB=\angle ABC-\angle PBC$，$\angle PCB=\angle ACB-\angle ACP$，

∴$\angle APB=\angle PCB$，

∴$\angle BPC=180°-(\angle PBC+\angle PCB)=180°-(\angle PBC+\angle APB)=180°-\angle ABC$

$=180^\circ-65^\circ=115^\circ$；

（2）$\angle BAC+\angle ABP=120^\circ$，

理由：过点 A 作底边 BC 的中线 AD，连接 BM，画图如下，

∵$AB=AC$，

∴AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$AD\perp BC$，

∴$BM=CM$，

∵点 M 在底边 BC 的中线上，

∴点 M 在 $\angle BAC$ 的平分线 AD 上，

即 AM 平分 $\angle BAC$，

∴$\angle CAM=\angle BAM=\beta$，

在△ABM 和△ACM 中，

$$\begin{cases}AB=AC\\ \angle AMB=\angle AMC,\\ AM=AM\end{cases}$$

∴△ABM≌△ACM（SAS），

∴$\angle ACM=\angle ABM=\alpha$，

∵$\angle ABP=2\angle ACP=2\angle ACM=2\alpha$，$\angle ABP=\angle ABM+\angle PBM=\alpha+\angle PBM=2\alpha$，

∴$\angle ABM=\angle PBM=\alpha$，

在△ABM 和△PBM 中，

，

∴△ABM≌△PBM（SAS），

∴$\angle AMB=\angle PMB$，

在△ABM 中，$\angle BMA=\alpha+\beta$，

在△ACM 中，$\angle CMD=\alpha+\beta$，

由$\angle AMB=\angle PMB$ 得：$180^\circ-\alpha-\beta=2(\alpha+\beta)$，

∴$\alpha+\beta=60^\circ$，

则$\angle BAC+\angle ABP=2\alpha+2\beta=120^\circ$．